S X B S S D M Z

数学宝山上的明

洪伯阳 编著

SHU XUE BAO SH

DI

科学技术出版社

数学宝山上的明珠

洪伯阳 编著

湖北科学技术出版社

序

数学是一门迷人的科学，古今中外，不知有多少人沉迷于其中，由此也产生了许多杰出的数学家。数学中有许多难题和猜想，其中有些经过漫长曲折的道路，已经得到解决或否定，但很多还是悬案，这些犹如已发掘到的和仍埋藏着的明珠。洪伯阳同志编著的《数学宝山上的明珠》一书，就汇集了30余个这类问题贡献给读者。此书读后，可使人开阔眼界，扩大知识面。这些问题虽然“难”，但理解它们却“不难”，更兼作者的文笔生动，写得通俗易懂，把问题交待得清楚明白，读起来兴趣盎然，即使对中学生来说，理解其中绝大部分内容也不会感到困难。

我想，对待这些难题或猜想，要有个正确的态度，正如书中所指出的，在这里再强调一下。

首先，必须把问题弄清楚，它是怎么回事？它到底已被解决了没有？如果问题还未搞清楚，就企图去解决它，当然只能是“文不对题”；如果问题经过严格论证已被解决（无论正面的或反面的答案），而企图去推翻前人的结论，结果只能是“徒劳无益”。以几何学三大问题中“三等分任意角”为例，原题是要求“用圆规、直尺三等分任意角”。此问题早在上一世纪就证明了其不可能性。因此，如果现在还有人去想“发现”这一作图题的作法，必然是彻底失败。如果有人说：“不信邪，要解放思想，偏要去做”，那只能说他是“无知”。“不信邪”是对的，但不能不信“正”（科学）；“解放思想”也是对的，但不能“胡思乱想”。曾见有人用圆规、直尺声称找到了三等分任意角的方法，但实际

上是一种近似方法；还有人用圆规和带有刻度的直尺发现了三等分一角的方法，而不知原题中的直尺是不带刻度的；如此等等。这些都是缘于对原问题没有正确理解。

其次，在尚未解决的问题中，很多一看就懂，其内容只涉及初等数学中的一些概念，因而有不少人以为用初等数学的方法就能解决。实际情况远非如此，这些问题，几十年甚至几百年来不知耗尽了多少中外数学家的心血，用了当代最现代化的数学工具而没有得到解答。对我们来说，特别是青年学子，要想进入探讨解决这些问题的知识领域(更不必说途径)，应当立志学习近代的高等数学基础知识，掌握有关的分支学科，用锐利的现代化武器武装自己。千万不要心存侥幸，幻想“一鸣惊人”，用一些中学数学知识去试图解决它们，如果硬要这样做，纵然绞尽脑汁，也是白费气力，白白浪费掉宝贵的时间、青春和精力，追悔莫及；不如老老实实学好所学课程，为进一步提高打下基础。这样讲，并不是无的放矢，我们确实遇到过这样一些(且不是个别的)青年学生，我们也诚恳希望数学教师们引导学生正确对待这个问题，因为青年学生是最听老师们的教导的。

回到本书的作用，可以使读者大开眼界，知道数学园地的广阔(而且远不止此，“天外还有天”)，可以激发读者对学习数学的兴趣。数学又是一切科学的基础，因此本书也会对推动群众学习科学起到积极作用，特此推荐给读者。

路见可

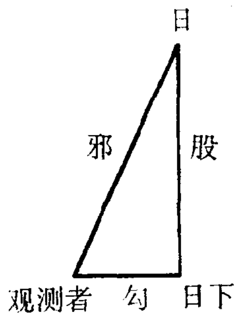
1992年12月于武汉大学

目　录

关于勾股定理

$$邪至日 = \sqrt{勾^2 + 股^2}$$

这里陈子已不限于“三、四、五”的特殊情形，而是推广到一般情形了。顺便指出，我们感到美中不足的是：至今尚不知道陈子对勾股定理是否给出过证明。



图

人们对于勾股定理的认识，经历过一个从特殊到一般的相当漫长的过程。对于其特殊情况，在世界上许多国家和地区的现存文献之中都有记载，故很难区分这个定理是由谁最先发明的。

在外国数学史的著述中，一般认为这个定理是毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 580—500 年)学派首先发现的，因而称之为毕达哥拉斯定理。至于毕氏学派是否真的证明过这个定理，这仍是一个有争议的问题。在数学史界存在着两种不同的观点：一种意见认为证明过，并传说毕达哥拉斯在证明这个定理之后非常高兴，他曾以“百牛宴”感激神灵和招待文人名流，以表示隆重的庆贺，另一种意见则不然，所持的主要论据是毕达哥拉斯学派没有建立完整的相似形理论，但是证明这个定理时则要用到相似形理论。

根据《周髀算经》的记载，勾股定理应称为商高定理。因为商高比毕达哥拉斯大约要早 600 年。

在欧几里得(Euclid，公元前 330—275 年)著的《几何原本》中，勾股定理出现较后，直到第一篇命题 47 才出现，这是现存数学资料中对勾股定理的最早证明，而在叙述上欧几里得把命题换成了另一种形式。即：

命题 47　直角三角形斜边上的正方形(的面积)等于两直角边上的两个正方形(的面积)之和。

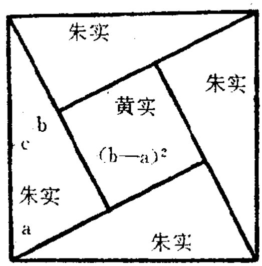


图 2

勾股定理在我国最早的证明,载于古算书《周髀算经》赵爽(字君卿,公元 3 世纪我国三国时代吴国人)的《勾股圆方图注》里,他附有一张"弦图"(图 2)。他认为以勾股为边的长方形可视为被对角线等分成两个直角三角形之和,涂上红色,即所谓"朱实";以勾股之差为边的正方形涂上黄色,即所谓"黄实";这样一来,两块矩形有 4 个红色三角形,加上黄色正方形拼成所谓"弦图",即"黄实"在中央,"朱实"在四周,成为以弦为边的大正边形,谓之"弦实"。这样,赵爽用图形经"移补凑合"而面积不变的方法,很简捷地证明了勾股定理。

今以 a、b、c 分别表示勾、股、弦之长,由图 2 易知有

$$2ab + (b-a)^2 = c^2$$

整理即得

$$a^2 + b^2 = c^2$$

这种证明方法,直到现在有时仍被采用。

这里应该顺便说一下,在 12 世纪印度数学家巴斯迦罗(Bhaskara,1114－1185)基本上是用与赵爽相同的方法也给出了勾股定理的证明,但他比赵爽晚了 900 年。

在几千年的漫长岁月中,勾股定理曾经吸引着成千上万的人对它产生了很大的兴趣,世界上对这个定理的证明方法很多。1940 年,数学家罗密斯(E・S・Loomis)专门收集编著了一本勾股定理证明的书,书名称为《毕氏命题》,作者在其中

共收入了这个著名定理的370种证明，并且将它们分了类。实际上证明方法到现在至少有400多种。

我们在这里并不准备讲这个定理的多种证明方法，下面只是对一种特别有趣的证明方法介绍一下，即美国第二十届总统占姆士·阿·加菲尔德(J·A·Garfield，1831—1881)的证明方法。一个多世纪以来，这在数学史上被传为佳话，因为加菲尔德是一个政治家，而且身居总统要职，故他的证明也就成为人们津津乐道的一段轶事了。

加菲尔德的证明方法于1876年4月发表在波士顿周刊《新英格兰教育杂志》上，兹介绍如下：

他的证明方法是用两种不同的方法去计算图3中梯形的面积。

如图3，在直角三角形ABC的斜边BC上，作等腰直角三角形BCE，过E作ED⊥AC，交AC于D，因△CDE≌△BAC，从而就有AB=DC，AC=DE，如果AB，AC，BC分别用b，a，c表示，则我们有：

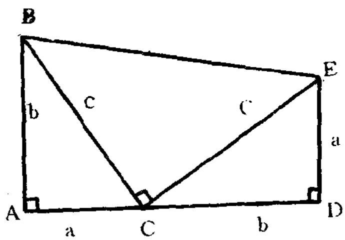


图 三

$$S_{ADEB}=\frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$S_{BAC}=S_{CDE}=\frac{1}{2}ab$$

$$S_{BCE}=\frac{1}{2}C^2$$

但由于显然有

$$S_{ADEB}=S_{BAC}+S_{BCE}+S_{CDE}$$

于是得到

$$\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$$

最后整理即得

$$a^2+b^2=c^2$$

下面我们来介绍勾股定理的应用，限于篇幅，这里只讲两个例子。

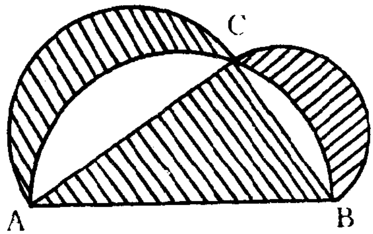
例 1(希波克拉第定理)　在直角三角形的情况下，勾上月形的面积，加股上月形的面积，等于原来勾股形的面积。

证明：如图 4，设三角形 ABC 为直角三角形，根据勾股定理可知即有

$$a^2+b^2=c^2$$

从而可得

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{C}{2}\right)^2$$



图四

此式表明：直角边上两个半圆面积之和等于斜边上半圆的面积，最后从上式两边减去公共部分，定理即得证明。

希波克拉第(Hippocrates，公元前 470—430)是古希腊雅典学校第一个几何学家，当他发现上述定理后，曾给当时的数学家很大鼓舞，他们希望沿这条路子来寻求解决变圆为方问题，但都没有成功。

例 2　一个飞机驾驶员位于地面上空 8 公里的地方，问他看见的地平线约有多远？

解：假定可见度理想，同时粗略假定地球的半径为 6400 公里(如图 5)：

由勾股定理可知

$$x^2 + R^2 = (h + R)^2$$

这里 R 是地球的半径，h 是距地面的高度，X 是从驾驶员到地平线的距离，展开$(h+R)^2$，合并同类项，则上式可写为

$$X^2 = h^2 + 2hR$$

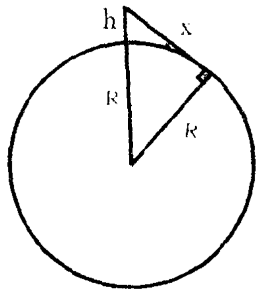


图 五

现在注意到 h^2 与 2hR 比较非常小，故可略去 h^2，这样就可得到 x^2 的一个较好的近似值表达式，这就得出

$$X^2 = 2hR \qquad 或\ X = \sqrt{2hR}$$

最后将 h=8 公里，R=6400 公里代入上式即得

$$X = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 6400} = 320(公里)$$

这就是所要求的大约距离。

下面我们来讲勾股定理的推广，均以定理的形式写出，但均略去证明。

定理 1　勾上的正三角形，加股上的正三角形，等于弦上的正三角形。

定理 2　勾股弦上各作相似三角形，则勾股上两三角形面积之和等于弦上的三角形的面积。

定理 3　勾股弦上各作相似图形，则勾股上两图形面积的和，等于弦上的图形的面积。

定理 4　设 a、b、c 分别表示△ABC 的边长，C 为边 c 的对角，则

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

这是熟知的余弦定理，当 c＝90°时，即为勾股定理。

不仅如此，勾股定理还可推广到三维空间的情形。

定理 5　用直角三角形的三边为直径作球，则斜边上的球的表面积等于直角边上二球的表面积之和。

人们习惯地把勾股定理与几何的“形”联系起来，并把它看作是关于形的定理，其实它也是关于数的定理。

象(3，4，5)这样一组能作为直角三角形的边的正整数称为“毕氏三数”，我国称为“整勾股数”。除了这一组数外，还有没有其它的正整数能表示一个直角三角形的边呢？

公元 3 世纪，我国数学家刘徽回答了这个问题，并提出了一系列的毕氏三数：

(3，4，5)；(5，12，13)；(7，24，25)；

(8，15，17)；(20，21，29)；…………

也许有人要问：这些整勾股数是怎样得到的呢？在这里我们介绍一个确定整勾股数的方法，此法简便，易于掌握。

现在利用复数 m＋ni(其中 m、n 都是正整数，且 m＞n)，即可确定整勾股数，首先，将这个复数平方得到

$$\begin{aligned}(m+ni)^2 &= m^2 + 2mni + n^2i^2 \\ &= (m^2 - n^2) + 2mni \qquad (A)\end{aligned}$$

同样可以得到

$$(m - ni)^2 = (m^2 - n^2) - 2mni \qquad (B)$$

将(A)、(B)两式相乘即得

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

这样一来，只要取

$$c = m^2 + n^2 \qquad a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn$$

就构成了一组整勾股数。

显然，当 $m>n$ 时，且令 m 与 n 互质，则可得出无穷多组 a、b、c 互质的整勾股数。

关于黄金分割

黄金分割与勾股定理一起被称为数学中的两颗“明珠”，但知道黄金分割的人比知道勾股定理的人少得多。那么，什么是黄金分割？黄金分割的有关历史情况如何？黄金分割如何作图？它有哪些重要的应用？这里将作一番较详细的介绍。

一、黄金分割及其历史

首先来讲什么是黄金分割？简单说起来，所谓黄金分割是指：将一线段分为两部分（如图6），使其满足条件

全部 ∶ 大部 ＝ 大部 ∶ 小部

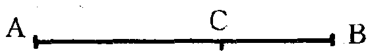


图 六

将线段如此分割，就叫做黄金分割。

如图6，我们就将C点称为线段AB的黄金分割点。

假定线段为单位长，即设AB＝1，又设大部AC＝X，于是CB＝1－X，由黄金分割的条件，我们就有

$$1 : X = X : (1 - X)$$

从而得到一元二次方程

$$X^2 + X - 1 = 0$$

解这个方程得到

$$X=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.61803$$

通常称它为黄金比或黄金率，此外，也有时将这个值称为黄金数。

首先研究黄金分割的是古希腊数学家攸多克斯(Eudoxus，约公元前 408—355)，他受学于毕达哥拉斯学派的亚开塔(Archytas，约公元前 428—347)，还随雅典学派的柏拉图(Plato，约公元前 430—349)学习了几个月，同柏拉图游历过埃及。攸多克斯是古希腊时代最大的数学家，并且在整个古代仅次于阿基米德(Archimedes，公元前 287—212)，爱拉托色尼氏(Eratosthenes，约公元前 274—194)说他是"神明似的"人，欧几里得《几何原本》第五卷，差不多都是从攸多克斯的著作中抄的。

虽然在公元前 4 世纪攸多克斯已经深入研究过黄金分割，而且给出了如何用直尺与圆规作出黄金分割点的方法。但黄金分割这个美称却是 15、16 世纪意大利著名艺术家、科学家达·芬奇(Devinci，1452—1519)首先给出的。

二、黄金分割的作图方法

上面已经看到，在线段 AB 上，C 点是它的黄金分割点，应该指出：这样的点实际上有两个，不仅点 C 符合所设的条件，点 C′也符合于所设的条件(如图 7)。

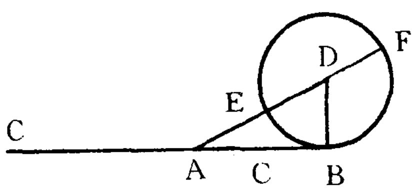


图 七

这就是说，我们有

$$AB : C'A = C'A : C'B$$

这个式子是将 C 点换成了 C′点，这表明黄金分割既有内分割，还有外分割。那么，这两个分割点怎样用圆规和直尺作图呢？

先在线段 AB 的一个端点 B，作垂线 BD 使等于 AB 的一半；其次以 D 为圆心，DB 为半径画圆；再连接 AD，与圆周相交于 E 及 F；最后在 AB 上取 AC＝AE，得点 C；又在 BA 的延长线上取 AC′＝AF，得点 C′，那么 AB 就内分于 C，外分于 C′。这可证明如下：

$$\because \quad AF : AB = AB : AE$$

于是我们有

$$AB^2 = AF \cdot AE = (AE + EF)AE$$
$$= (AC + AB)AC = AC^2 + AB \cdot AC$$

从而可得

$$AB^2 - AB \cdot AC = AC^2$$

即

$$AB(AB - AC) = AC^2$$

故有

$$AB \cdot CB = AC^2 \qquad \text{或者 } AB : AC = AC : CB$$

类似地可证

$$AB \cdot C'B = AC'^2 \qquad \text{或者 } AB : AC' = AC' : C'B$$

证毕。

三、几何黄金形简介

为简便起见，下面我们将黄金数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$记为 ω，即 ω＝