近海结构水动力学

李远林 编

华南理工大学出版社

普通高等学校推荐教材

近海结构水动力学

李远林　编

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书讨论了海洋环境中近海结构的受力和运动问题。内容包括：近海结构水动力分析中常用的数学公式；波浪理论；作用在小构件、大型结构上的波浪力的计算方法；海岸工程中面临的特殊波浪形态；典型近海漂浮结构的动力分析；随机海浪及结构极值响应问题等。其中，着重介绍了目前世界上关于近海结构受力和运动问题的几种流行的理论和计算方法，为读者进一步的深入了解打下基础。

本书适合于海洋工程、港航工程和船舶工程等专业的学生、教师及相关领域的工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

近海结构水动力学/李远林编 .—广州：华南理工大学出版社，1999.8
ISBN 7-5623-1416-0

Ⅰ.近…
Ⅱ.李…
Ⅲ.海洋动力学
Ⅳ.P 731.2

华南理工大学出版社出版发行
(广州五山　邮编 510640)
责任编辑　王魁葵
各地新华书店经销
华南理工大学印刷厂印装
*
1999 年 8 月第 1 版　1999 年 8 月第 1 次印刷
开本：787×1092　1/16　印张：12.5 字数：304 千
印数：1—1000 册
定价：18.5 元

前　言

本书将讨论海洋环境中近海结构的受力和运动问题。这是海洋工程领域最为基本、也最为繁难的专题。它所涉及的问题是如此广泛，以致于不可能在一本书中包含所有方面。同时，海洋工程本身还是近几十年内才发展起来的学科，由于社会需要而发展迅速，迄今仍有不少课题需要进一步研究或正向深层开发。因此，本书在内容选择上，主要考虑近海结构设计的应用领域，而那些正在探讨的和过于高深的理论问题就不得不有所取舍。然而，为了使读者学习时尽可能少花时间翻阅其他参考书，本书将尽可能保持完整的系统，所选专题也将给出较为详细的推导，以便读者对其有一个基本的了解。

本书分为八章。第一章简略介绍书中经常要用到的数学公式，包括 Fourier 级数和 Fourier 变换、双曲函数、贝塞尔函数和椭圆函数等。第二章是波浪理论部分。如上所述，我们的目标是应用，这里仅提供近海结构设计计算中应用最多的波浪理论，如线性波理论、STOKES 波理论、椭余波理论和流函数理论。为便于应用，还专门讨论了各种理论的适用范围和选取原则。第三章论述作用在小构件上的波浪力问题。计算作用在小构件上波浪力的最通用公式是 Morison 公式，此公式简单直观，因而深得工程技术人员的欢迎，但存在如何选取系数的问题。本章专门讨论了各类构件相应的水动力系数的取值问题。第四章叙述了计算作用在大型结构上的波浪力的各种方法。从 Froude-Krylov 方法(类似于小构件时的 Morison 方程)到 Green 函数方法，详细介绍了各种形状结构上所受波浪力的计算方法，并讨论了大小构件上波浪力公式的适用性。第五章讨论海岸工程中面临的特殊波浪形态，涉及波浪浅水变形、港池共振等。鉴于直墙式防波堤是海岸工程中的典型设施，虽属固定结构，但其波浪力的计算有其特殊性，因此，特别从工程角度讨论了直墙式防波堤上波浪力的计算问题。第六章主要通过对几个典型近海漂浮结构的动力分析，讨论相应运动微分方程的解，多数都提供了与试验结果的比较，讨论了理论分析的适用性。由于所选的几个专题都是海洋工程中的常用系统，因此，本章所列结果和结论，对工程设计具有较高参考价值。第七章论述了随机海浪问题，通过对不规则波观测的讨论，引入平稳各态历经的随机现象的统计分析方法，介绍了不规则波的表达、谱分析方法及不规则波的统计特征等。第八章主要介绍了近海结构设计中人们普遍关心的极值响应的计算问题，用谱分析的方法讨论了线性系统的响应特性、扰动输入与响应输出之间的函数关系，给出了短期预报的极值估算方法，以及长期概率统计预报。

本书是为海洋工程、港航工程和船舶工程等专业高年级学生编写的。然而，其中也包含了个别较为高深的课题，例如，二阶力的计算问题，适于研究生学习参考，本科生一般不作要求。书中编入大量图表，可供实际工作时直接参考选用。因此，对相关领域的工程技术人员亦有参考价值。

大连理工大学李玉成教授主审本书，提供了许多宝贵的建议和具体修改意见。高峰同志完成了本书初稿的电脑打字工作。特此致谢。

李远林

1999 年 3 月

编者按：

本书编写时参考选用的相关外文资料中，仍有不少图例沿用英制，这些英制单位均为我国已废除的非法定计量单位，为保持原始资料的准确性，对这些非法定计量单位予以保留，以下特列出它们与法定计量单位的换算关系。

$$1\ \mathrm{ft} = 0.3048\ \mathrm{m}$$

$$1\ \mathrm{in} = 25.4\ \mathrm{mm}$$

$$1\ \mathrm{LB} = 0.454\ \mathrm{kg}$$

$$1\ \mathrm{LB}/\mathrm{ft}^2 = 47.88\ \mathrm{Pa}$$

目　录

第一章　数学基础 …… (1)

第一节　Fourier 级数和 Fourier 变换 …… (1)

一、Fourier 级数 …… (1)

二、Fourier 变换 …… (3)

第二节　双曲函数和三角函数 …… (5)

一、双曲函数的定义及图形特征 …… (5)

二、复数形式的三角函数 …… (6)

第三节　贝塞尔函数 …… (6)

第四节　椭圆函数 …… (7)

第二章　波浪理论 …… (9)

第一节　势函数及其遵循的规律 …… (9)

一、Laplace 方程 …… (9)

二、Bernoulli 方程 …… (10)

三、边界条件 …… (10)

第二节　线性波理论 …… (11)

一、表面条件的线性化 …… (12)

二、线性化边值问题的分离变量解 …… (12)

三、几个特征量 …… (14)

四、波浪水质点速度和加速度 …… (15)

五、水质点的位移 …… (16)

六、动压力 …… (17)

七、深水与浅水的简化公式 …… (17)

八、波能、波能流和波群速度 …… (18)

第三节　Stokes 波理论 …… (21)

一、二阶 Stokes 波 …… (22)

二、五阶 Stokes 波 …… (25)

第四节　椭余波理论 …… (27)

一、概述 …… (27)

二、主要结果 …… (27)

第五节　流函数波理论 …… (31)

第六节　驻波理论 …… (35)

第七节　理论的适用性 …… (36)

第三章　作用在小结构上的波浪力 …… (41)

第一节　波浪力的表述 …… (41)

第二节　Morison 方程 …………………………………………………………………………………… (42)
一、Morison 方程的标准形式 ……………………………………………………………………… (42)
二、Morison 方程的几种修正形式………………………………………………………………… (45)
三、确定系数的试验方法……………………………………………………………………………… (54)
第三节　横向力 ………………………………………………………………………………………… (57)
第四节　水动力系数 …………………………………………………………………………………… (59)
一、光滑柱体 ……………………………………………………………………………………………… (59)
二、粗糙柱体 ……………………………………………………………………………………………… (63)
三、倾斜柱体 ……………………………………………………………………………………………… (65)
四、墙面作用的影响 …………………………………………………………………………………… (66)
五、结构相互作用的影响………………………………………………………………………………… (69)
第五节　系数的选择问题 ……………………………………………………………………………… (71)
一、检验方法的指导原则………………………………………………………………………………… (71)
二、海上试验 ……………………………………………………………………………………………… (72)
三、实验室系数在设计中的应用 ……………………………………………………………………… (74)
第六节　自由表面的影响 ……………………………………………………………………………… (75)
第四章　作用在大型结构上的波浪力 ………………………………………………………………… (78)
第一节　Froude-Krylov 力 ……………………………………………………………………………… (78)
一、水平柱体 ……………………………………………………………………………………………… (78)
二、水平半柱体 …………………………………………………………………………………………… (80)
三、球 ……………………………………………………………………………………………………… (81)
四、半球……………………………………………………………………………………………………… (83)
五、垂直柱体 ……………………………………………………………………………………………… (84)
六、矩形箱体 ……………………………………………………………………………………………… (85)
七、圆盘……………………………………………………………………………………………………… (86)
八、Froude-Krylov 力的系数 …………………………………………………………………………… (86)
九、例 ……………………………………………………………………………………………………… (87)
第二节　绕射理论 ……………………………………………………………………………………… (89)
一、完整的边值问题提法………………………………………………………………………………… (89)
二、脉动展开方法 ………………………………………………………………………………………… (89)
三、作用在结构上的波浪力 …………………………………………………………………………… (91)
第三节　解析形式的解 ………………………………………………………………………………… (91)
一、大型固定垂直柱体 …………………………………………………………………………………… (91)
二、坐底水平半柱体 ……………………………………………………………………………………… (96)
三、坐底半球 ……………………………………………………………………………………………… (98)
四、垂直柱体群 …………………………………………………………………………………………… (101)
第四节　绕射理论的数值方法…………………………………………………………………………… (103)
一、二维源汇方法…………………………………………………………………………………………… (103)
二、三维源汇方法…………………………………………………………………………………………… (109)

第五章　海岸工程中的波浪问题…………………………………………………………………………(112)
第一节　波浪的浅水变形……………………………………………………………………………(112)
一、波浪的折射 ……………………………………………………………………………………(112)
二、近岸波高的变形 ………………………………………………………………………………(114)
三、波浪的绕射 ……………………………………………………………………………………(116)
四、缓坡方程 ………………………………………………………………………………………(119)
第二节　港池的共振…………………………………………………………………………………(120)
一、港池共振的数学模型 …………………………………………………………………………(120)
二、港池波面的响应函数的数值计算 ……………………………………………………………(122)
三、矩形港池的振动波 ……………………………………………………………………………(123)
第三节　直墙式防波堤上的波浪力…………………………………………………………………(125)
一、直墙式防波堤上波压力公式 …………………………………………………………………(125)
二、破碎波的波压力公式 …………………………………………………………………………(127)
第六章　漂浮结构动力学……………………………………………………………………………(130)
第一节　漂浮结构运动概述…………………………………………………………………………(130)
一、线性势流理论问题的描述 ……………………………………………………………………(131)
二、作用在结构上的水动力 ………………………………………………………………………(132)
三、波浪中结构的运动方程 ………………………………………………………………………(133)
第二节　单自由度系统………………………………………………………………………………(134)
一、临界阻尼系数和阻尼因子 ……………………………………………………………………(135)
二、强迫振荡方程的解 ……………………………………………………………………………(136)
三、铰接平台的分析 ………………………………………………………………………………(138)
第三节　铰接装卸平台—油轮系统…………………………………………………………………(141)
第四节　锚链系泊系统………………………………………………………………………………(144)
一、一般模型 ………………………………………………………………………………………(145)
二、悬链线方程和锚链系泊力 ……………………………………………………………………(147)
第五节　二阶力和低频波浪阻尼……………………………………………………………………(150)
一、二阶波浪力的积分方法 ………………………………………………………………………(150)
二、低频漂移阻尼……………………………………………………………………………………(152)
三、波浪漂移阻尼的一种切片理论方法 …………………………………………………………(153)
第七章　随机波浪……………………………………………………………………………………(155)
第一节　海浪的观测与描述…………………………………………………………………………(155)
一、海浪是随机现象…………………………………………………………………………………(155)
二、随机变量的描述…………………………………………………………………………………(156)
三、不规则波的观测和描述 ………………………………………………………………………(158)
第二节　不规则波的表达……………………………………………………………………………(160)
第三节　不规则波的统计特征………………………………………………………………………(162)
一、有义波高 ………………………………………………………………………………………(163)
二、平均波浪周期……………………………………………………………………………………(167)

第四节 波谱……(168)
一、Bretschneider 谱……(168)
二、ISSC 谱……(168)
三、Pierson-Moskowitz (PM)谱……(168)
四、ITTC 谱……(169)
五、JONSWAP 谱……(169)
六、文圣常谱……(170)
第五节 实测海浪分析……(171)
一、各态历经随机过程的自相关函数……(171)
二、各态历经随机过程的谱分析……(172)
三、谱密度函数估算的相关函数法……(174)
第八章 不规则波中的结构响应……(177)
第一节 线性系统和谱分析……(177)
一、线性系统……(177)
二、脉冲响应……(178)
三、频率响应函数和响应谱……(179)
第二节 短期预报……(181)
一、Morison 力谱……(181)
二、不规则波中的运动统计……(184)
三、极值问题……(186)
第三节 长期预报……(188)
一、波浪的长期分布数据……(188)
二、长期分布概率……(189)
三、长期极值估算……(190)
参考文献……(192)

第一章　数学基础

本书涉及海洋波及其与近海结构相互作用问题，所选专题面临一些专门的数学知识。为便于读者学习本书时复习和查阅，特把其中用得较多的内容集中介绍如下。

第一节　Fourier 级数和 Fourier 变换

一、Fourier 级数

Fourier (傅里叶)级数是三角函数的无穷级数。鉴于三角函数的周期性质，傅里叶级数在海洋波问题以及其他周期性物理现象中占有特殊的位置。例如，可用它作为复杂海洋波的一种简单表述。如果函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2\pi$ 上，周期为 2π，且绝对可积，那么，$f(x)$ 能用三角级数近似地表示如下：

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1-1}$$

考虑到三角函数的正交性：

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin nx \cos nx \mathrm{d}x = 0$$

式(1-1)中系数 a_n 和 b_n 可根据积分得到：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \tag{1-2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x \tag{1-3}$$

注意：区间可选为 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$，此时，上述方程中的 $x_0 = 0$，如果 $f(x)$ 是在区间 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上的偶函数，那么

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{x_0}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \tag{1-4}$$

$$b_n = 0 \tag{1-5}$$

若 $f(x)$ 在此区间上是奇函数，可以得到类似的简化。

方程(1-1)中的余弦项和正弦项可以用振幅和相角合并为单一正弦或余弦级数。如：

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \alpha) \tag{1-6}$$

其中

$$A_0 = a_0,\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{1-7}$$

$$\tan\alpha = b_n/a_n \tag{1-8}$$

如果 $f(x)$ 定义限为 $-L \leqslant x \leqslant L$，则可改变变量使 $f(x)$ 的傅里叶级数表示为：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1-9}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x \tag{1-10}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x \tag{1-11}$$

类似地，如果函数 $f(x)$ 为在区间 $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$ 上具有周期 T 的周期函数，则

$$x = \frac{2\pi t}{T} = \omega_0 t \tag{1-12}$$

式中，$\omega_0 = 2\pi/T$ 为函数基频。将上式代入方程(1-1)便可得出：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t) \tag{1-13}$$

此时，a_n 和 b_n 定义为

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t \tag{1-14}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t \tag{1-15}$$

例 1 定义

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a/2 \\ -1 & a/2 < x < a \end{cases} \tag{1-16}$$

试写出函数 $f(x)$ 的傅里叶级数表达式。

解 可以认为 $f(x)$ 关于 $x=0$ 对称，并且是周期为 a 的周期函数，见图 1-1。于是，

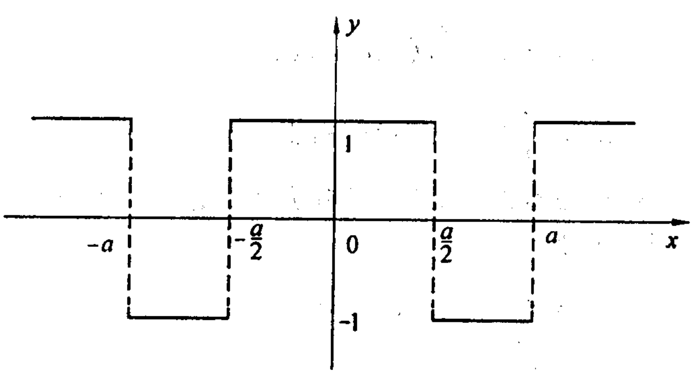

图 1-1

我们有一个偶函数，并且

$$b_n = 0 \tag{1-17}$$

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_0^{a/2}(1)\mathrm{d}x + \frac{2}{a}\int_{a/2}^{a}(-1)\mathrm{d}x = 0 \tag{1-18}$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^{a/2}(1)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x + \frac{2}{a}\int_{a/2}^{a}(-1)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{1-19}$$

当 n 为偶数时，$a_n=0$，于是

$$a_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\right],\ n = 0,1,2,\cdots$$

因此，函数 $f(x)$傅里叶级数的表达式为

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)x}{a} \tag{1-20}$$

二、Fourier 变换

Fourier 级数可用复数形式表示。根据欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

式(1-13)可写成

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} \tag{1-21}$$

令 $F_n=(a_n-\mathrm{i}b_n)/2$，$F_{-n}=(a_n+\mathrm{i}b_n)/2$，则

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)[\cos n\omega_0 t - \mathrm{i}\sin n\omega_0 t]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\\ F_{-n} &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)[\cos n\omega_0 t + \mathrm{i}\sin n\omega_0 t]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

又令$F_0=a_0/2$，则式(1-21)可写成

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty}F_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} \tag{1-22}$$

而

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\mathrm{d}t,\qquad n = 0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1-23}$$

设函数 $f(t)$在$(-\infty,\ \infty)$区间上绝对可积，它可以作为 Fourier 级数在周期 $T\to\infty$ 时的极限情形。因为$|t|<T/2$ 时，$f(t)$可用级数式(1-22)表示，把系数 F_n 的表达式(1-23)代入式(1-22)，则

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t'}\mathrm{d}t' \tag{1-24}$$

将级数中的 $n\omega_0$ 看作参数 ω 在区间$(-\infty,\ \infty)$中的间断值，即

$$\omega_n = n\omega_0 = 2n\pi/T,\qquad n = \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

不失一般性，令 $\omega_0=0$，$\Delta\omega_n=\omega_{n+1}-\omega_n=2\pi/T$，则(1-24)式变为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}\Delta\omega_n\int_{-T/2}^{T/2}f(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t'}\mathrm{d}t'$$

当 $T\rightarrow\infty$ 时，$\Delta\omega_n\rightarrow\mathrm{d}\omega$，$\omega_n\rightarrow\omega$。这样

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'$$

令

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t' \tag{1-25}$$

则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-26}$$

式(1-25)和式(1-26)是两个 Fourier 积分，亦称 Fourier 变换。通常称式(1-25)为 Fourier 正变换，式(1-26)称为逆变换或 Fourier 变换的反演公式。

Fourier 变换具有一些重要性质，灵活应用可较快地求出许多复杂信号的频谱，或反求出频谱的原时间历程。

(1) 叠加性质：$af_1(t)+bf_2(t)\longleftrightarrow aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$

(2) 时延和频移性质：

①时延　$f(t-t_0)\longleftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}$

②频移　$F(\omega-\omega_0)\longleftrightarrow f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$

(3) 微商性质：

①时域　$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\longleftrightarrow(\mathrm{i}\omega)F(\omega)$

$\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\longleftrightarrow(\mathrm{i}\omega)^n F(\omega)$

②频域　$\dfrac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\longleftrightarrow(-\mathrm{i}t)^n f(t)$

(4) 时间比例性质：

$$f\left(\frac{t}{T}\right)\longleftrightarrow|T|F(\omega T)$$

(5) 相乘和卷积：

若　$f_1(t)\longleftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t)\longleftrightarrow F_2(\omega)$

则　$f_1(t)f_2(t)\longleftrightarrow F_1(\omega)*F_2(\omega)$

其中，$F_1(\omega)*F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega-\sigma)F_2(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 称为 F_1 和 F_2 的卷积。

同样　$F_1(\omega)F_2(\omega)\longleftrightarrow f_1(t)*f_2(t)$

其中，$f_1(t)*f_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 称为 f_1 和 f_2 的卷积。

(6) 能量性质：

若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

说明 $f(t)$ 的能量是它的各个简谐分量能量的总和。

第二节　双曲函数和三角函数

一、双曲函数的定义及图形特征

双曲正弦

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \tag{1-27}$$

双曲余弦

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \tag{1-28}$$

双曲正切和余切

$$\tanh x = \sinh x/\cosh x,\ \coth x = \cosh x/\sinh x \tag{1-29}$$

它们的示意图见图 1-2。

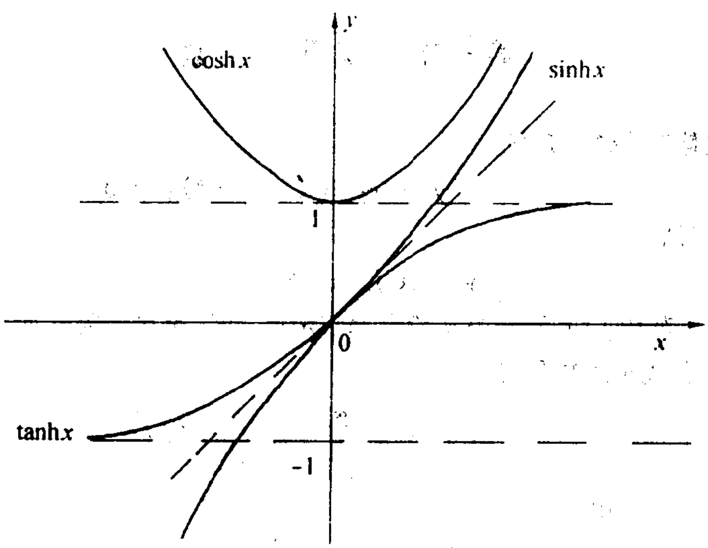

图 1-2

于是

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y$$

展成级数形式

$$\sinh x = x + \frac{x_3}{3!} + \frac{x_5}{5!} + \cdots \tag{1-30}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{1-31}$$

二、复数形式的三角函数

三角正弦 $$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{1-32}$$

三角余弦 $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{1-33}$$

三角正切 $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \tag{1-34}$$

双曲函数与三角函数的关系：

$$\sinh ix = i\sin x \tag{1-35}$$

$$\cosh ix = \cos x \tag{1-36}$$

三角函数的级数展式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{1-37}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{1-38}$$

第三节　贝塞尔函数

贝塞尔函数是二阶微分方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{1-39}$$

的解。其通解可写成

$$y = A_1 J_n(x) + A_2 Y_n(x) \tag{1-40}$$

对于一切整数 n，其中 J_n 是第一类 n 阶贝塞尔函数，Y_n 是第二类 n 阶贝塞尔函数。

J_n 可以用 x 的无穷级数写成

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \tag{1-41}$$

根据这种关系，可以得出

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1-42}$$

第二类 n 阶贝塞尔函数与第一类有如下关系：

$$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n = 0, 1, 2, \cdots \quad (1\text{-}43) \\ \lim\limits_{p\to n} \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_p(x)}{\sin p\pi} & n \neq 0, 1, 2, \cdots \quad (1\text{-}44) \end{cases}$$

同样

$$Y_1(x) = -Y_0'(x) \tag{1-45}$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1-46}$$

第一类汉开尔函数写成复数量

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \tag{1-47}$$

而第二类汉开尔函数为 $H_n^{(1)}$ 的复数共扼。因此

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \tag{1-48}$$

完全适用于 J_n，Y_n，$H_n^{(1)}$ 和 $H_n^{(2)}$ 的递推关系用 H_n 写成如下形式：

$$H_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}H_n(x) \tag{1-49}$$

$$H_{n-1}(x) - H_{n+1}(x) = 2H_n'(x) \tag{1-50}$$

$$xH_n'(x) + nH_n(x) = nH_{n-1}(x) \tag{1-51}$$

$$xH_n'(x) - nH_n(x) = -nH_{n-1}(x) \tag{1-52}$$

注意，上述关系同样适用于复变量。对复变量

$$J_n(ze^{im\pi}) = e^{imn\pi}J_n(z) \tag{1-53}$$

$$J_{-n}(ze^{im\pi}) = e^{-imn\pi}J_{-n}(z) \tag{1-54}$$

经常要用到的其他关系有

$$J_n(z)Y_n'(z) - J_n'(z)Y_n(z) = \frac{2}{\pi z} \tag{1-55}$$

$$J_n(z)Y_n''(z) - J_n''(z)Y_n(z) = -\frac{2}{\pi z^2} \tag{1-56}$$

几个常用的含贝塞尔函数的无穷级数有

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y) \tag{1-57}$$

$$x = 2[J_1(x) + J_3(x) + J_5(x) + \cdots] \tag{1-58}$$

$$\sin x = 2[J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \cdots] \tag{1-59}$$

$$\cos x = J_0(x) - 2[J_2(x) - J_4(x) + \cdots] \tag{1-60}$$

$J_0(x)$，$J_1(x)$，$Y_0(x)$ 和 $Y_1(x)$ 的数值，可从一般数学手册中查到。

贝塞尔函数的积分形式为

$$J_n(z) = \frac{(z/2)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta d\theta \tag{1-61}$$

或

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta - z\sin\theta)d\theta \tag{1-62}$$

其中，$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$。

则

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(x\cosh t)dt \qquad (x > 0) \tag{1-63}$$

第四节　椭圆函数

椭圆函数的名称源于求椭圆的周长。设椭圆的坐标为

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi \qquad (a > b) \tag{1-64}$$

线段元 ds 为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$
$$= a\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

其中，$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$。令 $\cos\varphi = t$，则线段长

$$s = a\int\frac{\sqrt{1-e^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt = a\int\frac{1 - e^2t^2}{\sqrt{(1 - e^2t^2)(1 - t^2)}}dt \tag{1-65}$$

在式(1-65)中，有一个特殊积分

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}} \tag{1-66}$$

常称为 Jacobi 椭圆函数，也称为第一类椭圆积分，其中 k 为小于 1 的常数。

Jacobi 椭圆函数的反函数为

$$w = \mathrm{sn}z = \mathrm{sn}(z, k)$$

称为椭圆正弦。它是一个周期函数，基本周期 T 和 T'。

$$T = 4K = 4F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} \tag{1-67}$$

$$T' = 2iK' = 2iF\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 2i\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}} \tag{1-68}$$

式中，k 称为模；$k' = \sqrt{1 - k^2}$ 称为补模。K 为全椭圆积分，或第一类全椭圆积分；K' 为对应于补模的全椭圆积分，或第二类全椭圆积分。据此定义椭圆余弦：

$$\mathrm{cn}z = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 z} \tag{1-69}$$

椭圆正切：

$$\mathrm{tn}z = \frac{\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z} = \frac{\mathrm{sn}z}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 z}} \tag{1-70}$$

以及

$$\mathrm{dn}z = \sqrt{1 - k^2\mathrm{sn}^2 z} \tag{1-71}$$

$\mathrm{sn}z$，$\mathrm{cn}z$，$\mathrm{tn}z$，$\mathrm{dn}z$ 统称为雅可比椭圆函数。

根据定义，容易看出雅可比椭圆函数之间存在如下基本关系

$$\mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}^2 z = 1$$
$$\mathrm{dn}^2 z + k^2\mathrm{sn}^2 z = 1$$
$$\mathrm{dn}^2 z - k^2\mathrm{cn}^2 z = 1 - k^2 = k'^2$$

椭圆函数的导数和积分公式如下

$$\frac{d}{dz}\mathrm{sn}z = \mathrm{cn}z\,\mathrm{dn}z,\ \frac{d}{dz}\mathrm{cn}z = -\mathrm{sn}z\,\mathrm{dn}z,\ \frac{d}{dz}\mathrm{dn}z = -k^2\mathrm{sn}z\,\mathrm{cn}z$$

$$\int\mathrm{sn}z\,dz = \frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}z - k\,\mathrm{cn}z),\ \int\mathrm{cn}z\,dz = \frac{i}{k}\ln(\mathrm{dn}z - ik\,\mathrm{sn}z)$$

$$\int\mathrm{dn}z\,dz = i\ln(\mathrm{cn}z - i\,\mathrm{sn}z)$$