

管理数学

韩伯棠 吴祈宗 李金林 编

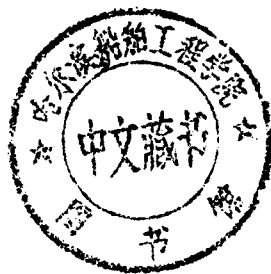
北京理工大学出版社



487544

管 理 数 学

韩伯棠 吴祈宗 李金林 编



北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括:线性代数,线性规划,概率论基础,应用数理统计,决策论等五章。主要介绍了管理数学一些基本原理和方法及其应用。每章附有习题,书后附表。

本书可作为高等院校经济管理类专业教材,也可供广大管理干部和工程技术人员自学与参考。

图书在版编目(CIP)数据

管理数学/韩伯棠等编. —北京:北京理工大学出版社,1997.8

ISBN 7-81045-289-4

I. 管… II. 韩… III. 管理学:数学 IV. C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 10193 号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路 7 号)

邮政编码 100081 电话 (010)68912824

各地新华书店经售

北京房山先锋印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 15.75 印张 379 千字

1997 年 8 月第一版 1997 年 8 月第一次印刷

印数:1-2500 册 定价:18.50 元

※图书印装有误,可随时与我社退换※

前 言

管理数学是一门综合性的应用数学学科。它为管理决策提供定量分析方法,是现代化管理不可缺少的工具。许多高等院校的经济管理类专业为此开了相应的课程。

考虑到高等学校经管类专业学科交叉,学生具有各种不同的数学基础以及对管理数学应用的实际情况,我们编写了此书,编写内容包括线性代数、线性规划、概率论基础、应用统计学、决策论等。

本书突出重点、概念明确、文字简明、注重结合经济管理专业的实际。

全书共分五章。第一、五章由韩伯棠编写;第二章由李金林编写;第三、四章由吴祈宗编写。

由于编者水平有限,书中缺点错误在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

1996.12

目 录

第一章 线性代数

§ 1 行列式	(1)
1.1 二阶、三阶行列式	(1)
1.2 n 阶行列式	(4)
1.3 行列式的性质	(7)
1.4 行列式按行(列)展开	(9)
1.5 行列式的计算	(10)
1.6 克莱姆法则	(11)
§ 2 矩阵	(13)
2.1 矩阵的概念	(13)
2.2 矩阵的运算	(14)
2.3 逆矩阵	(17)
2.4 矩阵的分块	(20)
2.5 矩阵的初等变换	(23)
§ 3 n 维向量	26)
3.1 二维向量	(5)
3.2 n 维向量	(2)
3.3 向量间的线性关系	(29)
3.4 向量组与矩阵的秩	(31)
§ 4 线性方程组	(33)
4.1 线性方程组有解的判别定理和求解方法	(34)
4.2 线性方程组解的结构	(39)
习题一	(44)

第二章 线性规则

§ 1 线性规划模型及其图解法	(50)
1.1 线性规划模型的建立	(50)
1.2 线性规划模型的图解法	(54)
1.3 线性规划模型的标准型	(57)
§ 2 单纯形法	(61)
2.1 单纯形法的基本思路	(61)
2.2 单纯形法的主要步骤	(61)
2.3 单纯形表	(67)
2.4 关于多个最优解的讨论	(70)
§ 3 人工变量法	(71)
3.1 人工变量的引入	(72)

3.2 大 M 法	(72)
3.3 两阶段法	(75)
§ 4 线性规划的对偶问题	(78)
4.1 对偶问题的提出	(78)
4.2 对偶规划的形式	(80)
4.3 对偶性定理	(83)
4.4 影子价格	(86)
4.5 对偶单纯形法	(88)
§ 5 灵敏度分析	(91)
5.1 目标函数系数的变化	(93)
5.2 右端常数的变化	(95)
5.3 约束条件中的系数变化	(97)
5.4 增加新变量的分析	(98)
5.5 增加一个约束条件的分析	(99)
§ 6 运输问题	(100)
6.1 运输问题的特殊性	(101)
6.2 表作业法	(102)
6.3 产销不平衡的运输问题	(109)
§ 7 线性规划应用举例	(111)
习题	(117)

第三章 概率论基础

§ 1 随机事件与概率	(128)
1.1 随机事件与统计规律性	(128)
1.2 事件及样本空间	(129)
1.3 事件的概率	(130)
§ 2 概率的运算	(133)
2.1 事件的关系及运算法则	(133)
2.2 概率的加法公式	(134)
2.3 概率的乘法公式	(135)
2.4 全概率公式与贝叶斯公式	(138)
§ 3 随机变量与分布函数	(140)
3.1 随机变量	(140)
3.2 离散型随机变量的概率分布	(141)
3.3 连续型随机变量及其分布	(145)
§ 4 随机变量的数字特征	(153)
4.1 数学期望	(153)
4.2 方差	(158)
§ 5 大数定理与中心极限定理	(161)
5.1 随机序列的几个收敛性定义	(162)
5.2 大数定理	(162)
5.3 中心极限定理	(164)
习题三	(166)

第四章 应用数理统计

§ 1 数理统计的基本概念	(173)
1.1 母体与子样	(173)
1.2 统计量及其分布	(175)
§ 2 参数估计	(181)
2.1 参数的点估计	(181)
2.2 估计量的评价标准	(186)
2.3 参数的区间估计	(188)
§ 3 假设检验	(195)
3.1 假设检验中常用的基本术语	(195)
3.2 单个正态母体参数的假设检验	(197)
3.3 两个正态母体方差之比与均值之差的检验	(201)
§ 4 回归分析	(205)
4.1 一元线性回归	(206)
4.2 相关系数	(210)
4.3 一元非线性回归	(212)
4.4 预测与控制	(215)
习题四	(219)

第五章 决策论

§ 1 风险型情况下的决策	(223)
1.1 最大可能准则	(223)
1.2 期望值准则	(224)
1.3 决策树法	(224)
1.4 灵敏度分析	(227)
§ 2 不确定情况下的决策	(228)
2.1 最大最小的准则	(228)
2.2 最大最大的准则	(229)
2.3 等可能性准则	(230)
2.4 乐观系数准则	(230)
2.5 后悔值准则	(231)
习题五	(232)

附表

附表 1 标准正态分布函数表	(234)
附表 2 t 分布双侧临界值表	(235)
附表 3 χ^2 分布上侧临界值 χ^2_α 表	(236)
附表 4 F 分布上侧临界值表	(237)
附表 5 相关系数显著性检验表	(241)
参考文献	(242)

第一章 线性代数

线性代数主要是研究变量间的线性关系。本章主要内容有 n 阶行列式, 矩阵, 线性方程组, n 维向量。

§1 行列式

本节从二阶、三阶行列式出发, 引入 n 阶行列式的概念, 并讨论行列式的一些基本性质与计算方法, 最后给出用行列式解线性方程组的克莱姆法则。

1.1 二阶、三阶行列式

行列式的概念来源于二元、三元线性方程组的解法。

含有两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

用加减消元法分别消去方程组(1-1)中 x_2, x_1 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (1-2)$$

(1-2)式是线性方程组(1-1)的解。但(1-2)式颇不易记忆, 应用时不方便, 因而就引出了新的符号来表示(1-2)式这个结果, 这就是行列式的起源。令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (1-3)$$

并称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为二阶行列式。其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式(1-3)的元素; 横排叫行, 竖排叫列。此二阶行列式表示的代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 可以用绘图(图 1-1)的方法记忆, 即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积。

于是, 方程组(1-1)的解(1-2)式可表示为下面更整齐的形式。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \stackrel{\text{记为 } D_1}{=} \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \stackrel{\text{记为 } D_2}{=} \frac{D_2}{D}$$

式中 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

D 是方程组(1-1)的未知数的系数按它们在方程组中次序排列构成的

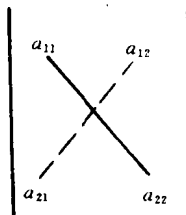


图 1-1

行列式,称为方程组(1-1)的系数行列式;分子 D_1, D_2 是用常数项 b_1, b_2 分别代替行列式 D 中 x_1 所在列的系数和 x_2 所在列系数后构成的行列式。

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 2x + 7y = 5 \end{cases}$$

解 因

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 8 = 13 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 20 = 36$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 16 = -1$$

故得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{36}{13} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{13} \end{cases}$$

类似地,含有三个未知量三个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-4)$$

用加减消元法分别消去方程组(1-4)中的 x_2 与 x_3 , x_3 与 x_1 , x_1 与 x_2 ; 当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时,得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases} \quad (1-5)$$

此式是线性方程组(1-4)的解。

如同上段一样,这又引出了三阶行列式。令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1-6)$$

则(1-6)式就叫做一个三阶行列式,三阶行列式表示的代数和,也可以用绘图(图 1-2)的方法记忆,其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项。

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times (-5) + 1 \times 0 \times 3 + 4 \times 7 \times (-3) - 4 \times 2 \times 3 \\ - 2 \times 0 \times 7 - (-3) \times 1 \times (-5) = -20 - 84 - 24 - 15 = -143$$

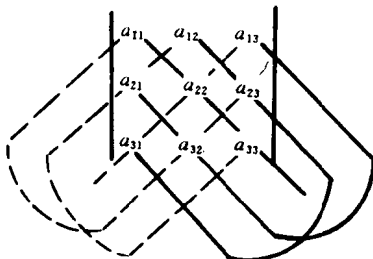


图 1-2

类似地,可以得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中 $D_j (j=1, 2, 3)$ 是用常数项 b_1, b_2, b_3 分别代替行列式 D 中 $x_j (j=1, 2, 3)$ 所在列的系数后构成的行列式。

则当 $D \neq 0$ 时方程组(1-4)的解(1-5)可以很整齐地记为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解 因

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} +1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11, \\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

故得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{8} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{9}{8} \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{6}{8} \end{cases}$$

1.2 n 阶行列式

为了将二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式,先介绍排列的逆序数的概念。

1. 排列的逆序数

由数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组,称为一个 n 级排列。

例如 1234 和 3124 都是 4 级排列,13245 是一个 5 级排列。

n 级排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$

例如 1, 2, 3 三个数码组成的所有三级排列共有 $3! = 6$ 个,它们是 123, 213, 231, 312, 321。

定义 1 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_i 排在较小的数 i_s 前面,则称 i_i 与 i_s 构成一个逆序。一个 n 级排列的逆序的总数,称为它的逆序数,记为

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n)$$

例如在排列 2431 中,21, 43, 41, 31 为逆序,2431 的逆序数就是 4,即 $N(2431) = 4$

定义 2 逆序数为偶数的排列称为偶排列;逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如排列 2431 是偶排列;45321 是奇排列; $12\cdots n$ 的逆序数是零,因此是偶排列。

在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中,如果仅将它的两数码 i_s 与 i_t 对调,得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$,所得的变换,称为一个对换 (i_s, i_t) 。

例如经过 $(1, 2)$ 对换,排列 2431 就变成了 1432。显然,如果连续施行两次相同的对换,那么排列就还原了。由此可见,一个对换把全部 n 级排列两两配对,使每两个配成对的 n 级排列在这个对换下互变。

关于排列的奇偶,有下面基本事实。

定理 1 任一排列经过一个对换,其奇偶性改变。

证 先讨论对换两个相邻数码的情况,排列

$$A i j B$$

经过 i, j 对换变成

$$A j i B$$

这里 A, B 表示不变动的数码。显然,对任意同在 $A \cup B$ 中的两个数或一个在 $i \cup j$ 中而另一个在 $A \cup B$ 中的二个数来说,其在 $A i j B$ 和 $A j i B$ 中的顺序是一样的,只有 i, j 这两个数在 $A i j B$ 和 $A j i B$ 中的顺序是相反的,即可知这两个排列相差一个逆序,故它们的奇偶性相反。

再看一般情况,排列

$$A i k_1 k_2 \cdots k_s j B$$

经过对换 (i, j) , 变成

$$A j k_1 k_2 \cdots k_s i B$$

这个对换可以用一系列相邻数码的对换而获得,在 $A i k_1 k_2 \cdots k_s j B$ 中,把 i 先后与 $k_1, k_2, \dots, k_s, j$ (共 $s+1$ 次)对换,再把 j 先后与 $k_s, k_{s-1}, \dots, k_1$ (共 s 次)对换即得 $A j k_1 k_2 \cdots k_s i B$ 。由于总共经过了 $2s+1$ 次相邻数码的对换而得到,由前面的结论可知这两个排列奇偶性相反。

定理 2 任一 n 级排列与排列 $1, 2, \dots, n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所做的对换的个数与这个排列有相同的奇偶性。

2. n 阶行列式的定义

在给出 n 级行列式的定义之前,先观察二阶和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

从上可以看出,它们都是一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同列的元素构成的。二阶行列式的一项乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2 为二级排列,当 j_1j_2 取遍了二级排列(12,21)时,即得到二级行列式的所有项(不包含符号),共 $2! = 2$ 项。三阶行列式的一项乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为三级排列,当 $j_1j_2j_3$ 取遍了三级排列时,即得到三阶行列式的所有项(不包含符号),共 $3! = 6$ 项。每一项的符号由以下原则所决定的,当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,对应的列标构成的排列为偶排列则取正号,为奇排列则取负号。

下面给出 n 阶行列式的定义

定义 3 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 是一个 n 级排列, $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 都按下列规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,带负号。因此, n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

n 级行列式的定义可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和。

当 $n=2$ 时就得到二阶行列式,当 $n=3$ 时就得到三阶行列式,一阶行列式 $|a|$ 就是 a 。

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$ 。

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 的值}$$

其中 $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$)。

解 记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

显然只要计算那些不为零的项的和即可。不妨设 $(-1)^{N(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$ 是一个不为零的项。因为第一行中只有 a_{11} 不为零, 即得 $k_1=1$, 而在第二行中只有 a_{21}, a_{22} 不为零, 但由于行列式的每一项都是取自不同行不同列的元素的乘积, 从 $k_1=1$ 可知 $k_2=2$, 由此类推可知 $k_3=3, \dots, k_n=n$, 故 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这项不为零, 而其余均为零, 即

$$D = (-1)^{N(1, 2, 3, \dots, n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

此行列式称为下三角形行列式。

同理可得上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

特殊情况

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

此行列式称为对角形行列式。

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线。

在行列式的定义中, 为了决定每一项的正负号, 要把 n 个元素按行指标排成自然顺序。由于数的乘法是可交换的, 因此这 n 个元素的次序是可以任意写的, 一般地, n 阶行列式中的一项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1, i_2 \cdots i_n, j_1, j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列, 利用排列的性质, 不难证明, 此一般项的符号等于 $(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 。

例如 $a_{21} a_{32} a_{14} a_{43}$ 是 4 阶行列式中的一项, $N(2314)=2, N(1243)=1$, 于是它的符号应为 $(-1)^{2+1} = -1$ 。如按行指标排列起来, 就是 $a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$, $N(4123)=3$ 因而它的符号也是 $(-1)^3 = -1$ 。

在行列式定义中, 如果把每一项按列指标排起来, 于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

1.3 行列式的性质

根据行列式表达式可得到行列式的下列性质。

性质 1 行列互换,行列式不变。

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的转置行列式,记为 D^T 或 D' ,即有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 表明,在行列式中行与列的地位是对称的,所以有关行的性质,对列也同样成立。

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式的值只改变符号。

证 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ (s \text{ 行}) \end{matrix}$$

交换第 i 行与第 s 行,得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ (s \text{ 行}) \end{matrix}$$

记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

它的因子是取 D 中 n 个不同行不同列的元素,而这 n 个元素也处于 D_1 中的不同行不同列,故它的乘积也是 D_1 的一般项的 n 元素乘积,它在 D 中的符号为

$$(-1)^{N(1 \cdots i \cdots s \cdots n) + N(j_1 \cdots j_i \cdots j_s \cdots j_n)}$$

由于 D_1 仅为 D 交换第 i 行和 s 行所得,因而它在 D_1 中的符号为

$$(-1)^{N(1 \cdots s \cdots i \cdots n) + N(j_1 \cdots j_s \cdots j_i \cdots j_n)}$$

从定理 1.1 可知 D_1 的一般项与 D 的一般项符号相反, 即得 $D_1 = -D$ 。

推论 在行列式中如有两行(列)完全相同, 则行列式的值为零。

因为交换此行列式中的相同的两行, 一方面可知此行列式不变, 另一方面由性质 2 可知所得行列式变符号, 即得 $D = -D$ 即 $2D = 0, D = 0$ 。

性质 3 把行列式 D 的一行(列)的所有元素都乘以 k , 所得的行列式 $D_1 = kD$ 。

证 因为行列式 D_1 的一般项都为 D 的一般项的 k 倍, 故有 $D_1 = kD$ 。

推论 1 如果行列式某行(列)的各元素有公因子, 则可把这公因子提到行列式外面。

推论 2 如果行列式中有两行元素对应成比例, 则行列式为零。

由推论 1 的保证, 可把这两行的比例系数提到外面, 即得到有相同两行的行列式, 由性质 2 可知此行列式为零。

性质 4 行列式具有如下的分行(列)相加性, $D = D_1 + D_2$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 因为 D 的一般项是

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

上面等式右端第一项是 D_1 的一般项, 第二项是 D_2 的一般项, 所以 $D = D_1 + D_2$

性质 5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上, 行列式不变。

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{s1} & a_{i2} + ka_{s2} & \cdots & a_{in} + ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

这里第一步是根据性质 4, 第二步是根据性质 2 的推论。

1.4 行列式按行(列)展开

定义 4 在行列式中, 划去元素 a_{ij} 所在的行和列的元素, 由剩下的元素按原来排列法构成的一个低一阶的行列式, 叫做 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} 。把 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 得到的式子叫做元素 a_{ij} 的代数余子式, 记作 A_{ij} 。即有

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ 例如在三阶行列式 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 中划去 } a_{23} \text{ 所在的第二行和第三列, 剩}$$

下的元素按原来排列法构成的二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, 便是元素 a_{23} 的余子式 M_{23} , 而 a_{23} 的代数余子式 $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 。

定理 3 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应代数余子式乘积的和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$

证 设 D_{ij} 是 n 阶行列式, 其 i 行元素除 a_{ij} 外均为零, D_{ij} 的其余的元素都与 D 相同, 则可知

$$D_{11} = - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为 D 的每一项都含有第一行中的元素, 但第一行中仅有 a_{11} 可能不为零, 所在 D 仅含有下面形式的项

$$(-1)^{N(j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a_{11} [(-1)^{N(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}]$$

等式右端括号内正是 D 中 a_{11} 余子式 M_{11} 的一般项, 所以 $D_{11} = a_{11} M_{11}$, 再由 $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$, 得 $D_{11} = a_{11} A_{11}$ 。对于 D_{ij} 来说, 可以将 D_{ij} 的第 i 行依次与第 $i-1, \cdots, 2, 1$ 各行交换后, 再将第 j 列依次与第 $j-1, \cdots, 2, 1$ 各列, 共经过 $i+j+2$ 次交换 D_{ij} 的行和列, 得

$$D_{ij} = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1j} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1j} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

从性质 4 可知

$$D = D_{11} + D_{12} + D_{13} \cdots + D_{1n} \quad \text{因此有} \quad D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}$$

显然这一结果对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$ 均成立。

同理可证将 D 按列展开的情况。

定理 4 n 阶行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零, 即

$$a_{i1} A_{s1} + a_{i2} A_{s2} + \cdots + a_{in} A_{sn} = 0 \quad (i \neq s)$$

或

$$a_{1j} A_{1t} + a_{2j} A_{2t} + \cdots + a_{nj} A_{nt} = 0 \quad (j \neq t)$$

证 将行列式 D 中的第 s 行元素换成第 i 行 ($i \neq s$) 的对应元素, 得有两行相同的行列式 D_1 由性质 2 推论可知 $D_1 = 0$, 再将 D_1 按 s 行展开, 得

$$D_1 = a_{i1} A_{s1} + a_{i2} A_{s2} + \cdots + a_{in} A_{sn} = 0 \quad (i \neq s)$$

同理可证 $a_{1j} A_{1t} + a_{2j} A_{2t} + \cdots + a_{nj} A_{nt} = 0 \quad (j \neq t)$ 。

1.5 行列式的计算

如何计算 n 阶行列式, 方法多样, 常用的方法是利用行列式的性质, 使行列式的某一行(列)尽可能多的元素化为零, 这称为造零运算, 再按此行(列)展开, 变为低一阶的行列式, 这称为降阶运算。如此继续下去, 直至三阶或二阶行列式。

例 4 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

解 利用行列式性质 5, 我们把第一行乘以 (-2) 加到第二行上, 把第一行乘以 1 加到第三行上, 可以使第一列除 1 以外的其他数都化为零得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$