孤子理论

（逆问题方法）

〔苏联〕 В. Е. 扎哈罗夫　С. В. 马纳科夫
С. П. 诺维科夫　Л. П. 皮达也夫斯基 著

科学出版社

孤 子 理 论

(逆问题方法)

〔苏联〕В. Е. 扎哈罗夫 С. В. 马纳科夫
С. П. 诺维科夫 Л. П. 皮达也夫斯基 著

彭启才 译

侯伯元 校

科 学 出 版 社

1 9 8 5

内 容 简 介

本书系统地阐述了目前广泛应用的逆散射问题的方法，包括所需的数学知识．全书论述精辟简明，对于深入了解孤子理论有很好的参考价值．

本书可供大专院校有关专业师生以及有关科技人员参考．

В. Е. Захаров, С. В. Манаков
С. П. Новиков, Л. П. Питаевский
ТЕОРИЯ СОЛИТОНОВ
МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
Физико-математической литературы, 1980

孤 子 理 论
（逆问题方法）

〔苏联〕 В. Е. 扎哈罗夫 С. В. 马纳科夫 С. П. 诺维科夫 Л.П.皮达也夫斯基 著

彭启才 译
侯伯元 校
责任编辑 张邦固

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1985年3月第一版 开本：787×1092 1/32
1985年3月第一次印刷 印张：10 1/4
印数：0001—3,750 字数：229,000

统一书号：13031·2850
本社书号：3980·13—3

定价： 2.40 元

序　言

最近15—20年，在物理学的不同领域内，对非线性波动过程进行了大量研究．这首先(除经典流体动力学问题外)涉及等离子体理论和非线性光学的各种问题．在非线性波动理论的发展过程中，出现了一些最简单的“典型”非线性波动方程，在某种意义上这些方程具有普适性质，就象经典的线性达朗贝尔方程那样，在各种物理现象问题中都可以遇到它们．例如熟知的 KdV 方程，非线性薛定谔方程和 sin-Gordon 方程，都属于这类方程．这些方程(至少在一维情形下)都具有突出的数学性质，它们含有一种隐蔽的代数对称性——利用对辅助线性算子的逆问题方法可导至“可积性”．本书主要论述这种数学方法和它的推广，因此，本书的宗旨是尽可能结合介绍一些关于诸如散射理论，黎曼曲面理论和哈密顿系统理论等等的必需知识，来对这一方法作基本论述．本书有一章是专门讨论大范围时间内解的渐近行为问题．在某些情况下，这一章的一些重要的定性结果也可用与散射理论无关(见第四章 §4)的类似于波戈留波夫等人的经典“平均值方法”而得到．

在引论中，我们将针对一些具体物理问题来推导出 KdV 方程和非线性薛定谔方程，以便说明它们的“普适性”．

逆散射问题方法最早见于 Gardner, Green, Kruskal 和 Miura 的论文[3]．目前关于逆问题方法已有几百篇文章，要对它们作综合评论是非常困难的．本书所引用的文献[1—26]，只不过是一些发展这种新方法的综述评论和论文集．作者认

为必须补充一些主要工作的文献，因为本书的内容就是以这些文章为依据的，它们是： 第一章的 [27—40]，第二章的 [41—51]，第三章的 [52—59，63]，第四章的 [60—62].

下面我们对重要文章 [3] 发表之前的孤子理论作一些简单的历史回顾.

孤子解(对液面长波解来说)首先由 Boussineng 在 1872 年得到. 1895 年，Korteweg-deVries 得到了 Korteweg-deVries (KdV)方程，并得到了它的周期性(极浅水 (cnoidul))波，这种波是用椭圆函数来表示的*). 在以后年代里，这些结果进一步精确化了，一直到 Лаврентьев 和 Friedrichs 严格证明了在有限深度液面上存在有孤子解；这时期的历史发展，可参阅 Stocker 写的那本非常好的书[14].

由于等离子体物理的研究，又重新引起了对孤子的兴趣. 1958 年，Сагдеев[13] 证明了孤子也可以在等离子体内传播，它完全类似于液面上的孤子. Gardner 和 Morikawa[4]确定了描述强磁场中等离子体方程和浅水波方程之间的明显类似性. 从这时开始，便得到 KdV 方程的普遍物理特性不久就明确了它可以应用到各种波动问题上(参看 Whithem 专著 [15a]). 同时在非线性光学领域内的进展(参看 Ахманов 和 Хохлов 的专著[1]以及 Бломберген 的专著[2])，导致了对三波参量相互作用问题的研究，稍后不久便得到了非线性薛定谔方程(参看 Кадомцев, Карпман 的文章[8]).

在发现逆问题方法之前，KdV 方程的数值模拟工作已经开始. 早在 1954 年，Fermi, Pasta, Ulam (见 [16]) 就用电子计算机研究非线性振子链的行为，发现了这种动力系统有反常慢的随机性质. 1964 年，Kruskal 和 Zabusky (见 [3])

*) 实际上，这种波可写成椭圆函数 Cn^2 的形式，故也可叫 Cn^2 状波，但以下通译成"极浅水波"——译注.

用数字模拟方法，发现了 KdV 孤子之间的碰撞是弹性碰撞．这个结果推动了新的解析研究． 不久发现了无穷多守恒律，最后，在 1967 年，这种发展导致发现逆散射问题方法[3]．

接着由于以下工作，这种方法得到了进一步发展：在文章[3] 工作的基础上很快揭开了代数机制 (P. Lax 1968)， 然后又把 KdV 方程构成哈密顿体系（C.S. Gardner, B.E.Захров, Л.Д.Фаддеев, 1971）． 70 年代初发现了其它一些能用逆问题方法进行积分的重要非线性方程，其中包括非线性薛定谔方程，sin-Gordon 方程等等． 寻找周期性解的程序，要求深入地利用哈密顿形式，并引入代数几何方法，因此到 1974—75 年才发现，甚至对 KdV 方程也是如此．文章[6]概括了这时期的进展．最近几年的发展方向是：1)发现了用逆问题方法(或它的推广)来积分的新的重要物理系统；2) 为了求解，发展了散射理论和代数几何方法；3) 建立和研究了能保持准确可积的相对论不变的量子模型．

作者认为，目前所积累的精确解的知识，还很少用来计算具体的物理效应．我们希望本书介绍的全部必要技术，将会促进这种方法的广泛应用． 毫无疑问，这种方法乃是二十世纪数学物理方面最新奇的发现之一．

作　者

目　录

引论　弱非线性和色散

众所周知，在各种极不相同的均匀介质中，范围广泛的一类波动过程可用下列波动方程来描述：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

它描述以恒定速度 u_0 传播的非衰减波. 导出这个方程利用了三种基本情况：首先，不存在耗散，这表示方程 (1) 相对于时间反演，即作 $t \to -t$ 代换是不变的. 其次，振动的振幅应当足够小，在这种情况下，对振动量 ψ 的非线性项很小，以致可以忽略。最后，在所研究的长波范围内应当不存在色散，即传播速度不依赖于频率和波长. 通常(我们将首先考虑这种情况)这相当于波长充分长的极限情况.

我们要再次强调方程 (1) 的普适性，这种方程的形式与具体介质性质无关；介质性质仅影响速度值 u_0. 如果不忽略耗散、非线性和色散，这种普适性自然也就消失了. 每种介质将用各自特定的方程系统来描述. 但如果不完全忽略上面所指出的效应，而只是认为它们很小，那么对许多现象，可以重新得到形式相同的方程.

Korteweg-deVries 方程. 首先产生的问题是，这些小修正是否会导致一些新的定性效应. 否则，这些小修正就完全没有意义了. 不过很容易理解，如果过程持继时间足够长，那么上面所指出的全部效应可使解发生本质的改变. 实际上，即使是很小的能量耗散，经过足够长时间，也会导致波的衰减. 色散导致波包散开，经过足够长时间，同样会使解变形，

以致模糊不清． 至于非线性效应，会导致解的“波阵面的卷缩”——这种效应同样是绝非小可的．

现在我们的目的在于得到一个近似方程，它能正确地描述这些“小修正的大效应”． 这里我们仅限于讨论保守系统，仍同前面一样，这意味着完全忽略耗散．

方程 (1) 的解可表为两个运动方向相反的行波之和：

$$\psi = \psi_1(x - u_0 t) + \psi_2(x + u_0 t). \tag{2}$$

不难证明，当考虑的非线性和色散很小时，则可把两个方向的行波都看作是独立的．其物理原因是这两个波彼此相对运动足够快，以致“修正的积累”来不及发生．这一点可使问题大大简化．(2)中的每一个行波都满足一阶方程，其中沿 x 轴正向运动的行波满足方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + u_0\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

这样，我们还需要求出对这个方程的修正．

确定与色散有关的修正是最简单的．设在我们的介质中线性波的精确色散律为

$$\omega = k u(k). \tag{4}$$

当 $k \to 0$ 时，速度 u 应趋于 u_0．在一般情况下，$u(k)$ 是按 k 的幂次展开的解析函数．容易理解，在不存在耗散情况下，它是按 k^2 的幂次展开的．实际上，色散律 (4) 是以某个实系数的线性微分方程系统得到的．因此这种系统的解可以表示为 $i\omega$ 依赖于 ik 的形式，其系数是实数． 为使 (4) 中的 ω 是实的(这表示无耗散)，u 必须按 ik 的偶次幂展开．

考虑到上述理由，当 k 很小时，仅顾及到一阶修正，函数 $\omega(k)$ 可写成：

$$\omega = u_0 k - \beta k^3. \tag{5}$$

立即看出，为了得到正确的色散律 (5)，对 (3) 式必须加上三

阶导数项：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}=0. \tag{6}$$

现在着手研究非线性．如果考虑到我们这里所研究的是保守系统，那么全部作法就方便得多了，因为保守系统总是存在某些量的精确守恒律．（实际上所谈的可以是粒子数守恒）．从这些守恒律中写出其中的一个：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0. \tag{7}$$

（即然在线性近似中所有振动量都满足同一波动方程，因此总可以认为方程（1）正好描述守恒量ψ的扰动．）问题在于，如何用ψ来近似表示流j．从（7）与（6）中看到，在ψ的线性近似下，$j=u_0\psi+\beta\partial^2\psi/\partial x^2$．在进一步近似下会出现$\psi$的平方项：

$$j=u_0\psi+\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{2}\psi^2,$$

其中α是常数．结果我们得到只考虑保留一阶修正的待求方程：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\alpha\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{8}$$

现在作变量代换

$$\xi=x-u_0t,\quad \psi=\frac{\beta}{\alpha}\eta.$$

于是方程归结为标准的 KdV 方程：

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi^3}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi}=0. \tag{8a}$$

为了避免误解，我们提醒一下，当不存在色散项和非线性项的特殊关系时，以上论述应囊括最普遍的情形．但可能有这样的情形，由于存在对称性，结果使j按ψ的展开式中可能只

有奇次项，这时在 (8a) 中出现非线性项 $\eta^2 \frac{\partial\eta}{\partial\xi}$，甚至 $j(\phi)$ 可能是更复杂的非解析关系. 上述推导 KdV 方程的过程在实际问题讨论中是很方便的，因为这可以独立地确定系数 α 和 β.

下面举几个例子来说明这种情况. 首先我们确定介质的流体动力学中的系数 α，该介质的状态方程是多方指数形式: $P = C\rho^\gamma$. (对比热为常数的理想气体绝热运动情形 γ 值等于定压比热与定容比热之比 C_p/C_v)作为 ϕ 可选密度变化 ρ'($\rho = \rho_0 + \rho'$，其中 ρ_0 是未扰动密度). 这时方程 (7) 相当于连续方程:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

该方程应补充上尤拉方程

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{10}$$

准确到二阶项，p 与 ρ' 之间的关系可写成 $p - p_0 = u_0^2\left(\rho' + \frac{\gamma-1}{2\rho_0}\rho'^2\right)$，其中 $u_0 = (dp/d\rho)^{1/2}$ 为"未扰动"波速. 因此方程组 (9)，(10) 可表示为

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho' x)}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x} = -\frac{u_0^2(\gamma-1)}{2\rho_0^2}\frac{\partial\rho'^2}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}.$$

(准确到二阶项.)从上两个方程中消去 v，为此把第一个方程对 t 微商，而通过第二个方求出 $\partial v/\partial t$，我们得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho'$$

$$= -\frac{\partial^2(\rho' v)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{u_0^2(\gamma-1)}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial x^2}. \quad (12)$$

现在对 (12) 式的左边可作相当准确的代换:

$$\frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \simeq -2u_0 \frac{\partial}{\partial x},$$

而 (12) 式右边假定 $\frac{\partial}{\partial t} \simeq -u_0 \frac{\partial}{\partial x}$ 及 $v \simeq \frac{u_0}{\rho_0}\rho'$. (后一近似等式可以从前者和(11)中任何一个方程中得到.)把方程左右两边的符号 $\frac{\partial}{\partial x}$ 去掉后,我们得到 α 值:

$$\alpha = \frac{\gamma+1}{2\rho_0}u_0. \quad (13)$$

当 $T_e \gg T_i$ 时,我们把所得到的结果应用到无碰撞等离子体中的离子-声波这一重要情况. 在这种情况下,忽略离子速度的热散射,对离子可利用流体动力学方程:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{Ze}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (14)$$

(M 是离子的质量). 而电子可按玻耳兹曼分布:

$$n_e = Zn_0 e^{e\varphi/T_e}$$

(n_0 为离子的平衡密度),因此位能 φ 的泊松方程为

$$\Delta\varphi = -4\pi e(Zn_i - Zn_0 e^{e\varphi/T_e}). \quad (15)$$

为了确定系数 α, 我们忽略了色散,这相当于略去 (15) 中的二阶导数项. 于是代替 (15) 得到准中性条件

$$\frac{e\varphi}{T_e} = \ln\frac{n}{n_0}.$$

从此式得出的 $e\varphi$ 代入 (14) 中,我们得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{ZT_e}{M}\frac{\nabla n_i}{n_i}. \quad (16)$$

这就是流体动力学方程,声速 $u_0 = \sqrt{ZT_e/M}$,多方指数 $\gamma =$

1. 因此对这种情况

$$\alpha = \frac{u_0}{Mn_0} = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}}\frac{1}{Mn_0} \tag{17}$$

为了确定系数 β，我们把方程 (14) 线性化，而把所有量都认为 $\sim e^{i(kx-\omega t)}$：

$$-i\omega v = -ikZe\varphi/M,$$

利用泊松方程

$$\left(\frac{4\pi Zn_0e^2}{T_e} + k^2\right)\varphi = 4\pi Zen_i'$$

和连续性方程

$$-i\omega n_i' + ikn_0v = 0.$$

使上面方程组行列式等于零，我们便求出色散律

$$\omega = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}}k(1 + k^2D^2)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}}k - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ZT_e}{M}}k^3D^2,$$

其中 $D = \sqrt{T_e/(4\pi Zn_0e^2)}$ 是等离子体中电子的德拜屏蔽半径. 因此，我们确定了方程 (8) 在这种情况下的第二个系数：

$$\beta = 1/2D^2\sqrt{ZT_e/M}. \tag{18}$$

应用 KdV 方程的经典例子乃是波在浅水中传播问题. (Korteweg 和 de Vries 在 1895 年正是就这个问题得出了这个方程.) 首先考虑求系数 α，因此我们写出长波极限情形下的方程 ($k \to 0$). 设 h 为流体振动层的厚度. 当认为液体是不可压缩时及考虑到浅水层液体实际上顺着表面流动，我们写出连续性方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0. \tag{19}$$

而速度方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{20}$$

因为随着 h 的改变，液体势能改变量为 $dU = g\rho dh$.

因而，如果把 h 看作密度，而压力等于 $gh^2/2$，那么方程组 (19)，(20) 形式上又同流体动力学方程组一致．于是

$$u_0 = \sqrt{gh_0}, \quad \nu = 2, \tag{21}$$

因此在 h' 的方程中

$$\alpha = 3/2\sqrt{g/h_0}.$$

为了确定系数 β，需解厚度为 h_0 的液层中以有限波长振动的线性化问题．对这种情况，(参看[14])色散律为

$$\omega \simeq \sqrt{gh_0}\,[k - 1/2(kh_0)^2].$$

因此，在这种情况下

$$\beta = 1/2\sqrt{gh_0}\,h_0^2. \tag{22}$$

非线性薛定谔方程．一般来讲，在上面讨论波的传播方程中，其非线性项同流体动力学中的非线性项有着共同的特点，二者都是用同一时刻的振动量及其导数来表示的．因此可以说，这些非线性项具有“定域”性质．倘若初始扰动为关于时间的谐波，那么这种类型的非线性项便触发高频波的迅速出现，从而使初始谐波轮廓变形．

不过，还存在另外一种类型的非线性．例如，研究电子等离子体振荡.(这个例子下面将作定量研究，这里我们感兴趣的只是现象的一般特点.) 这些振荡以电子等离子体频率 $\omega_0 = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$ 进行．离子由于本身质量很大，实际上将不参与这种振荡.但由于要保持电中性，这样离子密度应等于电子密度，因此电子就不能有频率量级为 ω_0 这样大的振动分量.然而，这不妨碍等离子体密度会发生变化，因为场施加在等离子体上的按时间平均的作用力会引起等离子体密度改变.这样.在一阶近似下与时间无关的扰动将由依赖于场的量的时间平均值来确定.在与谐波区别不大的弱场中，这意味着色散律依

赖于 $|\psi_0|^2$，其中 ψ_0 在这里表示场 $\psi=\psi_0\exp[i(kx-\omega t)]$ 的复数振幅．在加热介质时，容易产生这种类型的非线性，因为当 $\omega\gg\nu$ 时（ν 为有效碰撞数），温度跟不上场的振动，而是由振动场的平均值来确定它．

不难得到与谐波差别不大的这类场（考虑到这种场的弱非线性修正）的方程．假设这类场取为

$$\psi=\psi_0 e^{i(k_0x-\omega_0t)},\tag{23}$$

式中 ψ_0 是时空的慢变函数．于是，在场的谱展开中，波矢将仅在 k_0 附近．因此，色散方程 $\omega=\omega(k)$ 的右边可按 $k-k^0$ 的幂次展开：

$$\omega=\omega(k_0)+u_0(k-k_0)+\beta(k-k_0)^2.\tag{24}$$

对应这种色散律的线性方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\omega_0\psi+u_0\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}-k_0\right)\psi+\beta\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}-k_0\right)^2\psi.\tag{25}$$

如果把形如 (23) 的场代入到 (25)，便得到 ψ_0 的方程

$$i\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)=-\beta\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}.$$

我们还没有考虑非线性．照上所述，非线性归结于同 $|\psi_0|$ 有关的色散律．在一阶近似下，可只考虑关系式 $\omega(k_0)$，并且修正量级只取到 $|\psi_0|^2$：

$$\omega(k_0)=\omega_0+\alpha|\psi|^2.$$

联立这些方程，我们得到

$$i\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)=-\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\alpha|\psi_0|^2\psi_0.\tag{26}$$

此方程右边包括色散和非线性修正．如果忽略右边，该方程描述群速度为 $u_0=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k=k_0}$ 的波包传播．