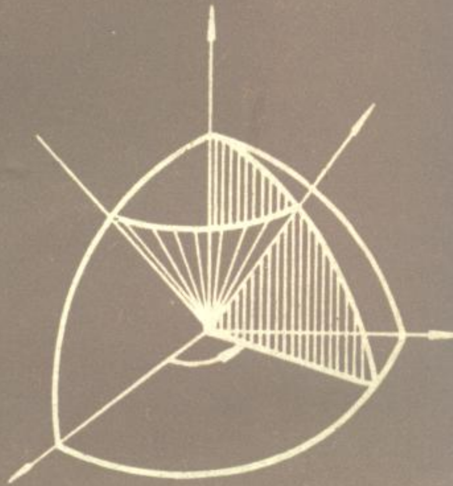
张量分析及其应用

ZHANG LIANG
FENXI JIQI
YENG YUENG

李开泰　黄艾香



西安交通大学出版社

张量分析及其应用

李开泰　　黄文香

西安交通大学出版社

内　容　提　要

本书简要地叙述了仿射空间和欧氏空间中张量代数，张量微分学，曲面上张量分析，曲面论以及张量在物理学、力学中的应用。还介绍了作者将张量应用到一些工程问题中的研究成果。

本书可作为高等院校理工科研究生、应用数学、计算数学、应用力学等专业本科生的教科书，也可作为理工科高等院校教师和有关科技人员的参考书。

张量分析及其应用

李开泰　黄艾香

西安交通大学出版社出版
（西安市咸宁路28号）
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店发行·各地新华书店经售

开本 787×1092　1/32　印张 7.5　字数 158 千字
1984年11月第一版　1985年11月第二次印刷
印数 5,001－10,000
统一书号 13340·014　定价 1.65元

前　言

自然界变化和运动是有规律的，认识这些规律是自然科学的任务．而用数量来描述这些规律时，往往需要引入坐标系，只有这样，才能把数学带到自然科学中去．然而，不幸的是，本来与坐标系选择无关的自然规律，它的数学表述形式不得不与坐标系的选择夹杂在一起，而使人对其物理实质不易辨认．张量的引入，则恰是力图既采用坐标系又摆脱具体坐标系影响的一种尝试．使用张量，可以简化推导，使演算过程清晰，表达整齐统一，用张量来描述物理定律或几何定理，所得的结果，在任何坐标系下具有不变形式，这就给研究工作带来了极大的方便．张量作为描述物理或几何的具体对象，它充分反映了这些现象的物理和几何属性，是这些现象的一种数学抽象．它在分析力学、固体力学、流体力学、几何学、电磁场理论和相对论等方面有着广泛的应用．

近年来欧美国家也愈来愈重视张量分析的运用．在美国，不仅科学界，而且工程界都掀起了学习和应用张量的热潮．有人这样形容："现在工程师学张量分析如同三十年代学矩阵一样热烈．"我们不应该忘记，正由于矩阵代数在工程中的应用，导致了五十年代有限元方法的产生．

本书的第一章，是 n 维仿射空间和三维欧氏空间中的张量和张量代数，其中包括了伪欧氏空间；第二章是张量分析；第三章是曲面上的张量和曲面论，内容包括 Riemann 空

间中的张量分析，曲面上混合张量分析和在实践上有很大意义的S一族坐标系；第四章主要叙述应用，内容包括张量在经典力学、连续介质力学、电磁场理论和相对论上的应用。还介绍了作者将张量应用到一些工程问题中的技巧．例如，透平机械内部流动、轴承润滑和壳体理论等．

本书的特点是，充分运用局部仿射标架和共轭标架以及行列式张量的特性，尤其是引入了S一族坐标系，使得在解决透平机械内部流动、润滑理论的广义雷诺方程和壳体理论等问题上，从某个侧面展示了如何灵活运用张量，使数学模型更简洁更深刻地反映客观实际，这也体现了本书的宗旨：基本理论和实际应用并重．

本书曾在我校研究生、计算数学专业及应用力学专业讲授过多次，并根据教学过程中使用的情况作了反复的修改．

在编写和使用这本书的过程中，得到了许多同志的关心与帮助．游兆永、吴寿锽和张自立等老师仔细地校阅并提出了宝贵的意见，作者在此表示衷心地感谢．

作　　者

1983.12 于西安交通大学

目　　录

第一章　张量及其代数运算

第二章　张量分析

第三章 曲面张量和曲面论

第四章 张量在物理和力学中的应用

第一章　张量及其代数运算

这一章的内容，是介绍n维仿射空间中的张量概念及其代数结构，特别是作为仿射空间特例的欧氏空间中的张量及其代数结构。

在此，我们不是从欧氏性质中选出仿射性质来建立仿射空间基本结构，而是采用一组独立的公理体系，利用它们导出所有的仿射性质．从而建立任意n维仿射空间的代数结构，而欧氏空间只是作为仿射空间的特例而被引进的。

不应当把公理体系看作特别有原则性的、深奥的内容，这里仅仅是用它来说明，在n维仿射空间中，基本上类同于向量代数，仅运用了点和向量的概念。

§1.1　仿射空间

在仿射空间里，点和向量是基本概念，无需用逻辑方法再定义．当然，这不是说点和向量没有实在的内容，而是把它们的性质作为公理使用。在运用时，例如向量可理解为速度或力等。

考察一个点和向量的集合，它满足以下公理：

1)　至少存在一个点。

2)　任意给定一对有顺序的点A和B，对应一个且仅对应一个向量，通常记此向量为$\boldsymbol{AB}$．向量也可记为$\boldsymbol{x}$或$\boldsymbol{a}$等．

3） 对任一点 A 及任一向量 $\boldsymbol{x}$，存在唯一的点 B，使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{x}$$

4） （平行四边形公理）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CD}$，则 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BD}$。

在一定意义下，公理 1）～4）足以建立向量间的加法、减法等。

定义 1°向量 $\boldsymbol{AA}$ 称为零向量，并记作 0。

2°向量 $\boldsymbol{BA}$ 称为向量 $\boldsymbol{AB}$ 的逆向量，$\boldsymbol{x}$ 的逆向量记为 $-\boldsymbol{x}$。

显然，对任一点 M，有唯一的方法作向量 $\boldsymbol{MM}$，使 $\boldsymbol{MM}=0$。并且，任一向量 $\boldsymbol{x}$，存在唯一的逆向量 $-\boldsymbol{x}$。

定义 设在一定顺序下给定了向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$. 任选一点 A，从 A 作向量 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{x}$，再从点 B 作向量 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{y}$. 则点 A 和点 C 决定一个向量 $\boldsymbol{AC}$，称它为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$。

显然，向量 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 不依赖于点 A 的选择. 加法是一单值运算，并且有如下性质：

1° 向量的加法满足交换律 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

2° 向量的加法满足结合律 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

3° $\boldsymbol{x}+0=\boldsymbol{x}$

4° $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=0$

定义 对于向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，若存在向量 $\boldsymbol{z}$，使得

$$\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$$

则称向量 $\boldsymbol{z}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的差。记为 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$。

由以上讨论可知，向量的加法具有与普通向量代数中一样的全部有关加法性质。但是，仅有以上 4 个公理，还不能建立完备的系统。以下公理是建立向量和数量的乘法运算。

5） 对于任一向量 $\boldsymbol{x}$ 和任一数 α，存在唯一向量与之对

应．称此向量为 $\boldsymbol{x}$ 与 α 的乘积．记为 $\alpha\boldsymbol{x}$。

6）$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

7）$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$

8）$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$

9）$\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$

在公理 7)—9)中，α、β 均表示数．不难推出

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\qquad \alpha\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}(\alpha\text{ 为任意数})$$

根据以上讨论可知，对向量可以按通常法则施行加法和向量与数的乘法运算。

再引进一个公理，即维数公理。为此

定义 任给定 m 个向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_m$，如果存在 m 个不完全为零的数 α_1，α_2，…，α_m，使得

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，则称 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_m$ 是线性相关的，否则称 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_m$ 是线性独立的．

当诸向量线性相关时，其中至少有一向量可由其余向量线性表示，反之，若有某个向量能由其余向量线性表示，则这些向量必线性相关。

10）（维数公理）存在 n 个线性独立的向量，但任意 $n+1$ 个向量是线性相关的。

称满足公理 1)－10) 的点和向量的集合为 n 维仿射空间．

当 $n=0$ 时，这个集合只有一个点和一个向量 $\boldsymbol{0}$。一般我们不讨论这种情形，故总是假设 $n>0$。

仿射空间是点和向量的集合，而这些点和向量必须满足上述 10 个公理。有了这两个基本概念和 10 个公理，就可以

建立起仿射空间的全部几何学，它是张量代数和张量分析的基础。

§1.2 仿射坐标系

这一节的目的在于研究 n 维仿射空间中通常的坐标系，这种坐标系与空间的几何性质有关。根据维数公理，在这个空间中存在 n 个线性独立的向量，设为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$，那么仿射空间中任一向量 $\boldsymbol{x}$，由于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性相关，有

$$\alpha\boldsymbol{x}+\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n=0$$

显然，$\alpha\neq0$。若不然，则 $\alpha=0$ 而 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性相关，这与原来假设矛盾。因此有

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e}_1-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n$$

或表示成

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n \tag{1.2.1}$$

(1.2.1)说明，n 维仿射空间中任一向量，可以由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$ 这 n 个独立向量线性表示。我们说，任意一点 O 和 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 组成一个仿射标架。由(1.2.1)可知，任一向量 $\boldsymbol{x}$，可按仿射标架展开，其中系数 x^i 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 关于已知标架的仿射坐标。

值得注意的是，仿射标架的选择有无限多种可能，而任意向量 $\boldsymbol{x}$ 按确定的仿射标架展开，其系数是唯一确定的。实际上，如果

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n=\tilde{x}^1\boldsymbol{e}_1+\tilde{x}^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\tilde{x}^n\boldsymbol{e}_n$$

于是有

$$(x^1-\widetilde{x}^1)\boldsymbol{e}_1+(x^2-x^2)\boldsymbol{e}_2+\cdots+(x^n-x^n)\boldsymbol{e}_n=0$$

由 $\boldsymbol{e}_i$ 线性独立推出 $x^i-x^i=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,n)$. 反之，任意 n 个数 x^1, x^2, $\cdots$, x^n, 可按(1.2.1)组成一个向量。

所以，对于确定的仿射标架，向量 $\boldsymbol{x}$ 和它的坐标 $\{x^i\}$ 之间存在着一一对应的关系. 特别是，零向量对应的仿射坐标全等于零。

运用向量坐标后，向量代数运算可以转化为它们坐标的代数运算. 例如向量 $\boldsymbol{x}$ 及 $\boldsymbol{y}$ 的和

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n,$$

$$\boldsymbol{y}=y^1\boldsymbol{e}_1+y^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+y^n\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x^1+y^1)\boldsymbol{e}_1+(x^2+y^2)\boldsymbol{e}_2+\cdots+(x^n+y^n)\boldsymbol{e}_n$$

即两个向量之和的坐标，等于这些向量所对应的坐标相加。而数与向量的数乘运算，就是向量的每个坐标乘上这个数

$$\alpha\boldsymbol{x}=\alpha x^1\boldsymbol{e}_1+\alpha x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\alpha x^n\boldsymbol{e}_n$$

设有 m 个向量为

$$\boldsymbol{x}_1=x_1^1\boldsymbol{e}_1+x_1^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_1^n\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{x}_2=x_2^1\boldsymbol{e}_1+x_2^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_2^n\boldsymbol{e}_n$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$\boldsymbol{x}_m=x_m^1\boldsymbol{e}_1+x_m^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_m^n\boldsymbol{e}_n$$

它们的线性组合为

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标为

$$x^i=\alpha_1x_1^i+\alpha_2x_2^i+\cdots+\alpha_mx_m^i,\quad i=1,2,\cdots,n \qquad (1.2.2)$$

它恰是下列矩阵

$$
\begin{bmatrix}
x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\
\cdots & & \cdots & \\
x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^n
\end{bmatrix}
\tag{1.2.3}
$$

中各行的线性组合。

如果 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_m$ 是线性相关的，那么必定可以找到一组不完全为零的数 α_1, α_2, $\cdots$, α_m，使 $\boldsymbol{x}$ 为零向量，即 $\boldsymbol{x}$ 的坐标 $x^i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，于是可得矩阵(1.2.3)的各列是线性相关的。矩阵 (1.2.3) 各列线性相关不但是使向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_m$ 线性相关的必要条件，也是充分条件。

以上讨论了向量的坐标表示法，至于点的坐标表示法，是建立在向量坐标表示法之上的。实际上，令M为仿射空间内任一点，与这个点唯一对应的有一个向量 $\boldsymbol{OM}$, O 是标架原点，$\boldsymbol{OM}$ 称为已知点的向径，$\boldsymbol{OM}$ 关于仿射标架 $\boldsymbol{e}_i$ 的坐标$\{x^i\}$

$$
\boldsymbol{OM}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n \tag{1.2.4}
$$

称为点M关于这个标架的仿射坐标。

因此，若已知一个点，则按 (1.2.4) 可以唯一确定它的仿射坐标。反之，若已知一组坐标，则可按 (1.2.4) 从原点出发作出这一向量，而唯一决定一点M。

综上所述，给出一个标架，就可以建立坐标与向量，坐标与点之间的一一对应。

注意，今后我们总是不加声明地使用 Einstein 求和约定：如果一个表达式包含有相同的上、下指标，则表示这个指标跑过 $1,2,\cdots,n$ 诸值，而后将这些同类表达式相加而得到的总和。如果上下指标相同的有好几对，则表示对每一对

上下指标做上述求和。

例如，(1.2.1)式可以表示为

$$\boldsymbol{x}=x^i\boldsymbol{e}_i$$

又如表达式 Φ^{ik}_{ikl} 的意义为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^{ik}_{ikl} \qquad (1.2.5)$$

上下相同的指标是求和指标，也称哑指标，而其余的指标称为自由指标。例如 Φ^{ik}_{ikl} 中，i，k 为求和指标，l 为自由指标。这里特别要指出的是，求和指标的记号是无关紧要的。例如 Φ^{ik}_{ikl} 中，求和指标 i，k 用 p，q 代替其结果不变。即

$$\Phi^{ik}_{ikl}=\Phi^{pq}_{pql}$$

上述关于求和约定，在今后的演算中经常使用.

§1.3 仿射标架变换

很自然地会产生这样一个问题：对仿射标架的选择可以任意到怎样的程度？当从一个标架变换到另一个标架时，会产生怎样的问题？这一节我们将研究关于标架变换问题。在这里，由于原点的选择是无关紧要的，故我们只对标架向量 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 感兴趣.

标架变换 设 $\boldsymbol{e}_{i'}(i'=1,2,\cdots,n)$ 为另一仿射标架，那么它们可以用旧标架 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 线性表示

$$\boldsymbol{e}_{i'}=A^i_{i'}\boldsymbol{e}_i \qquad i'=1,2,\cdots,n \qquad (1.3.1)$$

众所周知，$\boldsymbol{e}_{i'}$ 线性独立的充要条件是(1.3.1)的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1^{1'}, & A_1^{2'}, & \cdots & A_1^{n'} \\ A_2^{1'}, & A_2^{2'}, & \cdots & A_2^{n'} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_n^{1'}, & A_n^{2'}, & \cdots & A_n^{n'} \end{bmatrix} \tag{1.3.2}$$

是非奇异的，即

$$\det(A_{i'}^{i}) \neq 0 \tag{1.3.3}$$

另一方面，旧标架 e_i 也可用新标架 $e_{i'}$ 线性表示

$$e_i = A_i^{i'} e_{i'} \tag{1.3.4}$$

矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_1^{2'} & \cdots & A_1^{n'} \\ A_2^{1'} & A_2^{2'} & \cdots & A_2^{n'} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_n^{1'} & A_n^{2'} & \cdots & A_n^{n'} \end{bmatrix} \tag{1.3.5}$$

和矩阵(1.3.2)是互逆的。即

$$A_{i'}^{i} A_{i}^{j'} = \delta_{i'}^{j'}, \quad A_{i}^{i'} A_{i'}^{j} = \delta_{i}^{j} \tag{1.3.6}$$

实际上，将式(1.3.1)代入(1.3.4)式得

$$e_i = A_i^{i'} A_{i'}^{j} e_j$$

由 e_i 是线性独立的，可得(1.3.6)第二式。若将(1.3.4)代入(1.3.1)得

$$e_{i'} = A_{i'}^{i} A_{i}^{j'} e_{j'}$$

由 $e_{i'}$ 是线性独立的，可得(1.3.6)第一式。

坐标变换 设任一向量 x，在新标架中坐标为 $x^{i'}$ ($i'=1,2,\cdots,n$)，在旧标架中坐标为 x^i($i=1,2,\cdots,n$)

$$x = x^i e_i \quad x = x^{i'} e_{i'} \tag{1.3.7}$$

以(1.3.4)代入(1.3.7)第一式得

$$\boldsymbol{x}=x^i A_i^{i'} \boldsymbol{e}_{i'}$$

与 (1.3.7) 第二式比较，由于在相同标架中坐标的唯一性可得

$$x^{i'}=A_i^{i'} x^i \tag{1.3.8}$$

类似可得

$$x^i=A_{i'}^i x^{i'} \tag{1.3.9}$$

比较一下标架向量的变换规律与给定向量的坐标变换规律，将对我们的研究是很重要的。

实际上，(1.3.8)的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & \cdots & A_n^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & \cdots & A_n^{2'} \\ \cdots & & \cdots & \\ A_1^{n'} & A_2^{n'} & \cdots & A_n^{n'} \end{bmatrix} \tag{1.3.10}$$

它是(1.3.5)的转置矩阵，而(1.3.5) 是 (1.3.2)的逆矩阵，故知向量坐标变换矩阵是标架变换矩阵的转置逆矩阵。

从旧标架变换到新标架，标架向量的变换公式及任一向量的坐标变换的公式分别是

$$\boldsymbol{e}_{i'}=A_{i'}^i \boldsymbol{e}_i \qquad x^{i'}=A_i^{i'} x^i$$

它们是张量变换的基础。

点的变换稍有不同，设标架原点沿着一个向量 $\boldsymbol{a}$ 移动，那么一切点M之向径由此而增加一个向量$-\boldsymbol{a}$，因此M点的坐标变换公式为

$$x^{i'}=A_i^{i'} x^i+A^{i'}$$

其中 $A^{i'}$ 为$-\boldsymbol{a}$ 之坐标。

§1.4 张量概念

张量概念的引入 在使用代数和分析的方法来研究几何或物理对象时，必须引进坐标系，其结果导致代数上、分析上所发展的强有力的工具能够应用到几何学和物理学中去。可是，由于坐标选择带有一定的任意性，它可以与所研究的几何或物理现象全无联系，因而这种选择的任意性，不仅反映我们所研究的问题，同时也可能使得问题复杂化。也就是说，我们由此得到的解析资料，同时带来了许多我们不需要，并且可能使问题复杂化的东西。

如在欧氏空间 E_3 中引入 Descartes 直角坐标系．考察联接点 $M_1(1,-2,3)$ 和点 $M_2(2,-2,5)$ 的向量，此向量具有坐标 $(1,0,2)$，这里第 2 个坐标为零是偶然的，它依赖于坐标系的选择，而 $\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$ 却与坐标的选择无关。就第二个坐标为零而言，它没有几何、物理意义，．而 $\sqrt{5}$ 是有明确的几何、物理意义的，它是向量的长度。因此，我们希望能使几何学、物理学上确实重要的部分与由坐标的选择额外产生的部分分开。

张量的引入以及由此而建立的结构，就是为了解决以上提出的问题。用张量来描述物理定律和几何定理，所得到的结果，在任何坐标系下都具有不变形式。也就是说，这些关系所反映的几何和物理事实与坐标选择无关，因而消除了由于偶然选择坐标系所带来的影响。

协变张量 首先研究一阶协变张量，它由一个向量的线性数量函数很自然地产生。