应用泛函分析

● 范 达

● 高等教育出版社

应用泛函分析

范　达

高等教育出版社

(京)112号

DY 80/01

本书是为高等院校非数学专业高年级学生及研究生而编写的．阅读本书只需具备《微积分》和《线性代数》的基础知识．书中系统地介绍了线性泛函分析的基础理论和应用．全书共分六章：赋范线性空间，Hilbert 空间的几何与最佳逼近问题，线性算子的一般理论，线性泛函延拓与凸集分离，弱收敛与共轭算子，紧线性算子及其谱性质．另有两个附录：(一) 复习与补充知识，(二) Lebesgue 积分理论，供读者选读和查阅．

为了让读者尽快地学到泛函分析的基本理论、方法和应用，本书不讲抽象距离空间理论，而以 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 为出发点，引入内积空间，由内积诱导范数的基本特征，抽象出赋范线性空间，并进一步论述有关基本理论及其应用．为体现泛函分析的应用性，书中介绍了 Banach 和 Schauder 不动点原理及它们的应用，凸集分离定理及其在凸规划问题中的应用，选编了一定数量的例子和应用问题，特别对泛函分析在最佳逼近问题中的应用作了较多的论述．

本书可供高等院校非数学专业的师生使用，也可供有关自然科学、工程技术和经济管理科学工作者参考．

应用泛函分析

范 达

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.625 字数 230 000

1993 年 4 月第 1 版 1993 年 4 月第 1 次印刷

印数 0001—1 4.6

ISBN 7-04-004104-9/O·1182

定价 4.40 元

前　言

泛函分析是一门内容丰富、应用广泛的现代数学分支. 近几十年来,随着科学技术的迅速发展,泛函分析不但已渗透到数学领域中众多其他的分支,而且,它的概念和方法在自然科学、工程技术理论与经济管理科学中日益广泛地被采用,成为许多从事这些学科领域研究工作的学者所渴望了解的一门数学学科. 自80年代以来,我国许多高等院校已陆续为这些学科有关专业的研究生和高年级学生开设了《应用泛函分析》课程. 这些方面的教材也随需要而陆续出版. 纵观这些教材的内容大都沿用传统的体系,对应用很广的几何形式 Hahn-Banach 定理和 Schauder 不动点原理等内容几乎没有涉及,而闭线性算子与紧线性算子也讨论得很少. 本书试图弥补这些方面的不足.

本书是为高等院校非数学专业高年级学生与研究生而编写的一本教材. 从读者仅具备《微积分》和《线性代数》基础知识出发,加强应用方面的内容,力图向读者表明泛函分析的应用性,讲清一些重要概念的来源和背景. 为此,在编写本书时曾作如下考虑:

(1) 本书避开了在应用上不那么直接的抽象距离空间理论. 开始就扼要介绍抽象线性空间基本概念,并从 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 出发,引入内积空间,由内积诱导范数的基本特征,抽象出赋范线性空间,并进一步论述空间结构基本理论及其应用,然后再讨论 Hilbert 空间几何属性与最佳逼近问题. 目的让读者尽快学习 Hilbert 空间与 Banach 空间的基本理论及其应用,更好领会在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 和 Banach 空间理论中 Hilbert 空间理论所起的纽带作用,以及 Hilbert 空间理论在应用上的重要性.

(2) Hahn-Banach 定理是泛函分析中一个十分重要的基本

定理. 它的重要性不仅表现在其对建立 Banach 空间理论体系所起的作用，而且还表现在解决许多具体的分析问题之中. 我们在介绍 Hahn-Banach 定理的解析形式之后，还介绍了它的几何形式，导出几种情况的凸集分离定理，最后通过一个带不等式约束的凸规划问题的讨论，引导读者领略泛函分析方法解决经典问题的威力.

(3) 为了体现泛函分析的应用性，本书除了介绍 Banach 与 Schauder 不动点原理及它们的应用，选编了一定数量的例子和应用问题外，还试图以最佳逼近问题作为应用的典型例子，对泛函分析基本理论在最佳逼近问题中的应用进行了多方面的讨论. 如严格凸赋范线性空间中有限维子空间的最佳逼近元的存在与唯一性，Hilbert 空间中闭凸集的最佳逼近元的存在唯一性及其特征，有限维空间的最佳逼近元的计算方法，子空间和闭凸集的最佳逼近元的对偶关系等.

(4) 为了弥补非数学专业学生对数学分析和实变函数方面的知识的不足，本书末有两个附录：(一)复习与补充知识，这是阅读本书必备的知识；(二)Lebesgue 积分理论，供读者选读与查阅. 对于 Lebesgue 积分，我们是在阶梯函数构成的赋范线性空间 Φ^1 但不完备）的基础上，直接引入 Lebesgue 积分概念，并讨论 $L^1[a,b]$ 空间的完备性和积分收敛定理等，而 p 方 L-可积函数和 $L^p[a,b]$ 空间的完备性是通过引入可测函数来建立的.

本书对概念、基本理论和定理的论述与证明是严格的，并注意对读者的分析推理能力和数学素质的训练. 书中除个别定理外几乎所有定理(包括证明繁难的定理)均给出严格的论证. 目的是为不同水平和要求的读者学习提供方便. 自 1986 年以来，就我们按照本书修改前的讲义试教多遍的经验来说，按每周 4 学时，本书基本内容可于一学期内讲授完毕.

参加本书审稿的有.孙顺华、张业才(四川大学)、曹之江、刘德(内蒙古大学)、康世焜(成都科技大学)和丁祖宪(成都电子科技大学)等教授,他们仔细审阅了全书原稿,提出许多宝贵意见和建议.张石生(四川大学)和郭懋正(北京大学)教授对本书的编写工作提了有益的意见. 在本书编写过程中, 我校刘良深和韩景銮两位教授给予热情的支持和协助. 王石安硕士研究生帮助誊写书稿. 在此谨向他们表示衷心感谢. 编者还要感谢本书责任编辑郑洪深同志, 他在本书编辑出版过程中做了大量的工作和提出不少有益的意见.

由于编者的学识水平所限,书中错误与不妥之处在所难免,诚恳欢迎专家、读者批评指正.

范　达

1991年11月于中山大学康乐园

符号说明

$\Longrightarrow$	蕴含
$\Longleftrightarrow$	等价，当且仅当
$\triangleq$	定义为，规定为，记作
$\forall$	对于每一个，对于任何的
$\exists$	存在，有
$\exists \mid$	存在唯一
$\Vert\cdot\Vert$	范数
$\Vert x\Vert$	x 的范数
$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$	内积
$\langle x\mid y\rangle$	x 与 y 的内积
$\langle x,f\rangle$	线性泛函 f 在 x 处的值
(x,y)	x 与 y 的有序偶
$[M]$	M的线性包
$\square$	证毕，述毕
$BV_0[a,b]$	有界变差函数空间
c	收敛数列空间
c_0	零数列空间
$\mathbf{C}$	复数全体
$\mathbf{C}^n$	n 维复 Euclid 空间
$C[a,b]$、$C(\Omega)$	连续函数空间
$C^k[a,b]$	k 阶连续可微函数空间
$\mathscr{D}(A)$	算子 A 的定义域
$\dim E$	空间 E 的维数
$G(A)$	算子 A 的图象
I	恒等算子
I_E	定义在 E 上的恒等算子
$\mathbf{K}$	实数全体或复数全体
$\mathbf{K}^n$	n 维实或复 Euclid 空间

$\mathscr{K}(E,F)$	从E映到F内的紧线性算子全体
$\mathscr{K}(E)$	指$\mathscr{K}(E,E)$
l^p	p方可和数列空间
l^∞	有界数列空间
$\mathscr{L}^1[a,b]$	在$[a,b]$上 Lebesgue 可积函数全体
$\mathscr{L}^p[a,b]$	在$[a,b]$上p方L-可积函数全体
$L^1[a,b]$	Lebesgue 可积函数空间
$L[a,b]$	指$L^1[a,b]$
$L^p[a,b]$	p方 Lebesgue 可积函数空间
$\mathscr{L}(E,F)$	从E映到F内的有界线性算子全体，有界线性算子空间
$\mathscr{L}(E)$	指$\mathscr{L}(E,E)$
$\mathbb{N}$	自然数全体
$\mathscr{N}(A)$	算子A的零空间
$\mathbb{Q}$	有理数全体
$\mathbb{R}$	实数全体
$\mathbb{R}^n$	n维实 Euclid 空间
$\mathscr{R}(A)$	算子A的值域
$R_\lambda(A)$	算子A的预解算子
$S(x,r)$	以x为中心，r为半径的开球
$\bar{S}(x,r)$	以x为中心，r为半径的闭球
$\mathrm{Span}\,M$	M的线性包
θ	线性空间中的零元素或零算子
$\rho(\cdot,\cdot)$	距离(函数)
$\rho(x,y)$	x与y之间的距离
$\rho(A)$	算子A的预解集
$\sigma(A)$	算子A的谱集
$\sigma_c(A)$	算子A的连续谱
$\sigma_p(A)$	算子A的点谱
$\sigma_r(A)$	算子A的剩余谱
$\varnothing$	空集

目　录

第一章 赋范线性空间

泛函分析是研究无限维线性空间上泛函数和算子理论的一门分析数学. 我们知道,在有限维分析数学中,极限概念的理论与方法是研究函数理论的重要工具. 同样, 在泛函分析中研究无限维空间上的泛函数与算子理论, 也要在无限维线性空间中按某种方式来引入极限概念,使空间上的代数结构与极限结构(或更一般地说拓扑结构)有机地联系起来. 事实上,泛函分析中的一些基本属性和重要结论都是建立在这种既有代数结构又有拓扑结构相结合的空间上的. 因而, 泛函分析的理论与方法就能更有效地处理数学物理、工程技术和经济等领域中出现的数学理论问题,特别是有关的线性问题.

在进入探讨泛函分析学科领域开始的这一章里, 我们要象研究有限维 Euclid 空间的结构基本属性那样,着重研究抽象空间的结构性质,包括空间的代数结构与拓扑结构的基本性质.

§1.1 线 性 空 间

在这一节, 我们要对线性代数课程中所讲的抽象线性空间及其有关的基本概念给出概述, 并引入凸集、凸包和超平面等一些概念.

在本教材中,所论及的数域 $\mathbb{K}$ 是指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义 1 集合 E 称为定义在数域 $\mathbb{K}$ 上的一个**线性空间**,是指: E 是一个非空集,以及通过规定映射

$$S_E: E\times E\longrightarrow E: (x,y)\longmapsto x+y,$$

$$M_E: \mathbb{K}\times E\longrightarrow E: (\lambda,x)\longmapsto \lambda\cdot x,$$

定义了E上两种运算——加法运算与数乘运算，其中$S_E(x,y)=x+y$叫做x与y的**和**，$M_E(\lambda,x)=\lambda\cdot x$(或简写成$\lambda x$)叫做数$\lambda$与$x$的**乘积**；并且，这两种运算满足下列公理：

(i) $x+y=y+x, \forall x,y\in E$,

(ii) $(x+y)+z=x+(y+z), \forall x,y,z\in E$,

(iii) $\exists|\theta\in E$ 使得 $\theta+x=x, \forall x\in E$，这个元素$\theta$称为$E$中的**零元素**，

(iv) $\forall x\in E, \exists| x'\in E$ 使得 $x+x'=\theta$，这个x'称为x的**逆元素**，并将x的逆元素x'记作$-x$，

(v) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x, \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ 及 $x\in E$,

(vi) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \forall\lambda\in\mathbb{K}$ 及 $x,y\in E$,

$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ 及 $x\in E$,

(vii) $1\cdot x=x, \forall x\in E$.

在定义中，当$\mathbb{K}=\mathbf{R}$时，E为定义在实数域$\mathbf{R}$上的线性空间，称为**实线性空间**；如果$\mathbb{K}=\mathbf{C}$，则E称为**复线性空间**。在本教材中，凡一般地论及的线性空间皆指定义在实或复数域$\mathbb{K}$上的线性空间，并总用θ表示零元素，而空间中的元素又常常称为**向量**或**点**。

在线性空间E中可引入减法运算，设$x,y\in E$，定义x与y的**差**$x-y\triangleq x+(-y)$。这样，在线性空间中，减法作为加法的逆运算是可以实施的，并且，$\forall x,y,z\in E$，有

$$x+z=y\Longleftrightarrow z=y-x.$$

这就是说，在线性空间中通常的"移项变号"规则成立。

此外，在线性空间E中，关于加法、数乘及减法运算具有如下性质：$\forall x,y,z\in E$ 及 $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$，有

1° $x=y\Longleftrightarrow x-y=\theta$,

2° $0\cdot x=\theta, \lambda\cdot\theta=\theta$,

3° $(-1)x=-x$,

4° $x+y=x+z \Longrightarrow y=z$,

5° $\lambda x=\lambda y, \lambda\neq 0 \Longrightarrow x=y$,

$\lambda x=\mu x, x\neq\theta \Longrightarrow \lambda=\mu$

6° $(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x$,

$\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y$.

下面列举几个常见的线性空间例子:

例 1 n **维向量空间** $\mathbf{K}^n$(即 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$)指 n 个数的有序组的全体组成的集合:

$$\mathbf{K}^n \triangleq \{x \triangleq (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \mid \xi_k \in \mathbf{K}\,(k=1,2,\cdots,n)\},$$

并在其上定义了加法与数乘运算:

$$x+y=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)+(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

$$\triangleq(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$

$$\lambda\cdot x=\lambda\cdot(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\triangleq(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n),$$

$$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n), y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{K}^n \text{ 及 } \lambda\in\mathbf{K},$$

所构成的线性空间. 显然, 其中零元素 θ 是 n 个数皆为 0 的有序组, 即 $\theta=(0,0,\cdots,0)$.

我们知道,对于 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$(注意, 其数域 $\mathbf{K}$ 也是实的),它有一个熟知的几何解释,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是点$x\triangleq(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$ 在 Descartes 坐标系下的坐标. 特别,$\mathbf{R}^1$ 为实数直线, $\mathbf{R}^2$ 为平面,$\mathbf{R}^3$ 为三维几何空间,等等. 在 $\mathbf{R}^n$ 的几何解释中, 可以把元素 x 看作点或从零点 θ (通常称为 $\mathbf{R}^n$ 空间中的原点)到该点 x 的向量.

例 2 p **方可和数列空间** l^p $(1\leqslant p<+\infty)$ 指满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<+\infty$ 的数列 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的全体组成的集

$$l^p \triangleq \{x \triangleq \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \xi_k \in \mathbf{K}(k=1,2,\cdots), \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty\},$$

并在其上按通常数列相加与数列乘以数的规定，引入加法与数乘运算如下：

$$x+y=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}+\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \triangleq \{\xi_k+\eta_k\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\lambda x=\lambda \cdot \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \triangleq \{\lambda \xi_k\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\forall x=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, y=\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p \text{ 及 } \lambda \in \mathbf{K}.$$

显然，有 $\lambda x \in l^p$. 并且不难证明 $x+y \in l^p$. 事实上，因为

$$|\xi_k+\eta_k|^p \leqslant (|\xi_k|+|\eta_k|)^p \leqslant 2^p(\max\{|\xi_k|, |\eta_k|\})^p$$
$$\leqslant 2^p(|\xi_k|^p+|\eta_k|^p).$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^p \leqslant 2^p\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p+\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)<+\infty.$

据此，可以进一步验证：l^p 按上述定义的加法与数乘运算构成一个线性空间，其中零点 θ 是各项皆为 0 的无穷数列.

例 3 有界数列空间 l^∞ 指有界数列的全体组成的集

$$l^\infty \triangleq \{x \triangleq \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \xi_k \in \mathbf{K}(k=1,2,\cdots), \sup_k |\xi_k| < +\infty\}.$$

并在其上按通常数列相加与数列乘以数的规定，引入加法与数乘运算，容易验证，它构成一个线性空间.

此外，在收敛数列的全体 c 和收敛于零的数列的全体 c_0 上，按通常数列相加与数列乘以数的规定引入的加法与数乘运算，亦必构成线性空间. c 叫**收敛数列空间**，而 c_0 叫**零数列空间**.

例 4 连续函数空间 $C[a, b]$指定义在有限闭区间$[a, b] \subset \mathbf{R}^1$ 上连续实(或复)值函数的全体组成的集，并在其上按通常函数相加与函数乘以数的规定引入加法与数乘运算，即 $\forall x \triangleq x(t)$, $y \triangleq y(t) \in C[a,b]$及 $\lambda \in \mathbf{R}$(或 $\lambda \in \mathbf{C}$)，规定 $x+y$ 与 λx 在任一点 $t \in [a,b]$处的值为

$$(x+y)(t)\triangleq x(t)+y(t),(\lambda x)(t)\triangleq\lambda\cdot x(t).$$

这样，$C[a,b]$构成一个线性空间，其中零元素θ是在$[a, b]$上恒等于0的函数。

例5 $\boldsymbol{C^k[a,b]}$**空间**($k\in\mathbf{N}$)指定义在闭区间$[a, b]$上具有直到k阶连续导数的函数全体组成的集$C^k[a, b]$，并在其上按通常的函数加法与数乘运算所构成的线性空间.

现在，介绍线性空间中有关基本概念. 以后如无特别说明，我们总假设E为数域$\mathbf{K}$上的线性空间.

(1) **集的线性运算** 设$A, B\subset E$, $\lambda\in\mathbf{K}$. 我们引入集的加法运算与数乘运算如下:

$$A+B\triangleq\{a+b\mid a\in A,b\in B\},$$
$$\lambda A\triangleq\{\lambda a\mid a\in A\}.$$

并且为简便起见，常将$\{x\}+A$写成$x+A(x\in E)$；将$(-1)A$写成$-A$；将$A+(-B)$写成$A-B$. 图1.1给出两个集A与B之和$A+B$的几何直观解释. 因此，我们称$x+A$为集A对向量$x\in E$的平移.

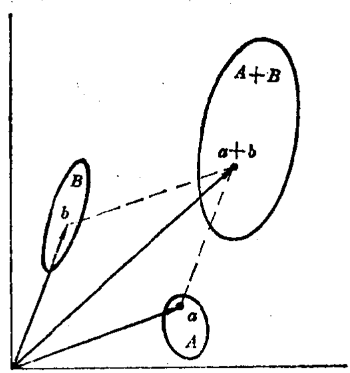

图1.1 两个集的和

(2) **线性相关与线性无关** 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是E中n个向量.