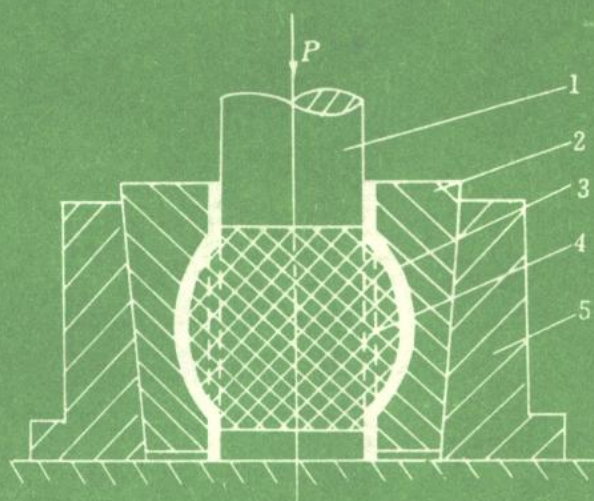


金属塑性加工 理论与工艺

罗子健 主 编
尚保忠 副主编



西北工业大学出版社

450408

TG301
199-2

金属塑性加工理论与工艺

罗子健 主 编
尚保忠 副主编

西北工业大学出版社

西北工业大学出版社

1996年3月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书是根据理论联系实际和学以致用原则,综合阐述金属塑性加工理论、锻造和冲压工艺与模具设计方面的教科书。

本书共分十一章。第一章说明金属塑性加工在国民经济中的作用和分类;第二章至第七章阐述金属塑性加工基本理论;第八、九章讨论锻造工艺和模具设计原则;第十章说明冲压工艺制定方法和模具设计原则;第十一章简要介绍锻造和冲压新工艺与 CAD/CAM。

本书可作为高等理工院校热加工专业类的教材,也可供热加工工艺及设备专业的工程技术人员参考。

DL41/10

金属塑性加工理论与工艺

主 编 罗子健 副主编 尚保忠

责任编辑 王 璐

责任校对 樊 齐

*

© 1996 西北工业大学出版社出版发行

(710072 西安市友谊西路 127 号 电话 8493844)

陕西省新华书店经销

西安丰华印刷厂印装

ISBN 7-5612-0851-0/TG·26

*

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 19 字数 460 千字
1994 年 12 月第 1 版 1996 年 3 月第 2 次印刷
印数: 1 501—4 500 册 定价: 17.50 元

前 言

本书是为航空高校热加工工艺及设备专业类铸造和焊接两个专业的学生学习主干课程“金属塑性成形原理及其工艺”而编写的。

本书共十一章。第一章着重说明金属塑性加工在国民经济中的作用和金属塑性加工的分类。第二章到第四章介绍金属塑性加工的力学基础。第五章和第七章内容属于金属塑性加工的物理化学基础。第六章介绍常用的金属塑性加工过程力学分析方法。第八章到第十章包含锻压工艺及其模具设计原则。第十一章阐述锻压新工艺和 CAD/CAM 的基本概念。为了读者掌握所学的内容,各章均有思考题和习题。这样安排内容,是为了在理论紧密联系实际的前提下,使读者掌握金属塑性加工基本原理及锻压工艺和模具设计的基本知识,并了解锻造和冲压这两种塑性加工方法的新进展,从而具备从事锻造和冲压方面的设计、制造和研究开发工作的能力。

参加本书编写工作的有西北工业大学罗子健(第一、二章和第六章的第五、六两节),俞汉清(第六章的第一到四节),龚义吉(第八章和第九章的第一到十一节),李森泉(第十章和第十一章的第五节),南昌航空工业学院尚保忠(第三到五章),傅铭旺(第七章),王高潮(第九章的第十二、十三节和第十一章的第一到四节)。全书由罗子健和尚保忠分别担任正、副主编。

本书由西安交通大学汪大年教授审稿。在审阅过程中,汪大年教授提出了不少宝贵意见和建议性的建议,作者表示衷心的感谢。

这本教材是国内第一本将金属塑性加工理论和工艺融为一体的教科书,因而编写本教材是一项相当困难的任务。两校参加编写工作的人员,在长期教学工作经验和取得的科研成果的基础上,参考国内外近年出版的有关图书资料,努力按照课程基本要求编写这本教科书。但由于编写此类教材尚属初次,难免有疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

1993 年 12 月 2 日

目 录

第一章 绪论	1
1.1 金属塑性加工在国民经济中的地位	1
1.2 金属塑性加工方法的分类	1
1.3 课程的目的和内容	2
第二章 应力和应变	3
2.1 应力和应力状态	3
2.2 主应力和主剪应力	7
2.3 应力偏量,八面体应力和等效应力	11
2.4 应力莫尔圆	15
2.5 平衡微分方程	16
2.6 应变状态的表示方法	18
2.7 应变与相对位移的关系	21
2.8 应变张量及其主要结论	24
2.9 应变增量和应变速率张量	27
2.10 平面问题和轴对称问题	29
思考题与习题	32
第三章 屈服准则和塑性应力-应变关系	34
3.1 屈服的概念	34
3.2 屈雷斯加(Tresca)屈服准则	34
3.3 米赛斯(Mises)屈服准则	36
3.4 屈服准则的几何表示	36
3.5 两个屈服准则的比较和加工硬化材料的屈服准则	41
3.6 屈服准则的应用要点	43
3.7 广义虎克定律	44
3.8 增量理论(流动理论)	47
3.9 全量理论	50
3.10 最大耗散功原理	51
思考题与习题	52
第四章 加工硬化和塑性失稳	54
4.1 单向拉伸试验	54

4.2 真应力-应变曲线的数学表达	57
4.3 压缩试验	60
4.4 双向等拉试验和扭转试验	63
4.5 应变速率和温度对流动应力的影响	64
4.6 塑性失稳与成形极限	66
思考题与习题	73
第五章 塑性加工过程中的摩擦与润滑	74
5.1 塑性加工过程中摩擦的特点	74
5.2 摩擦对塑性加工过程的影响	74
5.3 润滑机理	75
5.4 描述接触面上摩擦的数学模型和影响摩擦的因素	77
5.5 摩擦系数的测定	79
5.6 塑性加工时常用的润滑剂和润滑方法	81
思考题与习题	83
第六章 塑性成形过程的力学分析方法	84
6.1 力学分析方法的一般原理	84
6.2 主应力法及其应用	85
6.3 逐次单元分析法及其应用	101
6.4 滑移线法及其应用	107
6.5 上限法及其应用	136
6.6 有限元方法及其应用概述	142
思考题与习题	144
第七章 金属的塑性和变形抗力	147
7.1 塑性和变形抗力	147
7.2 变形温度和变形速度对塑性和变形抗力的影响	149
7.3 应力状态对塑性和变形抗力的影响	152
7.4 金属的超塑性	154
思考题与习题	158
第八章 锻造前加热和自由锻	159
8.1 锻造前加热	160
8.2 自由锻设备和工序	164
8.3 自由锻工艺的制订	167
8.4 胎模锻造	170
思考题与习题	171

第九章 模锻工艺及模具设计原则	173
9.1 锤上模锻的特点	173
9.2 锻件图设计	174
9.3 锤上模锻的工艺过程	177
9.4 模锻型槽设计	178
9.5 制坯型槽设计和坯料尺寸确定	181
9.6 锤锻模结构设计	189
9.7 设备选择以及锻模的选材和使用维护	190
9.8 切边与冲孔模的设计原则	191
9.9 曲柄锻压机上模锻特点	194
9.10 螺旋压力机模锻特点	196
9.11 平锻工艺及应用	197
9.12 辊锻	200
9.13 液态模锻	203
思考题与习题	206
第十章 冲压工艺和模具设计原则	208
10.1 冲裁	209
10.2 弯曲	222
10.3 拉深	229
10.4 胀形与翻边	240
10.5 冲压件的工艺性	249
10.6 冲模结构与设计	254
思考题与习题	263
第十一章 锻压新工艺和 CAD/CAM	264
11.1 静液挤压	264
11.2 超塑成形	269
11.3 粉末锻造	275
11.4 CAD/CAM 基础及其在锻压生产中的应用	281
11.5 液电成形与电磁成形	289
思考题与习题	292
参考文献	294

第一章 绪 论

1.1 金属塑性加工在国民经济中的地位

金属塑性加工是金属加工方法之一。它是利用金属的塑性，通过外力使金属发生塑性变形，成为具有所要求的形状、尺寸和性能的制品的加工方法。因此，这种加工方法过去称为金属压力加工或金属塑性成形。

由于金属塑性加工是通过塑性变形得到要求制件的，因而是一种少（无）切屑加工方法。金属塑性加工时，一个零件一般是在设备的一个行程或几个行程内完成的，因而生产率很高。对于一定重量的零件，从力学性能、冶金质量和使用可靠性看，一般说来，金属塑性加工比铸造或机械加工方法优越。由于上述情况，金属塑性加工在汽车、拖拉机、宇航、船舶、兵工、电器和日用品等工业部门获得广泛应用。仅就航空工业而言，机身各分离面间的对接接头、机翼大梁，发动机的压气机盘和涡轮盘、整流罩和火焰筒等重要零件或其毛坯都是用金属塑性加工方法制成的。

1.2 金属塑性加工方法的分类

金属塑性加工可以分为两大类：体积成形和板料成形。

1. 体积成形

体积成形所用的坯料一般为棒材或扁坯。当体积成形时，坯料经受很大的塑性变形，使坯料的形状或横截面以及表面积与体积之比发生显著的变化。由于体积成形过程中工件上绝大部分经受较大的塑性变形，因而成形后基本上不发生弹性恢复现象。

属于体积成形的典型塑性加工方法有挤压（图 1.1 (a)），锻造（图 1.1 (b)），轧制（图 1.1 (c)）和拉拔（图 1.1 (d)）等。

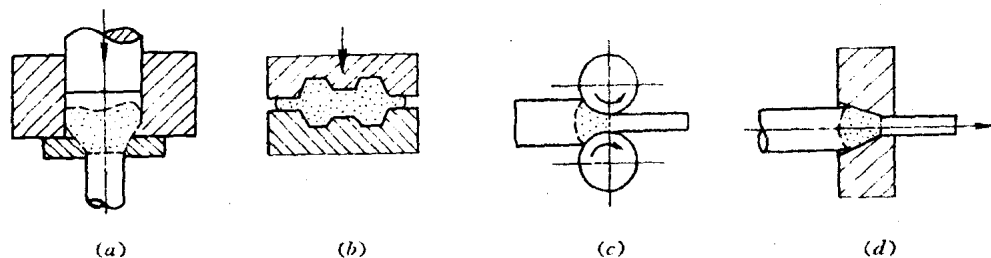


图 1.1 体积成形的典型例子
(a) 正挤压 (b) 开式模锻 (c) 轧制 (d) 拉拔

2. 板料成形

板料成形所用坯料是各种板材或用板材预先加工成的中间坯料。在板料成形过程中, 坯料的形状发生显著变化, 但其横截面形状基本上不变。当板料成形时, 弹性变形在总变形中所占比例是比较大的, 因此, 成形后会发生弹性回复或回弹现象。

板料成形一般称为冲压。这类塑性加工方法可进一步分为分离工序和成形工序两类。分离工序用于使冲压件与板料沿一定的轮廓线相互分离, 其典型例子是冲裁 (图 1.2 (a))。成形工序用来使坯料在不破坏的条件下发生塑性变形, 成为具有要求形状和尺寸的零件, 其典型例子是拉深 (图 1.2 (b))。

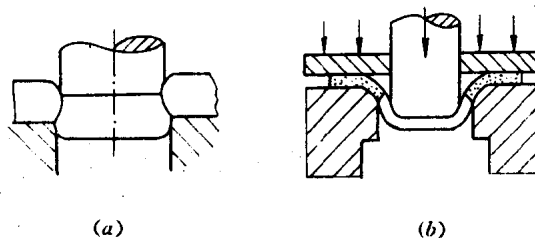


图 1.2 板料成形的典型例子

(a) 冲裁 (b) 拉深

1.3 课程的目的和内容

金属塑性成形原理及其工艺课程是航空高校热加工工艺及设备专业主干课程之一, 目的是使本专业的学生掌握塑性加工基本理论以及锻造和冲压的专门知识, 以便从事锻造和冲压的设计、生产、研究开发与技术管理工作。

根据课程目的, 本教材的主要内容如下:

(1) 塑性加工基本理论, 为了解锻造和冲压过程中金属流动规律、坯料内的应力-应变状态和各种新工艺以及掌握变形力计算方法提供理论基础。

(2) 坯料与模具界面上的摩擦以及金属的塑性和成形极限等塑性加工的物理-化学方面的知识, 为提高锻造和冲压过程的技术经济效益提供方向。

(3) 锻造和冲压的基本工序和模具设计以及设备选择方法, 以便从事锻造和冲压方面的实际工作。

(4) 锻造和冲压工艺以及模具设计方面的新成就, 以促进学科交叉, 拓宽学生的知识面。

第二章 应力和应变

金属塑性加工过程，实质上是工件在外力作用下的塑性变形过程。工件内各部位的应力和应变情况分别称为应力状态和应变状态，统称应力-应变状态。塑性加工过程能否实现、加工过程效率、加工材料的利用率以及加工产品的质量都直接与工件内的应力-应变状态密切相关。因此，了解塑性加工过程中工件内的应力-应变状态是十分重要的问题。在这一章中，将集中介绍研究工件内应力-应变状态必要的基础知识。鉴于应力-应变状态都可用二阶对称张量表示，有许多相似性质，因此，将这部分内容归在一章讨论，以便在讲述有关应力状态问题后，不经繁琐推导，直接引出分析应变状态必需掌握的内容。

2.1 应力和应力状态

2.1.1 外力和应力

物体所受的外力可分为两类。一类是作用在物体表面上的力，叫做面力或接触力。它可以是集中力，但一般是分布力。另一类是作用在物体每个质点的力，例如重力、磁力和惯性力等，叫做体积力。分析塑性加工过程时，除了个别情况，体积力一般忽略不计。

在外力作用下，物体内部各质点之间就会产生相互作用的力，叫做内力。单位面积上的内力叫做应力。图 2.1 表示一物体受外力系 $P_1, P_2, \dots$ 的作用而处于平衡状态。设 Q 为物体内部任意一点，过 Q 点作一法线为 N 的平面 A ，将物体切开，移去上半部。这样，平面 A 可看成是物体下半部的外表面，作用在平面 A 上的内力应与物体下半部其余的外力保持平衡。这样，内力问题就可转化为外力问题处理。

在平面 A 上围绕 Q 点切取一很小的面积 ΔF 。设该面积上内力的合力为 ΔP ，则按应力的定义，平面 A 上 Q 点的全应力

$$S = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} \quad (2.1)$$

式中 S 为平面 A 上 Q 点的全应力。

全应力 S 可以分解成两个分量，一个垂直于面 A ，叫做正应力，一般用 σ 表示；另一个平行于面 A ，叫做剪应力，用 τ 表示（图 2.1）。显然，

$$S^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2.2)$$

现分析单向均匀拉伸时的应力状态（图 2.2）。通过试棒内 Q 点可以作无限多个切面。在与拉伸方向垂直的切面 F_0 上，正应力 σ_0 等于全应力 S_0 ，即

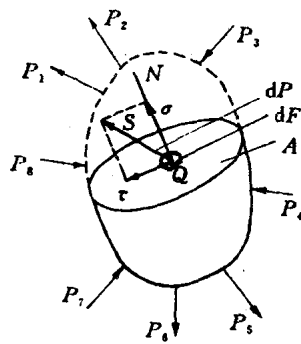


图 2.1 面力，内力和应力

$$\sigma_0 = S_0 = \frac{P}{F_0} \quad (2.3)$$

如过Q点作一切面A,其外法线N与拉伸轴成 θ 角,将试样切开而移去上半部。由于均匀拉伸,所以A面上的应力是均匀分布的。因此,过Q点的这一切面上,正应力和切应力分别可按下列公式确定:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{P \cos \theta}{A} = \frac{P \cos \theta}{F_0 / \cos \theta} \\ &= \sigma_0 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\tau_\theta = \frac{P \sin \theta}{A} = \frac{P \sin \theta}{F_0 / \cos \theta} = \sigma_0 \sin \theta \cos \theta \quad (2.5)$$

以上两式中, σ_θ 和 τ_θ 分别为过Q点的A面上的正应力和剪应力。

根据式(2.2),过Q点的A面上的全应力为

$$S_\theta = \sigma_0 \cos \theta \quad (2.6)$$

式中 S_θ 为过Q点的A面上的全应力。

从以上分析可知,在单向均匀拉伸的情况下,通过Q点的不同切面上,应力是不同的。只要知道过Q点一个切面上的应力,就可确定过Q点的任意切面上的应力。但是,在复杂的受力状态下,过一点的某一切面上的应力并不能确定过该点任意切面上的应力。也就是说,一般情况下,某一方向切面上的应力不能全面表示一点的应力状态。

2.1.2 变形体内一点的应力状态

设P为受力物体中任意一点。围绕P用微分面切取一正六面体,其棱边分别与三坐标轴平行,并处于平衡状态(图2.3)。一般情况下,有力作用在各微分面上。这些力沿坐标轴分解为三个分量,并分别除以所作用的微分面积,就可确定各微分面上的三个应力分量:一个正应力和两个剪应力。

在图2.3所示坐标系中,各微分面都可用各自的法线方向命名。如ABCD面为x面,CDEF面为y面等。这样,每个应力分量就可带两个下角标的符号表示。第一个下角标表示该应力分量的作用面,第二个下角标表示其作用方向。两个下角标相同的应力分量为正应力,例如, σ_{xx} 表示x面上平行x轴的正应力分量,一般简写为 σ_x 。两个下角标不同的是剪应力分量。例如, τ_{xy} 为x面上平行y轴的剪应力分量。

应力分量的正、负号确定方法如下:规定外法线指向坐标轴正向的微分面为正面,外法线指向坐标轴负向的为负面;对于正面,指向坐标轴正向的应力分量取正号,指向负向的取负号;对于负面,情况正好相反。按上述规定,图2.3上所示的应力分量都是正的。

由于单元体处于平衡状态,所以对于任何轴线的合力矩必须等于零。由此可导出以下关系:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.7)$$

式(2.7)所示关系称为剪应力互等定律。这一定律表明,剪应力总是成对出现的。

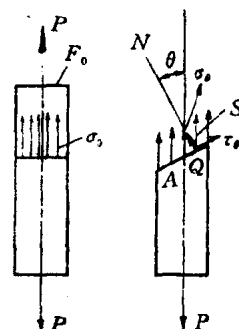


图 2.2 单向均匀拉伸时的应力状态

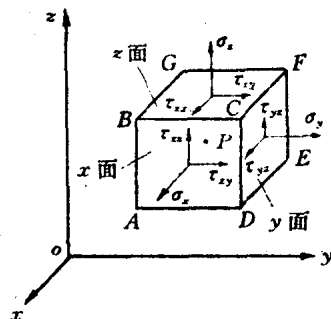


图 2.3 单元体上的应力分量

设有一任意方向的斜微分面 ABC ，将表征 Q 点的单元体切成一个四面体 $QABC$ (图 2.4)。微分面 ABC 上的应力就是 Q 点在任意切面上的应力。这应力可通过四面体 $QABC$ 的平衡条件求得。

设微分面 ABC 的外法线 N 的方向余弦为 l, m, n ，则

$$l = \cos(N, x) \quad m = \cos(N, y) \quad n = \cos(N, z)$$

设微分面 ABC 的面积为 dF ，微分面 QBC (x 面)， QCA (y 面)， QAB (z 面) 的面积分别为 dF_x, dF_y, dF_z ，则

$$dF_x = l dF \quad dF_y = m dF \quad dF_z = n dF$$

设微分面 ABC 上的全应力为 S ，它沿三个坐标轴的分量为 S_x, S_y, S_z 。根据 x 方向平衡条件

$$S_x dF - \sigma_x l dF - \tau_{yx} m dF - \tau_{zx} n dF = 0$$

可得

$$S_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

同理可得

$$S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n$$

$$S_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

(2.8)

于是，微分面 ABC 上的全应力

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \quad (2.9)$$

微分面 ABC 上的正应力 σ 就是 S 在外法线 N 上的投影，也等于 S_x, S_y, S_z 在外法线 N 上投影之和，即

$$\sigma = S_x l + S_y m + S_z n \quad (2.10)$$

将式 (2.8) 代入上式，并考虑到式 (2.7)，整理后可得

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 \\ &\quad + 2(\tau_{xy} l m + \tau_{yz} m n + \tau_{zx} n l) \end{aligned} \quad (2.11)$$

由于 $S^2 = \sigma^2 + \tau^2$ ，所以，斜微分面上的剪应力

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2 \quad (2.12)$$

在以上讨论中，坐标系的选取是任意的。因此，对于受力物体中任一质点，只要知道过该点的三个正交微分面上的六个应力分量，则过该点的任意切面上的应力就可根据式 (2.8) ~ (2.12) 确定。也就是说，一点的应力状态取决于六个应力分量： $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 。

如斜微分面 ABC 为物体外表面的一部分，作用在其上的表面力 T 沿坐标轴的分量为 T_x, T_y, T_z ，根据式 (2.8) 可以得到

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ T_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ T_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (2.13)$$

式 (2.13) 称为应力边界条件。

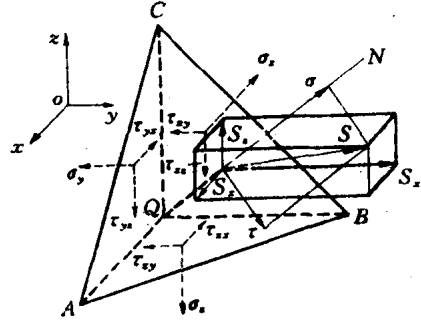


图 2.4 斜微分面上的应力

2.3 应力张量*

前面已经指出,在 $oxyz$ 坐标系中,受力物体中一质点的应力状态,可由过该点并与坐标面平行的三个正交微分面上的九个应力分量 σ_{ij} ($i, j=x, y, z$) 表示。如选取另一坐标系 $ox'y'z'$, 则该点的应力状态也可由过该点、与新坐标系的坐标面平行的三个正交微分面上的九个应力分量 σ_{kl} ($k, l=x', y', z'$) 表示。设想图 2.4 中的斜微分面的外法线 N 正好是新坐标系 $ox'y'z'$ 的 x' 轴。因此,斜微分面在原坐标系中的 σ 就是该点在新坐标系中的 $\sigma_{x'}$ 。斜微分面的外法线 N 在原坐标系中的方向余弦 l, m, n 就是 x' 轴在原坐标系中的方向余弦,可改写成 l_{xx}, l_{xy}, l_{xz} 。这样,根据式 (2.8) 和式 (2.11) 可得

$$\begin{aligned} S_j &= \sigma_{ij} l_{ji} \\ \sigma_{x'} &= \sigma = S_j l_{jx'} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{jx'} \end{aligned} \quad (a)$$

如新坐标系的另两个坐标轴 y', z' 在原坐标系中的方向余弦为 l_{yi} 和 l_{zi} , 则将 S_j 分别投影到 y' 和 z' 方向, 也即分别乘以 $l_{jy'}$ 和 $l_{jz'}$, 即可求得新坐标系中 x' 面上的两个剪应力分量:

$$\tau_{x'y'} = \sigma_{x'y'} = S_j l_{jy'} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{jy'} \quad (b)$$

$$\tau_{x'z'} = \sigma_{x'z'} = S_j l_{jz'} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{jz'} \quad (c)$$

式 (a)、(b) 和 (c) 可合写成

$$\sigma_{x'k} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{jk} \quad k = x', y', z' \quad (d)$$

同理可得 y' 面和 z' 面上的应力分量为

$$\sigma_{y'k} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{jk} \quad k = x', y', z' \quad (e)$$

$$\sigma_{z'k} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{jk} \quad k = x', y', z' \quad (f)$$

综合式 (d)、(e) 和 (f) 可得

$$\sigma_{kl} = \sigma_{ij} l_{ji} l_{lk} \quad k, l = x', y', z' \quad (g)$$

如采取不同的坐标系, 表示一质点应力状态的九个应力分量将有不同的数值。但式 (g) 表明, 不同坐标系的九个应力分量之间存在线性变换关系, 即满足本章注式 (A2.1.1) 所示关系。因此, 表示点应力状态的九个应力分量构成一个二阶张量, 称为应力张量, 可用下列记号表示:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

由于 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ 和 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, 所以应力张量是二阶对称张量。根据张量的性质, 应力张量可以叠加和分解。由于应力张量是二阶对称张量, 则一定存在三个主方向和三个主值 (主应力) 以及三个独立的应力不变量。

式 (2.14) 所示为直角坐标中应力张量的一般形式。但分析塑性加工过程时, 有时采用圆柱坐标或球坐标比较方便。考虑到这种情况, 以下介绍这两种坐标中应力张量的一般形式。

在圆柱坐标中, 一点的位置由向径 ρ , 极角 θ 和坐标 z 确定。因此, 在这种坐标系中, 一点的应力状态可由相互正交的 ρ 面、 θ 面和 z 面上的应力分量表示 (图 2.5)。这样, 在圆柱坐

* 建议阅读这一节前, 先参阅本章注

标中一点的应力张量的一般形式为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{r\varphi} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta\varphi} \\ \tau_{\varphi r} & \tau_{\varphi\theta} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

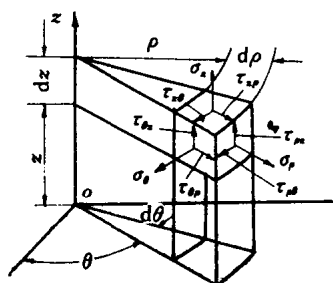


图 2.5 圆柱坐标中单元体上的应力分量

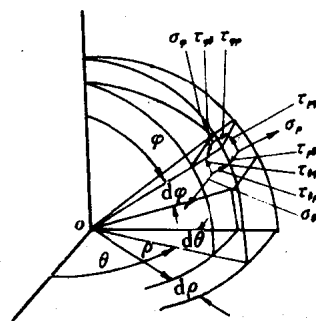


图 2.6 球坐标中单元体上的应力分量

在球坐标中，一点的位置由向径 ρ 以及两个角度 θ 和 φ 确定。因此，在这种坐标系中，点的应力状态可由相互正交的 ρ 面、 θ 面和 φ 面上的应力分量表示（图 2.6）。这样，在球坐标中应力张量的一般形式为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho\varphi} \\ \tau_{\theta\rho} & \sigma_\theta & \tau_{\theta\varphi} \\ \tau_{\varphi\rho} & \tau_{\varphi\theta} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.2 主应力和主剪应力

2.2.1 主应力和应力不变量

从式 (2.11) 和 (2.12) 可知，如表示一点应力状态的应力分量已知，斜微分面上的正应力 σ 和剪应力 τ 将随外法线 N 的方向，即 l, m, n 的数值而变。当 l, m, n 在某一组合情况下，斜微分面上的全应力 S 和正应力 σ 重合，使剪应力 $\tau=0$ 时，这种正应力称为主应力，其作用面和作用方向分别称为主平面和主方向。

为了求得主应力和主方向，假定图 2.4 中外法线方向余弦为 l, m, n 的斜微分面 ABC 为主平面，即这平面上的剪应力 $\tau=0$ 。因此，该微分面上的主应力 $\sigma=S$ 。从而可知，此主应力 σ 在三坐标轴方向上的投影分别为 S_x, S_y 和 S_z ，即

$$S_x = l\sigma \quad S_y = m\sigma \quad S_z = n\sigma$$

将上列各式代入式 (2.8)，整理后可得

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (a)$$

式 (a) 是以 l, m, n 为未知数的齐次线性方程组，其解就是主应力的方向（应力主轴）。此

方程组的一组解是 $l=m=n=0$ 。因为方向余弦之间必须满足 $l^2+m^2+n^2=1$ ，所以方向余弦不能同时为零。因此， $l=m=n=0$ 并非方程组的解。式 (a) 所示齐次线性方程组存在非零解的条件是，方程组的系数构成的行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (b)$$

将行列式展开，整理得

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (2.17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

式 (2.17) 称为应力状态的特征方程。可以证明，式 (2.17) 一定有三个实根，即存在三个主应力，一般用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 表示。将求得的每一个主应力代入式 (a) 中任意两个方程，然后与 $l^2+m^2+n^2=1$ 联立求解，就可确定该主应力的方向余弦，即一个主方向。也可以证明，三个主方向是相互正交的。

对于一个确定的应力状态，三个主应力是唯一的，因此，特征方程 (2.17) 的系数 J_1 、 J_2 和 J_3 的数值与坐标系的选择无关。也就是说，尽管应力张量的各分量随坐标系而变化，但 J_1 、 J_2 和 J_3 的数值是不变的。所以， J_1 、 J_2 和 J_3 分别称为应力张量的第一，第二和第三不变量。这些应力不变量与材料的物理性能密切相关。此外，还可根据它们判断应力状态的异同。

例 2.1 如一点的应力状态为 $\sigma_x=10$ ， $\sigma_y=5$ ， $\tau_{xy}=3$ 以及 $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ (应力单位为 MPa)，因此， z 方向为一主方向。试求其三个主应力。

解 按式 (2.18)， $J_1=15$ ， $J_2=-41$ ， $J_3=0$ 。将所得结果代入式 (2.17)，可得

$$\sigma^3 - 15\sigma^2 + 41\sigma = 0$$

解以上方程，得到 $\sigma_1=11.4$ ， $\sigma_2=3.6$ ， $\sigma_3=0$ 。

例 2.2 除 $\sigma_z=8$ 以外，其余应力分量同例 2.1。试求其三个主应力。

解 $J_1=23$ ， $J_2=-161$ 和 $J_3=328$ 。

$$\sigma^3 - 23\sigma^2 + 161\sigma - 328 = 0$$

解以上方程。可求得 $\sigma_1=11.4$ ， $\sigma_2=8$ ， $\sigma_3=3.6$ 。

以上两个例子说明，如 z 方向为一个主方向，那末其余两个主应力与 σ_z 无关。

因为一点的应力状态完全由三个正交微分面上的应力分量确定，因此，可用三个相互正交的主平面上的应力分量 (主应力) 表示一点的应力状态。这样，由于应力张量中只有三个分量 σ_1 ， σ_2 ， σ_3 ，使得运算简化。同时，用主应力表示的应力状态可以衡量金属的变形性。

以主应力表示应力状态时，斜微分面上各种应力的计算公式可以直接从式 (2.8) ~ (2.12) 导出：

沿坐标轴的应力分量

$$S_1 = \sigma_1 l \quad S_2 = \sigma_2 m \quad S_3 = \sigma_3 n \quad (2.19)$$

$$\text{全应力} \quad S^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (2.20)$$

$$\text{正应力} \quad \sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \text{剪应力} \quad \tau^2 &= S^2 - \sigma^2 \\ &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \\ &\quad - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

参照式 (2.18)，三个应力不变量的计算公式如下：

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

用主应力表示的某些特殊应力状态示于图 2.7。图 2.7 (a) 所示应力状态， $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ，称为三向应力状态。在锻造、轧制等过程中，大多是这种应力状态。图 2.7 (b) 所示的应力状态， $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ ，称为圆柱应力状态。单向拉伸时， $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ，所以也属于这种状态。在这种情况下，所有与 σ_1 轴垂直的方向都是主方向，而且各方向的主应力都相等。图 2.7 (c) 所示应力状态， $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ，称为球应力状态。根据式 (2.22)，在这种应力状态下，任何斜微分面上的 $\tau = 0$ ，因此所有的方向都是主方向，而且所有的主应力都相等。

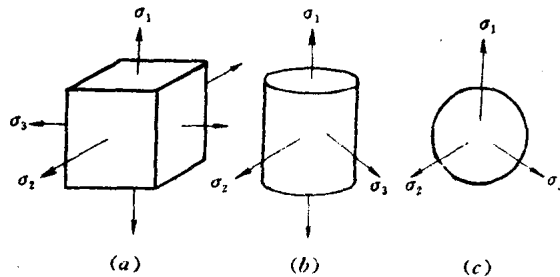


图 2.7 主应力表示的特殊应力状态

2.2.2 主剪应力和最大剪应力

从点的应力状态的分析已经知道，与斜微分面上的正应力一样，剪应力也随斜微分面的方向而改变。剪应力达到极值的平面称为主剪应力平面，其上作用的剪应力就是主剪应力。

如以三个主应力方向为坐标轴，则任意斜微分面上的剪应力可按式 (2.22) 确定，即

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \quad (a)$$

因为 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，可以 $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ 代入上式消去 n ，从而得到

$$\begin{aligned} \tau^2 &= (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2 \\ &\quad - [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]^2 \end{aligned} \quad (b)$$

为求剪应力极值，将上式分别对 l, m 求偏导数并令它们等于零，可得

$$\left. \begin{aligned} [(\sigma_1 - \sigma_3) - 2(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)m^2](\sigma_1 - \sigma_3)l &= 0 \\ [(\sigma_2 - \sigma_3) - 2(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)m^2](\sigma_2 - \sigma_3)m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

现对式 (c) 所示方程组可能的解进行讨论。显然, $l=m=0$ 是式 (b) 的一组解, 但在这种情况下 $n=\pm 1$, 表示一对剪应力为零的主平面, 并非要求的解。对于 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ 的一般情况, 如 $l \neq 0, m \neq 0$, 则式 (c) 的第一式和第二式的方括号内各项代数和必须同时为零, 从而将有 $\sigma_1 = \sigma_2$ 。这与前提条件 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ 不符。因此, 在 $l \neq 0$ 和 $m \neq 0$ 的情况下, 式 (c) 无解。从以上讨论可知, 式 (c) 所示方程组只有在下列情况下有解:

(1) 当 $l=0, m \neq 0$ 时, 根据式 (c) 的第二式可得

$$(\sigma_2 - \sigma_3)(1 - 2m^2) = 0$$

于是得到如下一组解:

$$l = 0 \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) 当 $l \neq 0, m=0$ 时, 根据式 (c) 的第一式可得下列一组解:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad m = 0 \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

如从式 (a) 中消去 l 或 m , 同样可求得四组解, 除去重复的, 还可以得到以下一组解:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n = 0$$

上列的各组解分别表示一对相互垂直的主剪应力平面。它们与某一主平面垂直, 而与另两个主平面成 45° 角 (图 2.8)。每对主剪应力平面上的主剪应力的绝对值都相等。将上列三组方向余弦值代入式 (2.22), 可得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{23} &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{31} &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \\ \tau_{12} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

它们的作用方向表示在图 2.8 中。

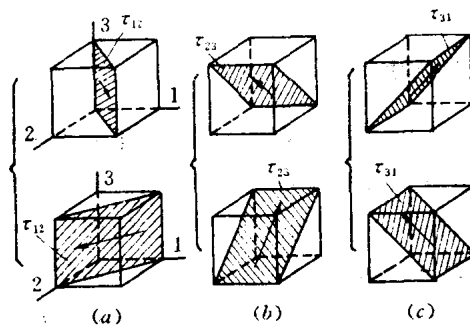


图 2.8 主剪应力平面

$$\begin{aligned} (a) \quad l &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n = 0 & (b) \quad l &= 0 \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (c) \quad l &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad m = 0 \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$