Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（四）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（四）

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东人民印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 19印张 406千字

1980年8月第1版 1983年6月第3次印刷

印数：110,401—165,000

书号 13195·20 定价 2.05 元

出版说明

吉米多维奇（Б.П.ДЕМИДОВИЧ）著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻

易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　　录

第五章　级　数

§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1°一般概念　对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a^n, \tag{1}$$

若

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \quad （级数的和）$$

存在，式中$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则称级数（1）为收敛的。反之，则称级数（1）为发散的。

2°哥西准则　级数（1）收敛的充分且必要的条件为对于任何的$\varepsilon>0$，都存在有数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$和$p>0$时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon$$

成立.

特别是，若级数收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3°比较判别法Ⅰ. 设除级数（1）外，还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots. \tag{2}$$

若当$n\geqslant n_0$，不等式

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

成立，则 1）从级数（2）收敛可推得级数（1）收敛；2）从级数（1）发散可推得级数（2）发散。

特别是，当$n\to\infty$若$a_n\sim b_n$，则正项级数（1）和（2）同时收敛或同时发散。

4°比较判别法Ⅱ．设

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{①},$$

则（a）当$p>1$时级数（1）收敛，（б）当$p\leqslant 1$时级数（1）发散。

5°达朗伯耳判别法　若$a_n>0$（$n=1, 2, \cdots$）及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则（a）当$q<1$时级数（1）收敛，（б）当$q>1$时级数（1）发散。

6°哥西判别法　若$a_n\geqslant 0$（$n=1, 2, \cdots$）及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则（a）当$q<1$时级数（1）收敛，（б）当$q>1$时级数（1）发散。

7°拉阿伯判别法　若$a_n>0$（$n=1, 2, \cdots$）及

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则（a）当$p>1$时级数（1）收敛，（б）当$p<1$时级数（1）发散。

8°高斯判别法　若$a_n>0$（$n=1, 2, \cdots$）及

① 记号O^*的意义参阅第一章§6，1°。

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中$|\theta_n|<C$而$\varepsilon>0$，则（а）当$\lambda>1$时级数（1）收敛，（б）当$\lambda<1$时级数（1）发散；（в）当$\lambda=1$时，若$\mu>1$则级数（1）收敛；若$\mu\leqslant 1$则级数（1）发散.

9°哥西积分的判别法　若$f(x)$（$x>0$）是非负的不增函数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

与积分　$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

2546. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$.

解　由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

即所给级数收敛，且其和为$\frac{2}{3}$（以下有关各题省略这两句话）.

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right),$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3\text{.}$$

2549. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1\text{.}$$

2550. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

2551. (a) $q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$;

(б) $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$.

解 令$z=q(\cos\alpha+i\sin\alpha)=qe^{i\alpha}$，其中$i=\sqrt{-1}$.

于是得$|z|=|q|<1$，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha+i\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha \tag{1}$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-q\cos\alpha-iq\sin\alpha}$$

$$=\frac{(1-q\cos\alpha)+iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \tag{2}$$

比较（1）、（2）两式的实部及虚部，即得

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2};$$

(б) $$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha-1$$

$$=\frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}-1=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

2552. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 由于

$$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}$$
$$+\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$
$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}.$$

2553. 研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的收敛性.

解 记$x=k\pi$. 若k为整数，则由$\sin nx=0$知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$是收敛的，且其和为零. 若$k$非整数，我们以下将证$\sin nx$并不趋于零，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=0,$$

则当$n\to\infty$时也有$\sin(n+1)x\to 0$. 但是

$$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin x,$$

由$\sin(n+1)x\to 0$及$\sin nx\to 0$（当$n\to\infty$时）知$\cos nx\sin x\to 0$（当$n\to\infty$时），而$\sin x=\sin k\pi\neq 0$，故必有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0.$$

但

$$1=\sin^2 nx+\cos^2 nx.$$

令$n\to\infty$，两端取极限，即得左端为1而右端为0，这就产生了1与0相等的谬论. 这个矛盾证明了此假

设不真，也即 $\sin nx \not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的发散性获证。

2554. 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n，其中 A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1=1，\ p_1<p_2<\cdots)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n,\ \cdots,$$

则 $l_n=\sum_{i=1}^{n} A_i=\sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S. 因此，

$$\lim_{n\to\infty} l_n=\lim_{n\to\infty} S_{p_{n+1}-1}=S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和.

反之不真. 例如，级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

2555. 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的，而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，记其和为 S。考虑原级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，并注意到 $a_k>0$ $(k=1, 2, \cdots)$，故存在 n_0，使

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k<\sum_{l=1}^{n_0} A_l<S .$$

显然 $S_n<S_{n+1}$ 对一切 n 成立。于是，$\{S_n\}$ 单调上升且有界。因此，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在有限，即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

研究下列级数的收敛性：

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 由于通项 $a_n=(-1)^{n-1}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限不存在，更不可能趋于零，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散。

2557. $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1\neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ 发散。

2558. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)-1=e-1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛，且其和为$e-1$。

2559. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$.

解 由于$\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}>0$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$也发散。

2560. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\cdots+\frac{1}{1000n+1}+\cdots$.

解 由于$\frac{1}{1000n+1}\geqslant\frac{1}{1001n}$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1001n}$发散，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$也发散。

2561. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$发散。

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$.

解 由于 $0<\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛。

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

解 由于 $0<\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 也收敛。

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

解 由于 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n}>0$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 也发散。

2565. 证明，由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的。

证 设等差级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$，其中 d 为公差。

当 $d>0$ 时，总存在正整数 n_0，使 $a<(n_0-1)d$，则当 $n\geqslant n_0$ 时，总有 $a+(n-1)d<2(n-1)d$. 于是，

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$