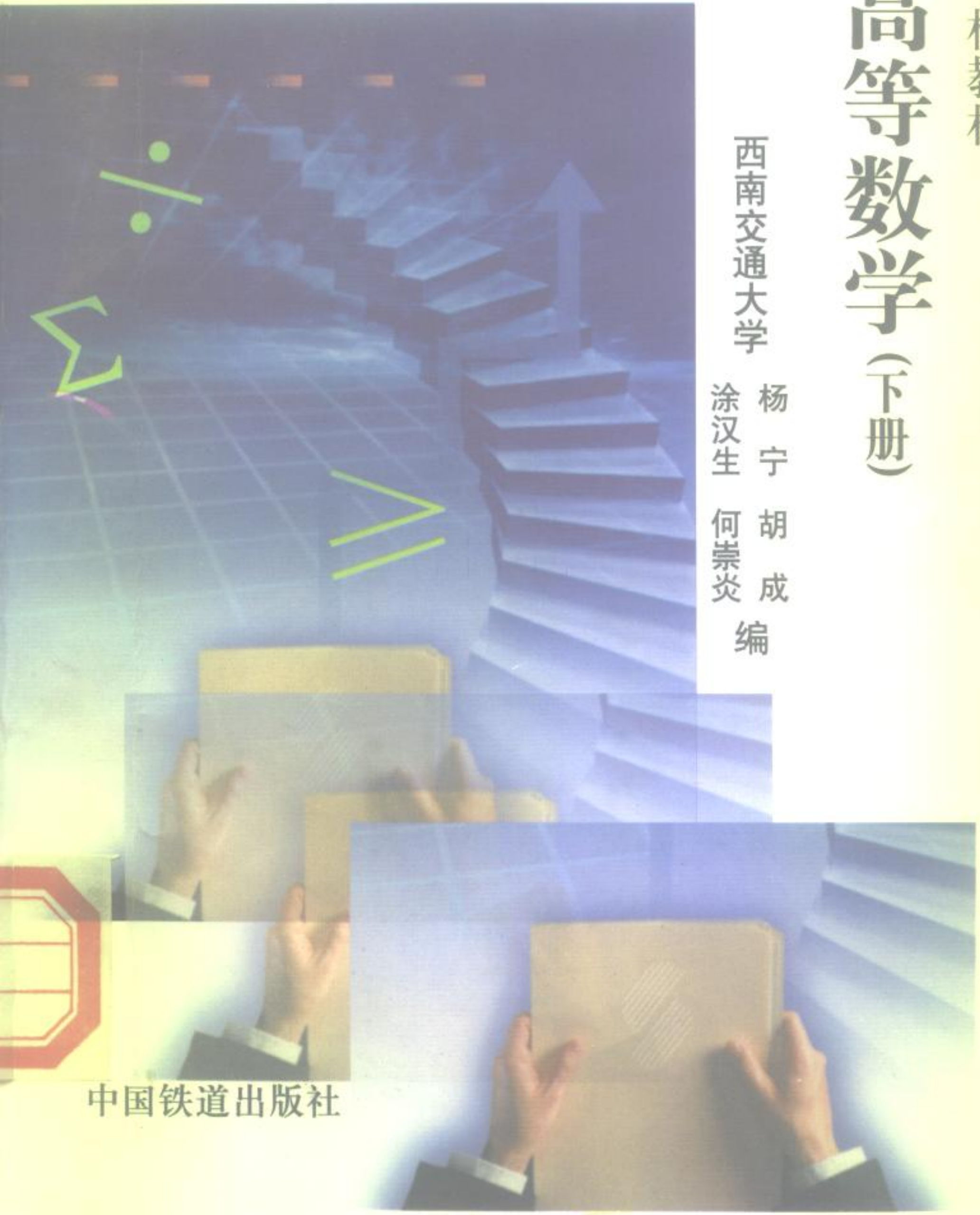
高等学校教材

高等数学 (下册)

西南交通大学

杨宁 胡成 涂汉生 何崇炎 编



中国铁道出版社

高 等 学 校 教 材

高等数学（下册）

西南交通大学 杨　宁　胡　成
涂汉生　何崇炎 编

西南交通大学 黄盛清 主审

中 国 铁 道 出 版 社

1999年·北京

（京）新登字063号

内 容 简 介

本书是在西南交通大学黄盛清主编的《高等数学》（上、下册）教材的基础上，结合近年来的教学实践，在保持原书主要特色的原则下，根据高等数学课程教学基本要求，重新编写的。

本书分上、下两册。本书为下册，内容包括微分方程、多元函数微分学、重积分、线面积分、级数等。本书附有习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　下册/杨宁等编，-北京：中国铁道出版社，1999.12
高等学校教材
ISBN 7-113-03464-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第39803号

书　　名：高等学校教材
　　　　　高等数学（下册）
作　　者：西南交通大学　杨　宁　胡　成　涂汉生　何崇炎
出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街8号）
责任编辑：程东海
封面设计：马　利
印　　刷：北京彩桥印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　印张：10　字数：260千
版　　本：1999年12月第1版　1999年12月第1次印刷
印　　数：1～8000册
书　　号：ISBN 7-113-03464-0/O・72
定　　价：15.80元

目　　录

第七章 微分方程

寻求变量之间的函数关系是数学中一个很重要的课题。但在实际问题中,往往不容易直接找出所需要的函数关系。然而根据具体问题的实际背景和数学分析的方法,有时却比较容易地建立起含有自变量、待求函数及其导数(或微分)之间的关系式。这种联系着自变量、未知函数及它的导数的关系式就是所谓的“微分方程”。再对微分方程进行研究,求出未知函数,就是“解微分方程”。本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法。

第一节 基本概念

为说明微分方程的基本概念,我们先看下面两个简单的例子。

一、引　　例

例 7-1 已知一曲线过点(1,2),且在该曲线上点 $M(x,y)$处的切线斜率为 $2x$,求此曲线的方程。

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$,根据导数的几何意义,$y=y(x)$应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{1}$$

因为所求曲线过点(1,2),所以 $y(x)$还应满足条件

$$y|_{x=1}=2 \tag{2}$$

对(1)式两边积分得

$$y=\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+c \tag{3}$$

其中 c 为任意常数。

将条件(2)代入(3)式,求得 $c=1$。

故所求曲线方程为

$$y=x^2+1 \tag{4}$$

例 7-2 (自由落体)一质量为 m 的物体在重力作用下下落。已知物体下落($t=0$)时的初始位置为 s_0,初始速度为 v_0,若不计空气阻力,求物体下落时路程随时间的变化规律。

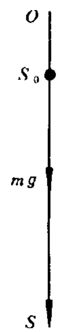


图 7-1

解 取坐标系如图 7-1 所示。设物体的运动规律为 $s=s(t)$,由 Newton(牛顿)第二定律知 $s=s(t)$应满足关系式

$$F=m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$$

现在 $F=mg$(g 为重力加速度),所以

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g \tag{5}$$

此外,$s(t)$还应满足条件

$$s|_{t=0}=s_0,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=v_0 \tag{6}$$

将(5)式积分一次得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+c_1 \tag{7}$$

再积分一次得

$$s=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2 \tag{8}$$

其中 c_1、c_2 都是任意常数。

将条件(6)分别代入(7)、(8)两式可求得

$$c_1=v_0,c_2=s_0$$

故所求的物体运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0 \tag{9}$$

二、基本概念

1. 微分方程

凡表示自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)之间关系的方程叫做**微分方程**。在微分方程中,自变量及未知函数可以不出现,但未知函数的导数必须出现。

未知函数是一元函数的微分方程叫**常微分方程**。例如,方程(1)、(5)都是常微分方程。

本章只讨论常微分方程,并简称为微分方程(有时简称为方程)。

2. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数叫做**微分方程的阶**。

例如,方程(1)是一阶微分方程;方程(5)是二阶微分方程。而 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 是三阶微分方程。

3. 微分方程的解

一个函数代入微分方程后能使方程的两端恒等,就叫做是该**微分方程的解**。

例如,函数(3)和(4)都是方程(1)的解;函数(8)和(9)都是方程(5)的解。

解主要有两种不同的形式:一种解包含任意常数,且独立的任意常数(即不能通过运算而合并的常数)的个数恰好和方程的阶数相等,这种解叫**通解**。

例如,函数(3)是方程(1)的通解;函数(8)是方程(5)的通解。

另一种解不包含任意常数,它是根据问题所给的特定条件从通解中确定出任意常数后而得到的,这种解叫**特解**。

例如,函数(4)和函数(9)分别是方程(1)和(5)的特解。

用来确定特解的条件,例如条件(2)和(6),叫**初始条件**。

微分方程的特解的几何图形是一条平面曲线,叫**积分曲线**;而通解表示一族曲线,叫**积分曲线族**。例如,例 7-1 中的抛物线 $y=$

x^2+1就是方程(1)的积分曲线族中经过点(1,2)的那一条积分曲线(图 7-2)。

二阶方程满足初始条件 $y|_{x=x_0}=a_1, y'|_{x=x_0}=a_2$ 的特解的几何意义就是通过点(x_0,a_1),且曲线在该点处的切线斜率为 a_2 的那条积分曲线。

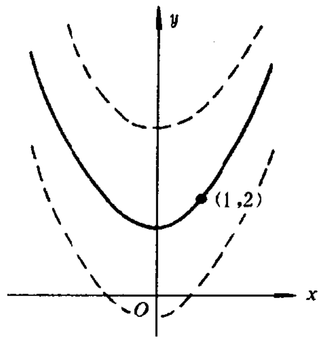


图 7-2

注 1. 微分方程的解也可用隐函数的形式给出。

注 2. n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

它的通解是 $\Phi(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$,其中 $c_1, c_2\cdots, c_n$ 是 n 个任意常数。如果由初始条件 $y|_{x=x_0}=a_1$, $y'|_{x=x_0}=a_2$, $\cdots$, $y^{(n-1)}|_{x=x_0}=a_n$ 确定出 $c_1, c_2\cdots, c_n$,便可得特解 $\phi(x,y)=0$。

本章主要研究一阶,二阶微分方程。

习题 7—1

1. 下列等式中哪些是微分方程?

(1)$y''-3y'+2y=x$;　　(2)$y^2-3y+2=0$;

(3)$y'=2x+6$;　　(4)$y=2x+6$;

(5)$\mathrm{d}y+(2x+6)\mathrm{d}x=0$;　(6)$\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\sin t$。

2. 说出下列微分方程的阶:

(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$;　　(2)$s''+3s'+2s=\cos t$;

(3)$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-y=\mathrm{e}^x$;　　(4)$\sin x\cos y\mathrm{d}x+\cos x\sin y\mathrm{d}y=0$

3. 对以下各题,验证所给函数是微分方程的解。

(1)$x^2-xy+y^2=c$,$(x-2y)y'=2x-y$;

(2) $y=\ln(xy)$, $x(y-1)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$;

(3) $y=x+ce^y$, $(x-y+1)y'=1$。

4. 已知曲线族,求出它相应的微分方程(其中 c,c_1,c_2 均为常数)。

(1) $(x+c)^2+y^2=1$;　　(2) $(y-c_2)^2=4c_1x$;

(3) $y=c_1\sin2x+c_2\cos2x$。

第二节　可分离变量方程与齐次方程

本节和下节介绍几种一阶微分方程的解法。一阶方程的一般形式是 $F(x,y,y')=0$。以后我们仅讨论已解出导数的方程,即形如 $y'=f(x,y)$ 的方程,这种方程还可以写成微分的形式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$。

一、可分离变量方程

1. 形式

形如
$$y'=\phi(x)\psi(y) \tag{1}$$
或
$$M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x+N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0 \tag{2}$$
的方程叫做**可分离变量方程**。

例如,$y'=3ye^x$,$3x^2+5x-5y'=0$,$(e^{x+y}-e^x)\mathrm{d}x+(e^{x+y}+e^y)\mathrm{d}y=0$ 都是可分离变量方程。

2. 解法

(1)将方程(1)分离变量
$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\phi(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$
使方程的两边都只包含一个变量及其微分。

(2)将方程(3)两边积分
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\int\phi(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$
得
$$G(y)=H(x)+c \tag{5}$$

其中 $G(y)=\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}$ 和 $H(x)=\int\phi(x)\mathrm{d}x$ 分别是 $\frac{1}{\psi(y)}$ 和

$\phi(x)$ 的某一个原函数，c 是任意常数。如果能从(5) 中解出 y

$$y = G^{-1}(H(x) + c) \tag{6}$$

此处 G^{-1}表 G 的反函数，则称它为方程(1)通解的显式表达式，而(5)是通解的隐式表达式。

例 7-3 求 $y' = \dfrac{y}{1+4x^2}$的通解。

解 此为可分离变量方程，分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$$

两边积分得 $\ln y = \dfrac{1}{2}\arctan 2x + c_1$

(为简单起见，我们把 $\ln|y|$ 写为 $\ln y$，以下同)

即 $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan 2x + c_1}$

或 $y = c\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan 2x}\ (c = \mathrm{e}^{c_1})$

例 7-4 (铀衰变)放射性元素铀，由于不断地有原子放射出微粒子而变成其它元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变。由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比。已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀的含量 $M(t)$随时间 t 变化的规律。

解 铀的衰变速度就是 $M(t)$对时间 t 的导数$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$，依题意可得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \tag{7}$$

其中，常数 $\lambda>0$ 叫衰变常数，λ 前置负号是由于当t 增加时，M 单调减少，即$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}<0$ 的缘故。

初始条件为 $M|_{t=0} = M_0$

方程(7)是可分离变量方程。

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}M}{M} = -\lambda\,\mathrm{d}t$

两边积分 $\ln M = -\lambda t + c_1$

即 $$M = ce^{-\lambda t}$$

代初始条件可求得 $c = M_0$

所以 $M = M_0 e^{-\lambda t}$

当 $M = \frac{1}{2}M_0$ 时,可得 $t^* = \frac{\ln 2}{\lambda}$ 叫半衰期(图 7-3)。

例 7-5 一曲线过点(2,1),设曲线上点 $P(x,y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 y 轴平分,求此曲线的方程。

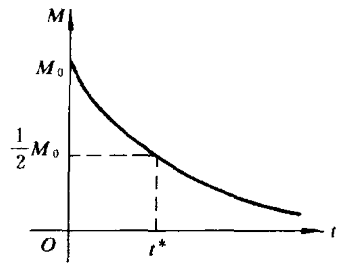


图 7-3

解 设此曲线方程为 $y = y(x)$,过点 $P(x,y)$的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

$(y' \neq 0 \text{ 或 } \infty)$

它与 y 轴的交点设为 M(图 7-4)。

令 $Y = 0$ 得 Q 点横坐标 $X = x + yy'$。

又因 M 为 PQ 的中点,故 Q 点横坐标为 $-x$。

从而有 $$yy' = -2x \tag{8}$$

此即曲线所应满足的微分方程。

初始条件为 $$y|_{x=2} = 1 \tag{9}$$

方程(8)为可分离变量方程。

分离变量 $$y\mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x$$

积分 $$\frac{1}{2}y^2 = -x^2 + c_1$$

即 $2x^2 + y^2 = c$,由初始条件(9)可求得 $c = 9$。

故所求曲线为椭圆 $2x^2 + y^2 = 9$(四个顶点除外)。

例 7-6 有高为 1m 的半球形容器,水从它的底部小孔流出。小孔横截面面积 $S = 1\text{cm}^2$(图 7-5),开始时容器内盛满了水。求水从小孔流出过程中,容器里水面的高度 h 随时间 t 的变化规律。

解 由 Torricelli 定律,水从容器中流出的速度 $v = 0.62\sqrt{2gh}$,故在$[t, t+\mathrm{d}t]$时间内流出的水的体积 $\mathrm{d}V = 0.62S\sqrt{2gh}$

$dt=0.62\sqrt{2gh}\,dt$。另一方面,容器内水面高度在$[t,t+dt]$时间内由 h 降至$h+dh$($dh<0$),从而

$$dV=-\pi r^2dh=-\pi[100^2-(100-h)^2]dh$$
$$=-\pi(200h-h^2)dh$$

(因为 $dV>0$,$dh<0$,所以前面应有“$-$”号)

故 $$0.62\sqrt{2gh}\,dt=-\pi(200h-h^2)dh \tag{10}$$

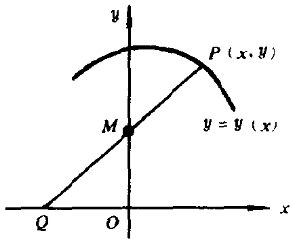


图 7-4

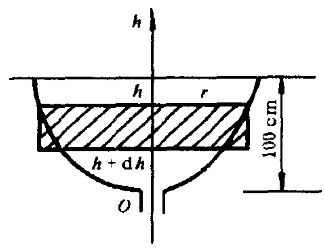


图 7-5

初始条件 $$h|_{t=0}=100 \tag{11}$$

将(10)分离变量,有

$$dt=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})dh$$

积分得 $$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}\right)+c \tag{12}$$

代初始条件(11)解得

$$c=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{4}{3}\times10^5-\frac{2}{5}\times10^5\right)=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times10^5$$

将 c 代入(12)式并化简得

$$t=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3h^{\frac{3}{2}}+3h^{\frac{5}{2}})$$

本例是通过对微小量 dV 的分析得到方程(10)的,这种微小量分析的方法也是建立微分方程的一种常用方法。

二、齐次方程

1. 形式

形如 $$y'=\phi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$

的方程叫做**齐次方程**。

例如，$y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$，$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$，$xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$ 都是齐次方程。

因为第二个和第三个方程可以化为 $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 和 $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}$。

2. 解法

令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$，从而$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入方程(13)得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\phi(u)\text{，即}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\phi(u)-u}{x}$$

这是一个可分离变量方程。

分离变量 $$\frac{\mathrm{d}u}{\phi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{\phi(u)-u}=\ln x+c$$

求出积分后，再用$\frac{y}{x}$代替 u，即得方程(13)的通解。

例 7-7 求 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$的通解。

解 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u\text{，即 }x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$$

分离变量 $$\cot u\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分 $$\ln\sin u=\ln x+\ln c$$

即 $$\sin u=cx$$

用$\frac{y}{x}$代替 u，得方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=cx$