非线性电路原理

吴景棠 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书较系统地介绍了非线性电路的静态和动态分析的原理与方法。重点分析了含二端电阻元件、晶体管以及多端元件，主要是运算放大器的各种常见非线性电路的解的存在性与唯一性问题。此外，对目前科学界研究的热点之一，即非线性电路与系统的动态行为中出现的“混沌”现象的基本原理和机制，进行了初步的探讨。

全书共分六章，自成体系。阅读本书仅需一般的数学及线性电路分析的基本知识。为便于理解和应用，书中附有大量实例。它是一本内容精炼、便于阅读、联系实际的基础理论著作，对从事电学、通信、控制等专业的工程技术人员和相应大专院校的师生均有参考价值。

非线性电路原理
吴景棠 编著
责任编辑 孙中明
*
国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168 1/32 印张 9 插页 2 234千字
1990年11月第一版 1990年11月北京第一次印刷 印数：0,001—3,000册

ISBN 7-118-00776-5/TN·138 定价：9.25元
科技新书目 232-045

目　录

第一章 绪　论

1.1 引　言

在电路理论的发展中，主要的注意力均集中于线性系统的领域。这有许多原因，但其中最重要的可能是：一旦取消了线性这个条件，则除了某些特殊情况之外，很难找到严格的理论。近年来，伴随着高效电子计算机，出现了有效的求解非线性电路方程的数值计算法。人们可以借助计算机进行以前无法着手的复杂运算，从而获得了许多描述非线性电路特性的较深入的资料。这大大地推动了非线性电路理论的发展。主要表现在以下两个方面：其一是发现电路的解不一定存在也不一定是唯一的。因此，为了避免无谓的计算，必须事先对欲求解的电路的特性有所了解，此即理论研究的必要性。其二是有了计算机这样一个得力的助手，使理论得以验证，保证了理论研究的顺利发展。目前，在非线性电路理论的研究中虽然还有许多问题尚待解决，但这一理论本身已形成了一个内容相当广博的学科。

本书着重于探讨非线性电路的内在特性。把描述电路性质的方程、电路中元件的特性、元件之间的连接关系与电路的解的特性联系起来，进行定性分析。

虽然在近期的文献中，“分布”非线性电系统，例如含有传输线的网络，受到某些注意，本书仍仅限于讨论“集总”电路，即由集总元件构成的电路。集总电路的性质可以用代数或普通微分方程表示，而分析分布系统则要用到艰深的偏微分方程或泛函微分方程。人们常见的当以集总电路为主。

对非线性现象的分析并非科学或数学中的新分支。曾有过许

多古典的非线性系统研究的科学著作，例如著名学者庞加莱(Poincaré)、李雅普诺夫（Lyapunov）和范德波(Van der Pol)等的杰出论述[1.1~1.3]等。这些古典的分析方法虽然目前仍广泛用于电路分析，本书的重点却并不在于此，而将着重介绍近年来在非线性电路理论研究中所取得的一系列突破性的成果。

1.2 数 学 基 础

为便于分析非线性电路，首先就所需使用的基本数学工具，主要是泛函分析的一些基本内容作一简要介绍。以后在各章节内还将就相应的数学工具陆续进行介绍。

一、矢量

一个 n 维矢量以

$$\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^T \tag{1.2.1}$$

表示，其中 x_k，$k=1,2,\cdots,n$，为实数，T 表示转置。n 维矢量和的定义与二维或三维空间矢量和的定义相同。一个矢量与一个实数的乘积形成一个 n 维线性空间，通常以 R^n 或 E^n 表示，其中 R 表示实数，E 表示欧几里得（Euclidean）数。$n=1$，即实轴，以 R^1 或 E^1 表示。$n=2$ 为实平面，以 R^2 或 E^2 表示。其他可依此类推。

二、范数

若 n 维空间中每个元素 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 均具有一个非负的 $\|\boldsymbol{x}\|$，称为 $\boldsymbol{x}$ 的范数，则该空间为规范空间。

范数具备下列性质：

$$（1）\ \|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0 \qquad \forall \boldsymbol{x}\in R^n \tag{1.2.2}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|=0，\text{当且仅当 } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$$

$$（2）\ \|\alpha \boldsymbol{x}\|=|\alpha|\ \|\boldsymbol{x}\|，\ \forall \text{实数 } \alpha \tag{1.2.3}$$

$$（3）\ \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|，\ \forall \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in R^n \tag{1.2.4}$$

范数实质上是矢量长度的一般形式。最常用的范数是欧几里得范数，又称2范数。其表达式为 $\|\boldsymbol{x}\|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$。此

范数显然满足性质1和2。证明它同时满足性质3需要用到施瓦茨（Schwarz）不等式。该不等式将在以下内积部分中证明。

其他常用的范数还有下列两种：

1）1范数。

$$\|\boldsymbol{x}\|=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \tag{1.2.5}$$

2）∞范数。

$$\|\boldsymbol{x}\|=\max_k\{|x_k|\},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{1.2.6}$$

显然，这两种范数均满足上述范数的三性质。

范数的一般公式为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1 \tag{1.2.7}$$

当$p=1$，称为1范数；当$p=2$，称为2范数；……，当$p=\infty$，称为∞范数。

现以二维空间为例，说明范数$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r$（或$\|\boldsymbol{x}\|<r$）的意义，如图1.2-1所示。

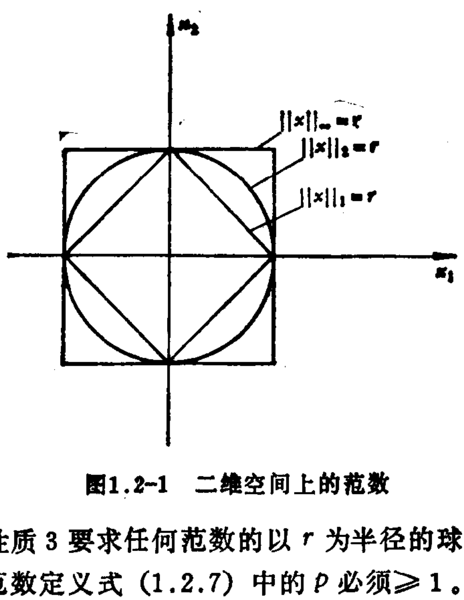


图1.2-1　二维空间上的范数

范数的性质3要求任何范数的以r为半径的球体均应为外凸域。因此，范数定义式（1.2.7）中的p必须$\geqslant 1$。可以证明，若

$p<1$，则球体将成为外凹域。

本书将主要采用欧几里得范数，在用到其他范数时将予以标明。

范数可用以表示两点间的距离。若

$$\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T\ ,\quad \boldsymbol{y}=[y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]^T$$

为 R^n 中的两个点，则可以$\|\cdot\|$定义此两点之间的距离。即

$$d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \tag{1.2.8}$$

若采用 2 范数，则 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为两点间的直线距离。

三、内积

内积又称点积或标量积。其定义为$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle=\|\boldsymbol{x}\|^2$，故任意二矢量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的内积为$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$。

下面证明施瓦茨不等式。施瓦茨不等式如下：对于任意二矢量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，有

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2 \tag{1.2.9}$$

证明：由于任何范数的平方必然$\geqslant 0$，故可定义 $f(\alpha)=\|\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2\geqslant 0$，由内积的定义可得

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=\langle \alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle\\ &=\alpha^2\|\boldsymbol{x}\|^2+2\alpha\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle+\|\boldsymbol{y}\|^2\geqslant 0\end{aligned}$$

满足上式的条件是判别式

$$(2\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle)^2-4\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\leqslant 0$$

即 $$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{y}\|$$ 证毕。

四、函数

若 A 为 E^n 空间中的点的一个集合，以 $A\subset E^n$ 表示，B 为 E^m 空间中的点的一个集合，以 $B\subset E^m$ 表示，且若对于 A 中的任一点 $\boldsymbol{x}\in A$，在 B 中有一个对应的点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in B$，则称 $\boldsymbol{f}$ 为由 A 至 B 的一个函数（一个映射）。注意，此处函数一词均指单值函数。

集合 A 称为 $\boldsymbol{f}$ 的定义域，即 $\boldsymbol{f}$ 对 A 有定义。而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的点则称为 $\boldsymbol{f}$ 的值。全部 $\boldsymbol{f}$ 值的点构成值域。$\boldsymbol{f}$ 的值域显然是 B 的一个子集。若 $\boldsymbol{f}$ 的值域为整个 B 集合，则称 $\boldsymbol{f}$ 为由 A 至 B 的满射。必须分清满射与映射的区别。当 $n=1$，若整个 x 轴为定义域而整

个 y 轴为值域，则 f 为满射。为分清这一区别，举若干例题如下：

例 1.2-1　$A=E^1$，$B=E^1$，且对任一 $x\in A$ 均有 $f(x)=x^2$。则 f 为由 A 至 B 的映射。

例 1.2-2　$A=E^1$，$B=\{x: x\in E^1,\ x\geqslant 0\}$ $f(x)=x^2$。则 f 为由 A 至 B 的满射。

例 1.2-3　$A=B=E^2$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ 3x_1+4x_2 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{f}$ 为由 E^2 至 E^2 的满射，且为一一对应函数。但若将 $\boldsymbol{f}$ 略加改动如下，情况就会大不相同。

例 1.2-4　$A=B=E^2$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ x_1+2x_2 \end{bmatrix}$$

此函数的定义域与值域如图 1.2-2 所示。由图可见，$\boldsymbol{f}$ 为 $E^2\to E^2$ 的映射而非满射，其定义域为整个 E^2 平面而值域则仅为 E^2 平面上的一条直线。

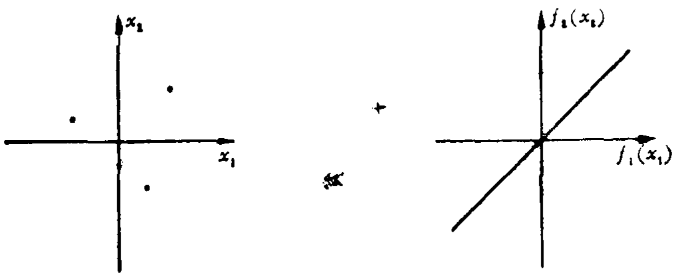


图1.2-2　例1.2-4的定义域与值域

例 1.2-5　$A=B=R^1$

（1）f 的图形如图 1.2-3(*a*) 所示。f 为 $R^1\to R^1$ 的满射但非一一对应函数。

（2）f 的图形如图 1.2-3(*b*) 所示。f 为 $R^1\to R^1$ 的映射，是一一对应函数。

（3）f 的图形如图 1.2-3（c）所示。f 为 $R^1 \to R^1$ 的满射且为一一对应函数。

（4）f 的图形如图 1.2-3（d）所示。f 为 $R^1 \to R^1$ 的映射，非一一对应函数。

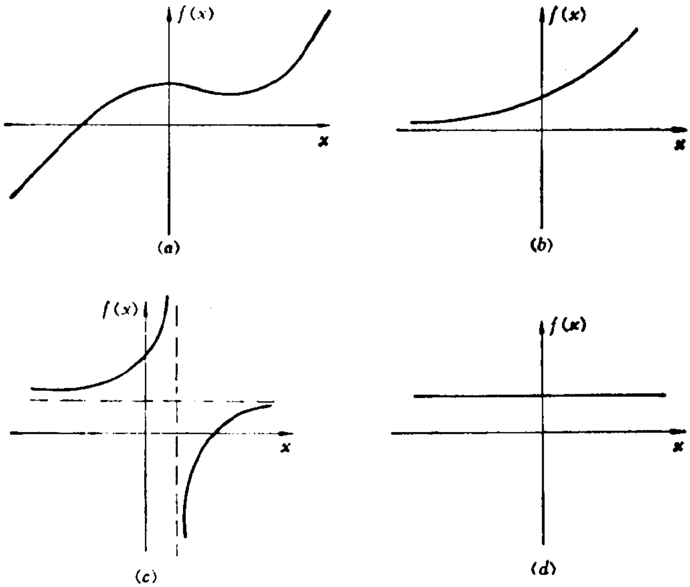


图1.2-3　例1.2-5的函数图形

（a）满射，非一一对应；（b）非满射，一一对应；

（c）满射，一一对应；（d）非满射，非一一对应。

这里还有必要介绍另一个重要的概念，即一一对应函数与反函数的关系。

若点 $\boldsymbol{a} \in A$，点 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in B$ 称为 A 的映象，则 A 中由其映象为 $\boldsymbol{b} \in B$ 的点组成的集合称为 $\boldsymbol{b}$ 的反映象，以 $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{b})$ 表示。若 $\boldsymbol{f}$ 为由 A 至 B 的映射，且所有的点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2 \in A$，$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$，所对应的 B 中的点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$，则 $\boldsymbol{f}$ 为由 A 至 B 的一一对应映射。因此，若 $\boldsymbol{f}$ 为 $A \to B$ 的一一对应映射，则对于每一点 $\boldsymbol{y} \in B$，$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$ 只能对应于 A 中的一个点。

令 $\boldsymbol{f}$ 为 $A \to B$ 的满射，则函数 $\boldsymbol{g}: B \to A$ 为 $\boldsymbol{f}$ 的反函数的充

要条件为对于B中的每一点$f(x)$，均有$g(f(x))=x$。由于对应于函数g的定义域B中的每一点$f(x)$，在值域A中只能有一个值x，故函数$f: A\to B$必须为一一对应函数，其反函数f^{-1}才能存在。

五、点

点分为有限点、内部点和孤立点。令x为规范欧几里得空间E^n中的一个点，则$N(x)$为x的邻域，它是以x为中心，以r为半径的一个开球（形状不限）。点x及其邻域的定义如图1.2-4所示。

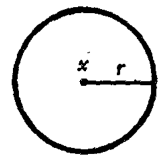


图1.2-4　点x及其邻域$N(x)$

令$A\subset E^n$，若点$x\in A$的邻域内至少包括另一个点$y\neq x$，$y\in A$，则x称为有限点。若$x\in A$，但不是有限点，则x为孤立点。若$x\in A$且$N(x)\subset A$，则x为内部点。若A中所有的点均为内部点，则A为开集合。对于E^1，开集合用（　，　）表示，例如（0，1）即$0<x<1$，亦即不包括边界点。开集合的补集合为闭集合。对于E^1，闭集合用〔　，　〕表示，例如〔0，1〕即$0\leqslant x\leqslant 1$。

若$A\subset E^n$，且f为在E^n上定义的函数，则对于任一点$x\in A$，f对A的制约即以A为定义域的函数$g: g(x)=f(x)$。

六、连续函数

函数f在x点附近连续的充要条件为对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对$y\in A$且$\|y-x\|<\delta$有$\|f(y)-f(x)\|<\varepsilon$。

此定义可以这样理解：若$f: A\to B$，$x\in A$，且x的微小变化仅引起$f(x)$的微小变化，则f在x点附近连续。必须注意，仅当f在x点有定义时，f才可能在x点附近连续。

若x为A中的有限点，则连续的定义为

$$\lim_{y\to x} f(y)=f(x)$$

映射f为$A\to B$的连续映射，当且仅当f在A中的每个点$x\in A$附近均为连续。

七、同胚

若 f：$A\to B$ 为连续满射，且 f^{-1}：$B\to A$ 亦为连续满射，则 f 为 $A\to B$ 的满射同胚。

八、局部同胚

若对于 A 中的每个点 $x\in A$ 均存在开邻域 $U(x)\subset A$ 及 $V(f(x))\subset B$ 使 f 对 U 的制约为 $U\to V$ 的连续满射，且存在 $V\to U$ 的连续反满射，即 f 对 U 的制约为 $U\to V$ 的满射同胚，则 f：$A\to B$ 为局部同胚。

下面介绍求解非线性方程 $f(x)=y$ 时需要应用的一些定理。这些定理在以后各章中亦将用到。

定理 1　映射 f：$E^n\to E^n$ 为 E^n 至 E^n 的满射同胚，当且仅当

1. f 为局部同胚。

2. $\|f(x)\|\to\infty$，当 $\|x\|\to\infty$。

证明见参考文献〔1.4〕。下面举例说明。

例 1.2-6　函数 f：$E^1\to E^1$ 如图 1.2-5 所示。f 为局部同胚。但当 $\|x\|\to\infty$ 时 $\|f(x)\|\not\to\infty$，故非满射同胚。

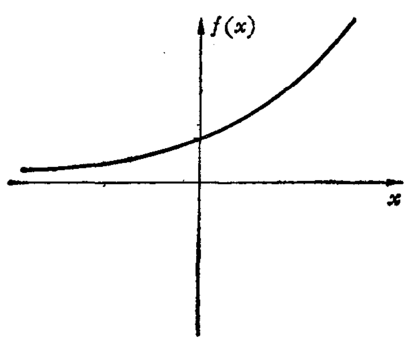


图1.2-5　局部同胚函数

例 1.2-7　函数 f：$E^1\to E^1$ 如图 1.2-6 所示。f 为 $E^1\to E^1$ 的满射同胚。

例 1.2-8　函数 f：$E^1\to E^1$ 如图 1.2-7 所示。f 非满射同胚。

例 1.2-9　函数 f：$E^1\to E^1$ 如图 1.2-8 所示。f 非满射同胚。

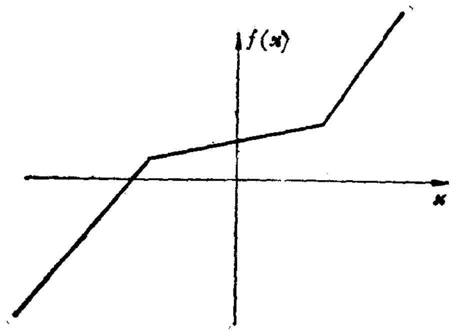


图1.2-6　满射同胚

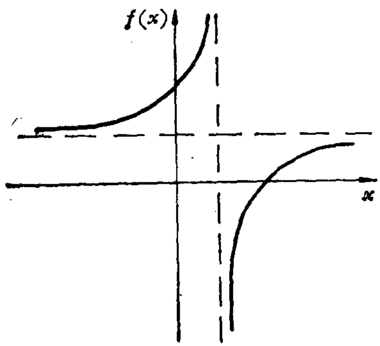


图1.2-7　非满射同胚

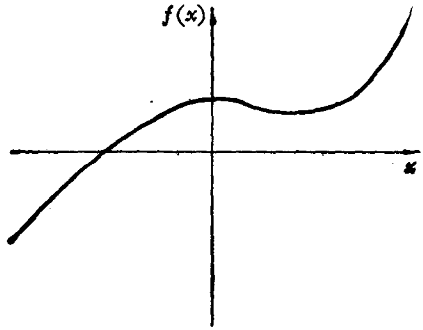
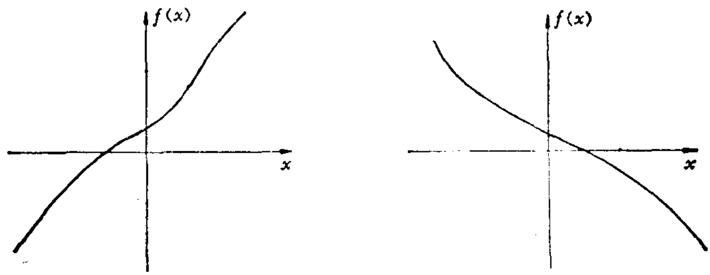


图1.2-8　非满射同胚

由定理 1 及以上各例，显而易见，只存在两种 $E^1 \to E^1$ 的满射同胚，即如图 1.2-9(a) 及 (b) 所示的连续严格单增满射及连续严格单减满射函数。



(a)　　　　(b)

图1.2-9　$E^1 \to E^1$满射同胚

(a) 连续严格单增满射；(b) 连续严格单减满射。

定义　令 f 为 E^1 定义域中的实值函数，若对于 x，$y \in E_1$ 且 $x < y$ 有

$f(x) \leqslant f(y)$，则 f 为单增函数；

$f(x) < f(y)$，则 f 为严格单增函数；

$f(x) \geqslant f(y)$，则 f 为单减函数；

$f(x) > f(y)$，则 f 为严格单减函数。

应当注意，严格单增函数的反函数仍为严格单增函数。严格单增函数的严格单增函数亦仍为严格单增函数。即若 $f: A \to B$ 为严格单增，且 $g: B \to C$ 亦为严格单增，又 $h: A \to C$ 为 $h(x) = g(f(x))$，$\forall x \in A$，则 h 仍为严格单增。

若 $f: A \to B$ 为严格单增，且若 df/dx 在某些点 $x \in A$ 存在，则有 $0 < df/dx < \infty$。故判断一个由 E^1 至 E^1 的函数是否为满射同胚是比较简单的。但对于 $E^2 \to E^2$ 以至 $E^n \to E^n$ 的映射，情况则并非如此一目了然。对于 $f: E^1 \to E^1$，若 f 为处处可微，则只要 df/dx 处处不为零，f 即为局部同胚。为了检验 $n > 1$ 的情况，就需要一个一般化的导数概念，即雅可比矩阵的概念。

九、雅可比（Jacobian）矩阵

若 f：$E^n \to E^n$，令 $x \in E^n$，则 f 对 x 的雅可比矩阵为下列实 $n \times n$ 矩阵。

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

显然，此矩阵存在的条件为在各点x均存在偏微分$\partial f_i/\partial x_j$，$i=1$，2，…，$n$，$j=1$，2，…，$n$。雅可比矩阵的符号有：$J_f(x)$、$[\partial f/\partial x]$、$Df$等。与导数一样，在不同的点$x$处，雅可比矩阵也不同。即矩阵中的每一项$\partial f_i/\partial x_j$本身均为$x_k$，$k=1$，2，…，$n$的函数。若映射$f$不仅连续，且为处处可微，则可由其雅可比矩阵的行列式来判断f是否为满射同胚。

十、可微同胚

若f为$E^n \to E^n$的连续可微满射，且存在f^{-1}，亦为$E^n \to E^n$的连续可微满射，则f为$E^n \to E^n$的连续可微同胚。

定理 1 的推理　连续可微映射f为$E^n \to E^n$的满射可微同胚，当且仅当

1．$\det[\partial f/\partial x] \neq 0$，$\forall x \in E^n$

2．$\|f(x)\| \to \infty$，当$\|x\| \to \infty$

下面举例说明此推理的应用：

例1.2-10　f：$E^2 \to E^2$

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1 + x_2 \\ e^{x_2} - e^{-x_2} + 5x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

试求f是否为满射同胚。

先求得f的雅可比矩阵如下：

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\begin{bmatrix} 3x_1^2+1 & 1 \\ 5 & e^{x_2}+e^{-x_2}+7 \end{bmatrix}$$

其行列式$\det[\partial f/\partial x]=(3x_1^2+1)(e^{x_2}+e^{-x_2}+7)-5$

$$>7-5=2>0$$

符合上述推理所要求的条件1。但检验是否符合条件2比较困难。

因此，有人导出了一些较上述推理略为便于应用的定理。下面介绍其中较重要的三个定理。

定理2 若f为$E^n \to E^n$的连续可微映射，且其雅可比矩阵$[\partial f/\partial x]$的元素在E^n上均为有界，又若存在某实数$\varepsilon>0$，有$|\det[\partial f/\partial x]|\geqslant\varepsilon$，$\forall x\in E^n$，则$f$为$E^n\to E^n$的满射同胚。

证明见参考文献〔1.5〕。

此定理的要点是f的导数在任意点上均不得为零，即f必为单增或单减函数。但应当注意到，这个定理仅为充分条件而非必要条件。这一点不难找到具体例子予以说明。

例 1.2-11 f：$E^1\to E^1$如图1.2-10所示。$f(x)$随着$x\to\infty$而按照$\ln x$的速度趋向∞。但由于df/dx在$x\to\infty$时趋向$1/x$，

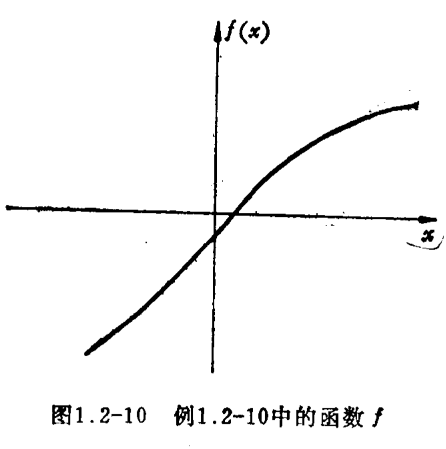


图1.2-10 例1.2-10中的函数f

故不可能找到任何$\varepsilon>0$，使$df/dx\geqslant\varepsilon>0$。原因在于$\ln x$趋向$\infty$的速度比$x$趋向$\infty$的速度慢。但显然$f(x)$是满射同胚。

但定理中所规定的〔$\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}$〕的元素为有界则是必要的。不难找到实例证明，若不满足此条件，$\boldsymbol{f}$就不是满射同胚。

例1.2-12

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} x_1(x_2^2+1) \\ \operatorname{arctg}(x_2) \end{bmatrix}$$

其中的$f_2(x)=\operatorname{arctg}(x_2)$ 如图1.2-11所示，显然不是满射同胚，从而$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 也不可能是$E^2 \to E^2$的满射同胚。但用定理 2 检验，却发现其

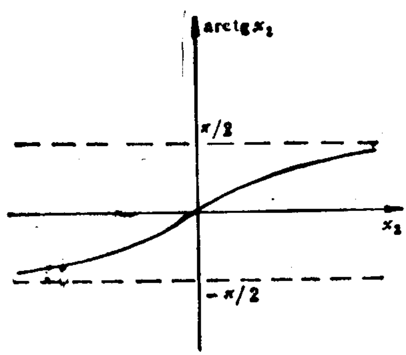


图1.2-11　例1.2-12中的函数$f_2(x)$

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]=\begin{bmatrix} x_2^2+1 & 2x_1x_2 \\ 0 & 1/(x_2^2+1) \end{bmatrix}$$

故$|\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}|=1>0$。符合定理的要求。然而，〔$\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}$〕中元素则显然并非均属有界。

下列定理 3 是定理 2 的改进：

定理 3　若$\boldsymbol{f}$为$E^n \to E^n$的连续可微映射，且其雅可比矩阵〔$\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}$〕的元素在$E^n$上均为有界，又若存在某实数$a>0$及$b\geqslant 0$，使有$|\det〔\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}〕|\geqslant 1/(a+b\|\boldsymbol{x}\|)$，$\forall \boldsymbol{x}\in E^n$，则$\boldsymbol{f}$为$E^n \to E^n$的满射同胚。

证明见参考文献〔1.6〕。