系统辨识
与参数估计

张成乾　张国强　编著

机械工业出版社

系统辨识与参数估计

张成乾　张国强　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书阐述了受控系统建立数学模型必不可少的手段和方法，共分八章，包括数学模型、单输入单输出系统非参数模型的辨识、成批处理辨识算法、辨识算法的递推形式、阶的辨识、多输入多输出系统的辨识与参数估计、非线性和闭环系统的辨识、辨识实验设计等。

本书内容完整、层次清晰，可供自动化、计算机类各专业大学生、研究生作教学参考用，也可供有关工程技术人员学习和参考。

系统辨识与参数估计

张成乾　张国强　编著

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 16·字数 387 千字

1986 年 11 月北京第一版·1986 年 11 月北京第一次印刷

印数　0,001—4,100·定价 3.85 元

*

统一书号：15033·6492

前 言

1978年春，机械工业部在天津召开教学计划审定会，决定编写《系统辨识与参数估计》一书，作为计算机应用专业相应课程的教材。同年夏，在上海召开了教学大纲讨论会，确定由陕西机械学院负责编写，东北重型机械学院参加。随后，东北重型机械学院赵树春老师按时完成了附录部分，陕西机械学院曹曙光、张国强老师也做了大量工作。只是由于主编张成乾老师出国进修，拖延了整个进程，使该书未能按时出版。

1982年以来，恢复并成立了各类教材编审委员会。1983年冬，经自动化类教材编审委员会计算机应用教材编审小组研究，认为本书作为第一轮教材出版的遗留问题、又照顾到教学计划的实际变更，可作为教学参考书出版，并相应地决定了编写者和审稿者。这就是本书几经推迟、至今才和读者见面的简要回顾。

系统辨识和参数估计是一门蓬勃发展并得到广泛应用的新兴领域。国外学者称之为“一口袋技巧”。有些侧面目前仍在研究之中。作者在编写过程中所面临的第一个难题就是如何使丰富而凌乱的内容条理化、系统化。借助于从1981年开始对五届学生的教学经验，并吸取国内外教材的优点，确定了从非参数模型到参数模型、从成批处理到递推算法、从单输入单输出到多输入多输出的结构方式。这样的编排，层次清楚，由简到繁，易于理解。读者看了本书的目录并和其他参考书比较之后，不难得出这个结论。这是本书的第一个特点。第二个特点是考虑到系统辨识和参数估计所涉及到的基础知识较多，有些概率、数理统计方面的基础对于工科学生来说，是不那么容易理解的。在不失科学性的前提下，在叙述方面尽量多说上几句，有的地方还举了一些例子，目的在于加深物理概念的阐述。这是一种尝试，但是否成功，只能由读者来评判了。作者的意图是尽力做到由浅入深，由具体到抽象，便于读者自学。最后，本书不仅概括了他人的成果，同时也总结了一部分作者自己的研究成果。这算是第三个特点。所有这些算法的仿真程序，限于篇幅，只能割爱了。

本书可以作为自动化类各专业、计算机及其应用专业本科生、研究生的教学参考书。本科生用它作参考书时，第六章MIMO系统的辨识与参数估计可暂时省略。对于建立数学模型感兴趣的科学工作者、工程师，本书都有参考价值。

全书共有八章，张国强老师编写第二章和第六章，其余部分由张成乾完成。由清华大学韩曾晋老师担任主审。审稿人提出了许多宝贵的意见，使书稿避免了不少错误，并增色不少。同时，陕西机械学院自动控制教研室的许多老师也给予支持和帮助，这里一并致谢。赵树春老师所撰写的附录虽然最后定稿时没有采用，对他所作的贡献我们铭记在心！

由于作者学识浅陋，错误不妥之处一定极多，渴望读者赐教。

编者
1985.5

英文简写符号

SISO	Single Input Single Output	单输入单输出
MIMO	Multi Input Multi Output	多输入多输出
AR	Autoregressive	自回归
MA	Moving Average	滑动平均
ARMA	Autoregressive Moving Average	自回归滑动平均
LS	Least Square	最小二乘
WLS	Weighted Least Square	加权最小二乘
GLS	Generalized Least Square	广义最小二乘
IV	Instrumental Variable	辅助变量
EM	Extension Matrix	增广矩阵
ML	Maximum Likelihood	极大似然
PE	Prediction Error	预报误差
STA	Stochastic Approximation	随机逼近
OE	Output Error	输出误差
MV	Minimum Variance	最小方差
BLUE	Best Linear Unbiased Estimation	线性最佳无偏估计
MRAS	Model Reference Adaptive Scheme	模型参考自适应方案
W. P. 1	With Probability One	以概率 1

目　录

第一章 数学模型

系统辨识和参数估计是自动控制理论的一个分支，它在近二十年内得到了迅速的发展。要定量地、准确地分析一个受控系统的特性，一定要了解和掌握受控系统的数学模型。因此，数学模型的建立得到了人们普遍的关注。建立数学模型的工作简称为建模。辨识和参数估计就是建模的一种手段。本章介绍通过已知实验数据建模的基本概念和步骤，重点在于介绍几种常用的数学模型。这些数学模型的结构辨识和模型中参数的估计将在后续章节中陆续加以讨论。

§1-1 辨识与估计

关于什么是辨识，目前还没有一个统一的定义。本书采用的是比较实际、又为多数人所接受的提法：根据受控系统或受控过程的输入输出数据，从一类模型中，确定出一个在某种意义下最能代表该系统或该过程特性的数学模型。这种建模的方法就称为系统辨识，是一种利用输入输出数据建立受控系统数学模型的方法。除这种建模方法外，还可以用分析方法建模。用对系统内在机理的分析，利用众多的已知物理和化学定律，能量守恒和质量守恒等原则，列出数学关系式，从而推导出受控系统的数学模型。用分析法建模所得到的数学模型称为机理模型。如果受控系统比较复杂，机理模型事实上将很难推导出来。因而人们的兴趣转向系统辨识，通过实验数据建模。值得指出的是：辨识所得的模型只反映输入和输出之间的特性，对系统内在的信息反映不出来。因此，机理模型可以弥补辨识所得的模型在反映内在机理方面的不足。在条件许可的情况下，应该同时用辨识方法和分析方法建模，以便取长补短，互相补充。限于篇幅，本书只讨论系统辨识方面的问题。

为什么系统辨识和参数估计这个分支在近二十年内引起了控制理论工作者和控制工程师们的强烈兴趣呢？在六十年代，工程师们设计了从最简单的两位式控制和很复杂的多回路控制系统，控制质量有了很大提高。与此同时，控制理论的发展、推广和普及也达到了相当的水平。控制理论从经典理论发展到了以状态空间方法，Kalman滤波理论，Bellman 动态规划方法和Pontryagin的极大值理论为骨干内容的现代控制理论。最优控制理论已经取得了长足的进展。所有这些理论，都建立在受控系统数学模型已经建立的条件下，有的理论甚至还假设对噪声也已经有了了解。还有的理论要求一个特定的数学模型与之配合，而实际情况是要得到受控系统的数学模型并不是那样轻而易举。这就是理论与实际的脱节，也就是现代控制理论迟迟不能很顺利地应用到工业过程控制中去的主要障碍之一。可以这么说，理论上已经完全解决了最优控制的比较复杂的规律，但前提是受控系统的静态和动态特性的数学描述必须预先给出。为了弥合这个差距，系统辨识，即用实验取得的输入输出数据建模便得到了大发展。

从发展趋势看，不仅仅工业生产过程有建模的要求，以满足最佳控制和自适应控制的日益紧迫的需要。在其他工程领域，如生物工程，或者非工程领域，如经济、人口、生态环

境、社会等领域，也都提出了各自的建模需要，以得到生物模型（如人体的心脏起搏模型），经济模型，人口模型，生态模型和社会模型等等。

由于辨识过程是一个对输入输出数据进行处理的过程，没有近年来数字计算机硬件和软件的突破性进展作为支柱，辨识仍然会停留在一堆公式上而难于在实际中推广。计算机硬件可靠性的提高，软件的不断完善，价格的大幅度降低，都为辨识的顺利发展铺平了道路。

辨识的任务就是通过实验得到的输入输出数据，按一定的目标函数，从一类数学模型中确定出一个数学模型的结构。至于随着模型的参数化，还有相应的参数的确定问题，这就是参数估计。等到把参数都估计出来了，模型才算是最终建立起来了。辨识的含义比估计广泛一些，有的作者把参数估计包含在辨识当中，这样做也可以。

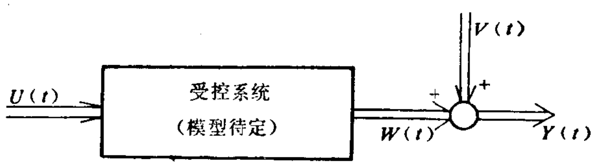

图1-1　噪声作用下的系统输入与输出

系统辨识时要用到如图 1-1 所示的输入与输出。

图中　$U(t)$为输入测试信号，m维；

$Y(t)$为能量测到的输出信号，r维；

$W(t)$为不包含任何噪声的理想输出，r维；

$V(t)$为折合到输出端的噪声，r维，不考虑输入端同时存在噪声的情况。

对于单输入单输出系统（SISO系统，Single Input Single Output系统），系统辨识的任务就是根据$U(t)$和$Y(t)$的数据序列，按一定的目标函数的要求，从一类数学模型中，确定这个模型的阶。而这个模型的参数则需要根据估计理论，确定一种算法，然后进行估计运算。对于多输入多输出系统（MIMO系统，Multi input Multi output系统）情况比较复杂，模型的结构要辨识，待估计的参数也相应地多得多。

§1-2　模　型　类　别

对于一个受控系统，人们在辨识它的数学模型之前往往不会对它一无所知。如果真的对受控系统一点也不了解，则称为黑箱问题。辨识黑箱的数学模型比较麻烦。幸好，人们总是可以对受控系统作一些调查，对它的情况有先验的部分了解，黑箱问题便退化为灰箱问题，辨识灰箱的数学模型相对地较为容易。根据事先的了解，把数学模型划分成若干类，模型类别很多，大致可列举于下。

1. 按受控系统的输入输出个数，分成单输入单输出模型（SISO模型）和多输入多输出模型（MIMO模型）两种。

2. 按受控系统参数的性质分为分布参数模型和集总参数模型两种。前者要用偏微分方程描述而后者只需用常微分方程表征。如果采用状态方程模型，则前者的状态方程是无限维的而后者则是有限维的。

3. 受控系统还有线性的和非线性的区分。线性集总参数的系统的数学模型用线性常微分方程描述，而非线性集总参数系统的数学模型则用非线性微分方程表征。实际上，大多数受控系统都是非线性而且又是分布参数的。为了简化运算，先是把参数集总，继而在工作点附

近加以线性化，得到线性增量模型。这时要特别注意模型的适用范围。

4. 按所要建立的模型在时间上是连续的还是离散的，有连续模型和离散模型两大类。对于工业生产过程来说，实际数学模型应该是连续的。由于用计算机进行数据处理，进入计算机的是经过采样之后的离散的输入输出序列，因而得到的是离散的数学模型。离散模型可以转换成连续模型，但也要注意到它们之间的不同。

5. 所要建立的模型还可以分参数模型和非参数模型两类。如连续模型用微分方程描述，离散模型用差分方程表征，一旦方程的阶数以及全部待定系数都确定了，数学模型便得到了。微分方程模型和差分方程模型都属于参数模型。如果用状态方程描述系统，状态方程的系数确定了，模型便确定了，也属于参数模型。如果辨识的是受控系统的频率响应、冲激响应和阶跃响应，应属于非参数模型的范围。

6. 按模型通过离线辨识得到还是在线辨识得到而分离线模型和在线实时模型两类。在离线辨识的情况下，允许积累大量的输入输出数据，然后成批地处理这些数据，从而得到一个满意的离线模型。离线辨识同时允许人们选择最合适的输入激励信号。另外，计算时间可长可短，不受限制，因而挑选估计算法的灵活性更大。离线辨识所得到的数字模型精度较高。在有些场合，譬如要进行自适应控制，在线实时辨识便提到日程上来。在线辨识的特点是：（1）不一定允许加入特殊的输入激励信号，而只依赖于正常运行数据。

（2）不必要也不可能存贮全部数据，因而降低了对计算机存贮容量的要求。

（3）必需应用递推算法而放弃成批处理算法。利用每次采样所得到的新信息，修正上一采样时刻参数的估计值。

（4）计算时间只允许占用采样周期的一部分，因而对计算机的运算速度提出较高要求，对算法的选择、程序的编制也有较多的讲究。

本书集中讨论以下内容：

1. 用相关法辨识SISO系统的非参数模型——冲激响应函数以及MIMO系统的冲激响应函数阵。

2. 集总参数线性和非线性SISO系统差分方程模型的辨识和参数估计。

3. MIMO系统差分方程模型和状态方程模型的辨识和参数估计。

下面介绍后续各章所用模型的数学表达式。

§1-3 冲激响应函数模型

冲激响应函数又称权函数，它是表征系统输入输出特性的基本形式之一。冲激响应函数反映了单位脉冲在 $t=0$ 时刻加到输入端后系统的响应。对于离散确定性 SISO 系统，可以用序列

$$\{h(i)\} \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{1-1}$$

表示。对于任意形式的输入，系统的输出可以由输入和冲激响应函数的卷积求得。在离散情况下，由式（1-2）所示的卷积的离散形式求取

$$y(k)=\sum_{i=k-\infty}^{k} h(k-i)u(i) \tag{1-2}$$

引入延迟一步算子q^{-1}，使

$$q^{-1}u(k)=u(k-1) \tag{1-3}$$

式（1-2）改写为

$$y(k)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n)+\cdots+b_\infty u(k-\infty) \tag{1-4}$$

式中

$$b_0=h(0)$$
$$b_1=h(1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_n=h(n)$$

式(1-4)还可以进一步化简成

$$y(k)=[b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_nq^{-n}+\cdots+b_\infty q^{-\infty}]u(k) \tag{1-5}$$

通过输入$u(k)$，$u(k-1)$，…，$u(k-\infty)$和输出$y(k)$，便可以算出b_0，b_1，…，b_∞，而b_0，b_1，…，b_∞便是冲激响应函数在时刻0，1，…，∞的离散值$h(0)$，$h(1)$，…，$h(\infty)$。从式（1-4）的外表看，b_0，b_1，…，b_∞似乎也是参数，但冲激响应函数模型归属于非参数模型，原因在于原则上这些参数的个数为无穷多个。

无穷项求和无疑给计算带来困难，事实上，任何实际稳定系统的冲激响应$h(t)$，当t大于某个数值时，它的值已趋于很小而加以忽略是合理的，式（1-2）简化成

$$y(k)=\sum_{i=k-p}^{k}h(k-i)u(i) \tag{1-6}$$

展开成

$$y(k)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_pu(k-p)$$

意思是计算k时刻的输出$y(k)$，只要考虑p时刻前的输入$u(k-p)$，以及$u(k-p+1)\cdots u(k)$的影响，而不必去考虑比p时刻还早一些的输入的作用，因为$h(p)$的值已经够小的了，$h(p+1)$的值可以忽略。

令

$$B(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_pq^{-p}$$

式（1-6）改写成

$$y(k)=B(q^{-1})u(k) \tag{1-7}$$

式(1-7)所示的离散模型称确定性的滑动平均模型（Moving Average Model），简称MA模型。输出是输入的滑动平均，$B(q^{-1})$中的系数就是冲激响应函数在各时刻的离散值。

当系统存在随机扰动时，其输入输出关系可以用随机模型表示如下

$$y(k)=B(q^{-1})u(k)+e(k) \tag{1-8}$$

式中$e(k)$为随机扰动。

现在问题的提法变成：输入信号$u(k)$是确定性的，而$y(k)$则受到扰动的污染，如已经测量到$u(k)$和$y(k)$，如何利用式（1-8）所示的MA模型把冲激响应函数的离散值b_0，b_1，…，b_p估计出来。为了充分地把各个特征时刻的冲激响应函数描述出来，p值不能取得太小，采样间隔不能选得太长，因而系数的个数将相当多。

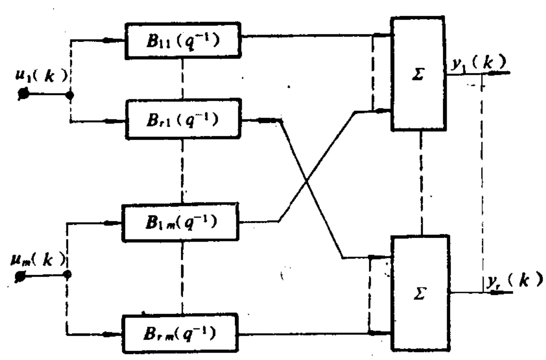

图1-2　MIMO系统的冲激响应函数阵

对于具有m个输入r个输出的MIMO系统，需要用冲激响应函数阵来描述，框图见图1-2，数学模型见式(1-9)。

$$
\begin{aligned}
y_1(k) &= b_{110}u_1(k)+b_{111}u_1(k-1)+\cdots+b_{11p}u_1(k-p)\\
&\quad +b_{120}u_2(k)+b_{121}u_2(k-1)+\cdots+b_{12p}u_2(k-p)\\
&\quad +\cdots\cdots\cdots\\
&\quad +b_{1m0}u_m(k)+b_{1m1}u_m(k-1)+\cdots+b_{1mp}u_m(k-p)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_r(k) &= b_{r10}u_1(k)+b_{r11}u_1(k-1)+\cdots+b_{r1p}u_1(k-p)\\
&\quad +b_{r20}u_2(k)+b_{r21}u_2(k-1)+\cdots+b_{r2p}u_2(k-p)\\
&\quad +\cdots\cdots\\
&\quad +b_{rm0}u_m(k)+b_{rm1}u_m(k-1)+\cdots+b_{rmp}u_m(k-p)
\end{aligned}
\tag{1-9}
$$

式(1-9)中b_{ijk}的含义是第j个输入对第i个输出，输入延迟k步的系数。i和y的下标一致，j和u的下标一致，k和延迟的步数一致。

令

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= b_{110}+b_{111}q^{-1}+\cdots+b_{11p}q^{-p}\\
B_{12} &= b_{120}+b_{121}q^{-1}+\cdots+b_{12p}q^{-p}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_{1m} &= b_{1m0}+b_{1m1}q^{-1}+\cdots+b_{1mp}q^{-p}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_{r1} &= b_{r10}+b_{r11}q^{-1}+\cdots+b_{r1p}q^{-p}\\
B_{r2} &= b_{r20}+b_{r21}q^{-1}+\cdots+b_{r2p}q^{-p}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_{rm} &= b_{rm0}+b_{rm1}q^{-1}+\cdots+b_{rmp}q^{-p}
\end{aligned}
\tag{1-10}
$$

将式(1-9)化简得

$$
Y(k)=B(q^{-1})U(k) \tag{1-11}
$$

式中输出向量$Y(k)=[y_1(k),\ y_2(k),\ \cdots y_r(k)]^T$

输入向量$U(k)=[u_1(k),\ u_2(k),\ \cdots,\ u_m(k)]^T$

冲激响应函数阵

$$
B(q^{-1})=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rm}\end{bmatrix}
$$

冲激响应函数阵$B(q^{-1})$共有$m\times r$个元素，其中任意一个$B_{ij}(q^{-1})$表示第j个输入和第i个输出之间的冲激响应函数，它的形式如式(1-10)，和式(1-7)中的相同。

§1-4 线性差分方程模型

一、线性定常SISO系统

设$u(k)$、$y(k)$分别表示系统的输入和输出在采样时刻k时的数值，联系$u(k)$和

$y(k)$的n_a阶差分方程模型的通式为

$$y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_{n_a}y(k-n_a)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_{n_b}u(k-n_b) \tag{1-12}$$

或可写成

$$y(k)+\sum_{j=1}^{n_a}a_jy(k-j)=\sum_{j=0}^{n_b}b_ju(k-j) \tag{1-13}$$

k为时间，取整数，a_j和b_j都是定常系数，系数的个数取决于差分方程的阶n_a和n_b，一般情况下，n_b应小于n_a。差分方程模型归属于参数模型。

引入后移算子q^{-1}，式(1-13)可改写成

$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k) \tag{1-14}$$

式中$A(q^{-1})$和$B(q^{-1})$为标量多项式，即

$$A(q^{-1})=1+a_1q^{-1}+\cdots+a_{n_a}q^{-n_a} \tag{1-15}$$

$$B(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_{n_b}q^{-n_b}$$

$A(q^{-1})$为首1多项式，$B(q^{-1})$多项式的首项为b_0。当$n_a=n_b=n$时，$A(q^{-1})$和$B(q^{-1})$的阶都是n。

式(1-14)所示的模型称为确定性的自回归滑动平均模型（Autoregressive Moving Average Model），简称ARMA模型。ARMA模型是系统辨识中应用十分广泛的一种模型。

设系统受到随机扰动的影响，则要用随机ARMA模型来描述系统的输入输出特性。它的形式是

$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k)+e_W(k) \tag{1-16}$$

式中，$e_W(k)$是均值为零、方差为σ^2的白噪声。

如噪声不是白噪声，而是白噪声经过一个动态过程的滤波，那么噪声模型也可以是自回归模型（AR模型），滑动平均模型（MA模型）或者自回归滑动平均模型（ARMA模型）。

MA噪声模型：

$$e(k)=C(q^{-1})e_W(k) \tag{1-17}$$

$$C(q^{-1})=1+C_1q^{-1}+\cdots+C_{n_c}q^{-n_c}$$

$C(q^{-1})$为首1多项式，阶为n_c，式(1-17)说明，噪声$e(k)$等于白噪声$e_W(k)$的滑动平均值。

AR噪声模型：

$$\left.\begin{aligned}&D(q^{-1})e(k)=e_W(k)\\ \text{或}\quad &e(k)=[1-D(q^{-1})]e(k)+e_W(k)\\ &D(q^{-1})=1+d_1q^{-1}+\cdots+d_{n_d}q^{-n_d}\end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

$D(q^{-1})$也为首1多项式，阶为n_d，式(1-18)说明，噪声$e(k)$等于它自身的、k时刻以前截止到$k-n_d$时刻的诸值的回归值，因而称为自回归。

ARMA模型：

$$D(q^{-1})e(k)=C(q^{-1})e_W(k) \tag{1-19}$$

噪声$e(k)$既包含了它自身的回归值，同时又包含了白噪声的滑动平均值，即

$$e(k)=[1-D(q^{-1})]e(k)+C(q^{-1})e_W(k) \tag{1-20}$$

把噪声模型考虑在内，在辨识文献中经常遇到的差分方程模型有以下几种形式

（1）
$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k)+C(q^{-1})e_W(k) \tag{1-21}$$
这是由瑞典的Astrom和Bohlin在1965年首先使用的模型，有时称可控的ARMA模型，简写成ARMAC模型。

（2）
$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k)+\frac{1}{D(q^{-1})}e_W(k) \tag{1-22}$$
改写成
$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k)+[1-D(q^{-1})]e(k)+e_W(k) \tag{1-23}$$
称Clarke模型，由英国的Clarke于1967年采用。

（3）由荷兰的Talmon和Van den Boom于1973年提出的模型
$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k)+\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_W(k)$$
或
$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k)+[1-D(q^{-1})]e(k)+C(q^{-1})e_W(k) \tag{1-24}$$
显而易见，式(1-24)是差分方程模型的一般形式，只要选择适当的$C(q^{-1})$和$D(q^{-1})$，即可包括所有的模型形式。它是最灵活的一种形式，也有可能是参数最少的一种形式。文献中有时称它为带噪声的ARMA模型，用ARMAX表示

回顾式（1-21）到式（1-24）所示的差分方程模型，有一点需要着重指出：在任意时刻k，只要该时刻及该时刻以前的输入、该时刻以前的输出已知，以及该时刻以前的噪声已知，上述这些模型中该时刻的输出都是和未知参数a_i，b_i，c_i，d_i（$i=1,2,\cdots$）成线性关系的，误差为该时刻的白噪声。这个事实给最小二乘估计方法的应用奠定了基础。可惜，只有k时刻及k时刻以前的输入输出值是可资利用的，而对噪声$e(k)$也要加以估计。因此，上述这些模型的输出称为是对对象参数a_i和b_j（$i=1,2,\cdots,n_a$；$j=1,2,\cdots,n_b$）的线性组合，但对噪声参数c_i和d_j（$i=1,2,\cdots,n_c$；$j=1,2,\cdots,n_d$）是非线性的。由于这个原因，参数估计时要经过适当的处理才能应用最小二乘估计方法，有关问题将在后续章节中介绍。

二、MIMO系统的差分方程模型

MIMO系统的结构图见图1-3，系统有m个输入和r个输出，假设m个输入对r个输出都有影响，而r个输出之间只在同一时刻没有相互之间的影响。m个输入互为独立。则输入输出关系式为

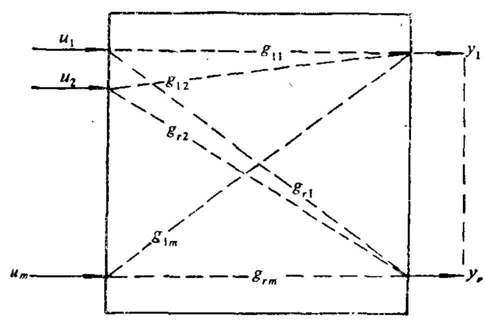

图1-3　MIMO系统结构图

$$\begin{aligned}
&y_1(k)+a_{111}y_1(k-1)+a_{112}y_1(k-2)+\cdots+a_{11n}y_1(k-n)\\
&\quad+a_{121}y_2(k-1)+a_{122}y_2(k-2)+\cdots+a_{12n}y_2(k-n)\\
&\quad+\cdots\cdots\\
&\quad+a_{1r1}y_r(k-1)+a_{1r2}y_r(k-2)+\cdots+a_{1rn}y_r(k-n)\\
&=b_{110}u_1(k)+b_{111}u_1(k-1)+\cdots+b_{11n}u_1(k-n)\\
&\quad+b_{120}u_2(k)+b_{121}u_2(k-1)+\cdots+b_{12n}u_2(k-n)\\
&\quad+\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$+b_{1m0}u_m(k)+b_{1m1}u_m(k-1)+\cdots+b_{1mn}u_m(k-n)$$

$$y_2(k)+a_{211}y_1(k-1)+a_{212}y_1(k-2)+\cdots+a_{21n}y_1(k-n)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a_{2r1}y_r(k-1)+a_{2r2}y_r(k-2)+\cdots+a_{2rn}y_r(k-n)$$

$$=b_{210}u_1(k)+b_{211}u_1(k-1)+\cdots+b_{21n}u_1(k-n)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+b_{2m0}u_m(k)+b_{2m1}u_m(k-1)+\cdots+b_{2mn}u_m(k-n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_r(k)+a_{r11}y_1(k-1)+a_{r12}y_1(k-2)+\cdots+a_{r1n}y_1(k-n)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a_{rr1}y_r(k-1)+a_{rr2}y_r(k-2)+\cdots+a_{rrn}y_r(k-n)$$

$$=b_{r10}u_1(k)+b_{r11}u_1(k-1)+\cdots+b_{r1n}u_1(k-n)$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$+b_{rm0}u_m(k)+b_{rm1}u_m(k-1)+\cdots+b_{rmn}u_m(k-n) \tag{1-25}$$

式中 a_{ijs} 表示第 j 个输出延迟 s 步对第 i 个输出的系数。

b_{ijs} 表示第 j 个输入延迟 s 步对第 i 个输出的系数。

如 a_{12n}，1 和第 1 个输出对应，即 $y_1(k)$ 对应。2 和第二个输出 $y_2(k)$ 对应，n 和第二个输出延迟 n 步对应，也即 a_{12n} 为 $y_2(k-n)$ 的系数，在 $y_1(k)$ 那一行中。

式（1-25）可以用向量矩阵差分方程表示，因而MIMO系统可以用向量矩阵差分方程模型来描述。

记输出向量为 $y(k)$，为 r 维

$$Y(k)=\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_r(k) \end{bmatrix}, \qquad Y(k-n)=\begin{bmatrix} y_1(k-n) \\ y_2(k-n) \\ \vdots \\ y_r(k-n) \end{bmatrix}$$

输入向量为 $U(k)$，为 m 维

$$U(k)=\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}, \qquad U(k-n)=\begin{bmatrix} u_1(k-n) \\ u_2(k-n) \\ \vdots \\ u_m(k-n) \end{bmatrix}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $r\times r$ 维

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & \cdots & a_{1r1} \\ a_{211} & a_{221} & \cdots & a_{2r1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r11} & a_{r21} & \cdots & a_{rr1} \end{bmatrix} \cdots \quad \boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{11n} & a_{12n} & \cdots & a_{1rn} \\ a_{21n} & a_{22n} & \cdots & a_{2rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1n} & a_{r2n} & \cdots & a_{rrn} \end{bmatrix}$$