经济控制理论

杨小凯编著

JINGJIKONGZHI
LILUN

经济控制理论

杨小凯编著

湖南科学技术出版社

经济控制理论

杨小凯　编著

责任编辑：张玉纲

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

1986年4月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米　1/32　印张：6.125　字数：159,000

印数：1——4,500

统一书号：4204·16　　定价：1.30 元

征订期号：湖南新书目85——17(16)

前　言

控制理论产生于本世纪三十年代，它主要是一种动态最优化的数学理论。多年来的文献积累使控制理论已经相当成熟，不论在理论上和应用上控制理论(Control Theory)比控制论(Cybernetics)都要成熟得多。六十年代以来，数理经济学与经济计量学不但研究静态和比较静态的最优经济效果及均衡问题，而且发展到研究大规模随机经济系统的动态最优化。数理经济学家和经济计量学家自然而然地开始采用控制理论的理论和方法。这方面最杰出的代表就是美国普林斯顿经济计量研究中心主任邹致庄 (Gregory C.Chow)教授的工作，他([1975],[1981])创立了一个用现代控制理论对动态经济系统进行分析和控制的理论体系。另一方面,六十年代末,由于财力上的限制，航天领域对控制理论专家失去魅力，而新起的一代知识青年要求用现代科学来解决社会经济问题，他们认为控制我们周围的经济环境比控制飞船和导弹的意义要重大得多。因此，有一批控制理论专家转到经济研究方面来，他们马上发觉经济领域对于控制理论来说是个最有前途的方向.他们对控制理论在经济中的应用进行了大量文献积累工作,这方面的杰出代表是控制理论专家柏沙森(A.Bensoussan)([1974],[1978])。由于这两部分人的努力,经济控制理论的国际学术会议已开过多次，文献积累亦达到多不胜数的地步，应用也取得了若干进展。因此我认为将经济控制理论作为一门初步形成的边缘学科介绍给国内读者的条件已逐渐成熟。我认为一门新的科学要形成公认的独立学科，这需要千万人多年的文献积累，需要社会化分工协作研究的长过程。每人证明一个定理，每人解决一两个问

题，通过文献积累就能逐步形成完整的学科体系。在经济控制理论领域，以及数理经济学和经济计量学领域，从1949年到1977年，我国基本上有二十多年的空白，要填补这个空白也不是几年时间内办得到的。我希望这本小书能在填补这个差距上作出点贡献。

此书综合了柏沙森从控制理论角度搞经济控制理论和邹致庄从经济计量学角度搞经济控制理论这两种不同的色彩。为便于研究经济的同志用较少时间循序渐进地掌握现代控制理论的主要内容，此书用相当的篇幅较系统地介绍了现代控制理论的基本知识。

但是笔者认为对于中国来说，经济控制理论不但能用来制定计划，对经济进行宏观水平和微观水平的管理，而且它也是研究经济体制功能的有力工具。它能为经济体制改革提供理论基础。所以本书用专章讨论信息论在经济体制分析上的应用。这方面的内容是国外同类书籍中所没有的。希望这方面的讨论能起到抛砖引玉的作用，并改变人们认为“控制理论是纯技术手段，对体制改革的定性分析无能为力”的成见，

茅于轼同志曾对本书初稿提出宝贵意见，在此谨致谢意。

杨小凯

目　录

第一章　经济系统

§1.1　经 济 耦 合

经济耦合是指各经济因素或子系统之间的因果关系链．最常见的经济耦合就是分工协作造成的投入产出关系．对于一个没有分工协作的自给自足社会来说，各个子系统之间互相独立，没有联系．这种经济系统叫做相对独立系统，如图1—1所示．图中有三个独立的子系统A,B,C，分别表示三个自给自足的家庭，x_1,x_2,x_3分别表示三个家庭对自然界的劳动输出，而y_1,y_2,y_3分别表示三个家庭从自然界得到的收获（输入）．一般而言，**输出是系统对外界的作用，而输入是外界对系统的作用．**严格地说，图1—1中的三个家庭与自然界之间有一定的耦合关系，它表现为输入输出之间的某种因果关系．其中S_i将输入y_i变换成输出x_i，而R_i将输出变换成反馈输入．但是三个家庭互相之间是独立的，没有耦合。

图1—2中是三个分工协作的人，A为专门生产粮食的农民，B为专门生产纺织品的手工业者，C为专门生产肉食的牧民．x_1,x_2,x_3分别为粮食、布匹和肉食的产量．图1—2叫**信号流图**，其中A，

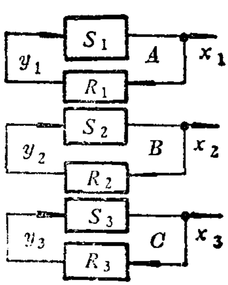


图1—1

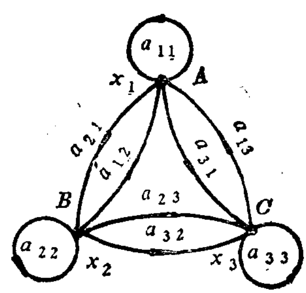


图1—2

B、C三点叫结点，结点标有变量x_1，x_2、x_3；a_{ij}叫传输系数。图中的网络是下列联立方程组之拓扑图形：

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{1—1}$$

易知，这就是封闭的投入产出模型，可见投入产出关系正是分工协作造成的输入、输出耦合关系，这种耦合网络可以用图1—3中等价的**方框图**表示。图中$x_{11}=a_{11}x_1$，$x_{12}=a_{12}x_2, x_{13}=a_{13}x_3$；$x_{21}=a_{21}x_1, x_{22}=a_{22}x_2, x_{23}=a_{23}x_3$；$x_{31}=a_{31}x_1, x_{32}=a_{32}x_2$，$x_{33}=a_{33}x_3$。而$A$，$B$，$C$的传输系数都是1。式(1—1)、图1—2、图1—3这三个系统之间可以用一一对应的变换将一个系统化为另一个系统，这在控制论中叫做**同构**。

如果我们有二次收益函数

$$R = px = p(ap+b) = ap^2 + bp, \quad a<0, b>0, \tag{1—2}$$

其中$x=ap+b$为线性需求函数，于是边际收益为

$$\frac{dR}{dp} = 2ap + b. \tag{1—3}$$

它与物理中的均加速（或减速）运动微分方程

$$\frac{dS}{dt} = 2a't + b' \tag{1—4}$$

就是完全同构的。我们只要用一一对应的变换，令总收益R等于距离S，令价格p等于时间t，且$a=a'$，$b=b'$，则(1—3)就能变换成(1—4)。对于同构的系统，我们可以在一个系统中**模拟**另一个系统。

耦合分为串联耦合、并联耦合，以及开环耦合、闭环耦合(反馈耦合)。

从图1—4的方框图和信号流图可知，系统的初始输入为x_1，第一个子系统之传输系数为S_1，它的输出$x_2=S_1x_1$就是第二个子系统的输入，**一个系统之输出是与之耦合的系统之输入**，这就是**串联耦合**。从图中不难看出，最终输出$x_3=S_2x_2$，将$x_2=S_1x_1$代

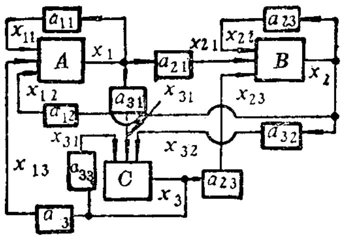


图1—3

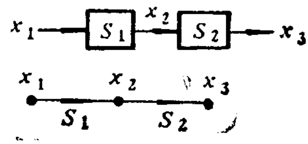


图1—4

入，则

$$x_3 = S_2 x_2 = S_2 S_1 x_1 \tag{1—5}$$

即串联系统的总传输系数等于子系统传输系数之积。

图1—5中的方框图和等价的信号流图，**两个子系统将输入x变换成两个并行的输出**$y_1 y_2$，这就叫**并联耦合**。从图中可以看出：

$$\begin{aligned}
y_1 &= S_1 x, \\
y_2 &= S_2 x, \\
y &= y_1 + y_2 \\
&= S_1 x + S_2 x \\
&= (S_1 + S_2) x
\end{aligned} \tag{1—6}$$

即，**并联耦合系统之总传输系数等于子系统传输系数之和。**

回顾(1—1)，图1—2，图1—3，不难看出分工协作的投入产出系统正是既有串联耦合又有并联耦合的系统。(1—1)中的多项求和正显含并联耦合。对于此式我们还可以进行无穷次迭代，例如将三式代入一式中的x_1, x_2, x_3，则有

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
&= a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\
&\quad + a_{23}x_3) + a_{13}(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3), \\
&= a_{11}a_{11}x_1 + a_{11}a_{12}x_2 + a_{11}a_{13}x_3 \\
&\quad + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}a_{23}x_3 \\
&\quad + a_{13}a_{31}x_1 + a_{13}a_{32}x_2 + a_{13}a_{33}x_3 \\
&= (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})x_1 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\
&\quad + a_{13}a_{32})x_2 + (a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33})x_3.
\end{aligned}$$

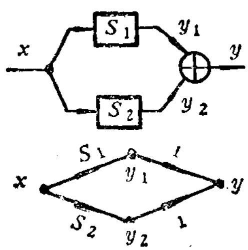


图1—5

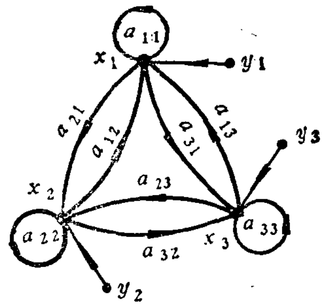


图1—6

从以上推导的结果不难看出系数乘积反映了串联耦合，系数求和反映了并联耦合。在图1—2和图1—3中我们不断重复子系统相互之间的投入产出关系，很容易对照上式理解这种既有串联耦合又有并联耦合的特点。

图1—4和图1—5中的耦合叫做**开环耦合**。而图1—2，图1—3中A之输出x_1，通过**反馈传输系数**a_{11}变换成A之输入$x_{11}=a_{11}x_1$，**这种把输出变换成输入馈回系统的耦合叫反馈耦合，即闭环耦合。**

设我们有下列开放型投入产出系统，其拓扑图形如图1—6所示。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\
x_2 &= y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\
x_3 &= y_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.
\end{aligned}
\tag{1—7}
$$

上式可写成矩阵形式 $$X = Y + AX, \tag{1—8}$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

从(1—8)可解得

$$X = \frac{1}{I - A}Y = (I - A)^{-1}Y. \qquad (1-9)$$

相应于(1—8)和(1—9) 之信号流图如图1—7所示.这就是反馈耦合，图中的系统将输出 X 通过反馈传输系数 A 变换成输入. 而(1—9)就是反馈系统的基本公式. $(I - A)^{-1}$为**反馈因子，**它就是著名的列昂节夫逆阵.

(1—9)可展开成无穷级数

$$X = (I - A)^{-1}Y = (I + A + A^2 + \cdots)Y,$$

其中$A^2 = AA, A^3 = AAA\cdots$，这些传输系数之乘积反映了串联耦合的特点，而无穷级数反映了反馈耦合的特点，它说明了闭环回路中输入输出的无穷次交互影响. 将矩阵与矢量的乘积展开后，又可从求和式中看出并联耦合的特点. 我国过去采用的计划平衡重复法就是用无穷级数的头一二项近似. 可见投入产出分析的重大意义在于它反映了分工协作的经济系统中串联耦合、并联耦合和反馈耦合的错综复杂网络关系.

一般而言，设输入为x，输出为y，**被调节系统的传输系数**为

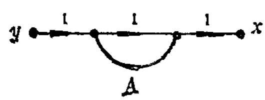


图1—7

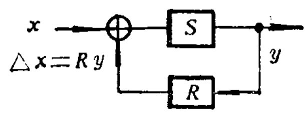


图1—8

S，**反馈传输系数**为R，则反馈输入

$$\Delta x = Ry. \qquad (1—11)$$

总输出y为初始输入x和反馈输入Δx之和乘上传输系数S：

$$y = S(x + \Delta x). \qquad (1—12)$$

将(1—11)代入，则

$$y = Sx + SRy,$$

$$y = \frac{S}{1 - SR}x. \qquad (1—13)$$

这就是一般的反馈调节公式，反馈因子为$\frac{1}{1-SR}$，而$\frac{y}{x}=\frac{S}{1-SR}$**为调节系统之传输系数**，(1—13)就是经典控制论中的**传递函数**。

反馈耦合的另一个例子是凯恩斯乘数原理。设国民收入为Y，消费为C，投资为I，则

$$Y=C+I. \tag{1—14}$$

又设消费函数为

$$C=cY, \tag{1—15}$$

其中c为消费倾向，它满足$0<c<1$。将上式代入(1—14)，则

$$Y=cY+I,$$

$$Y=\frac{1}{1-c}I, \tag{1—16}$$

$\frac{1}{1-c}$就是反馈因子，它就是著名的凯恩斯乘数。相应的方框图如图1—9。

在经济分析中，我们常常假设系统内部结构为未知的“黑箱”，而只研究输出对输入的反应，通过这种研究来了解系统特性，是谓“**黑箱原理**”。宏观经济学中的总量分析就大量运用了这一原理。

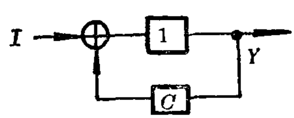
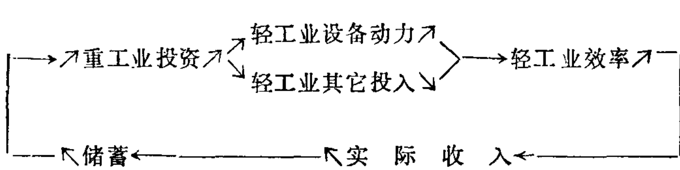


图1—9

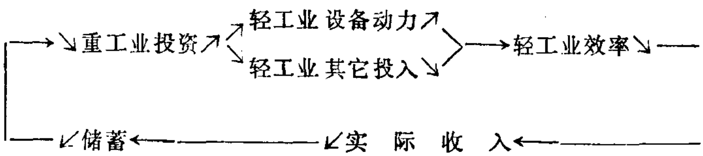
§1.2 经 济 反 馈

经济反馈分为**正反馈**和**负反馈**。若**系统输出与反馈输入符号相同，则为正反馈**，若**系统输出与反馈输入符号相反，则为负反馈**。我们用下列动态图描述反馈特性。

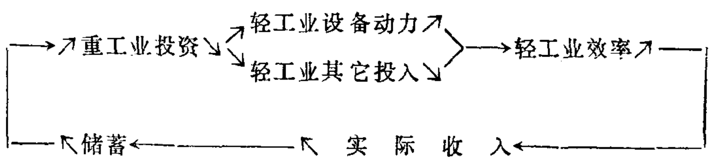


这个动态图描述了重工业投资效果很好时，轻工业与重工业之间的耦合。如果重工业投资增多，一方面使轻工业设备、动力增多，另一方面由于资金有限，使轻工业的其它投入下降。若投资效果很好，则前一种影响大于后一种影响，因此两个并联的总输出为正，使轻工业效率上升，人民实际收入增加，又使储蓄上升，反过来使重工业投资来源增多。这就是轻重工业之间的良性循环，它是经济起飞的原因之一。“良性循环”、“起飞”，这就是正反馈，即动态图中“重工业投资”两边的箭头方向相同。初始输入符号为正（动态图中箭头向上）的正反馈叫**正向正反馈**，若初始输入符号为负（动态图中箭头向下）的正反馈叫**负向正反馈**，负向正反馈就是恶性循环。

如果重工业投资效果不好，则有下列动态图：



也就说投资效果差时，重工业投资增加挤轻工业的坏影响大于使轻工业设备动力增加的好影响，于是使轻工业效率下降，实际收入下降，重工业投资来源也减少，因此动态图中“重工业投资”两边的箭头相反，即系统处于一种负反馈的停滞状态，重工业投资上去了又会掉下来。重工业投资减少时，又会形成如下动态图：



这个动态图与前一个动态图的差别是，所有箭头方向掉了头，其后果又会使重工业投资升上来，这就是左右摇摆的振荡，如果这种振荡是收敛的，则重工业投资停滞在一定水平上，不能实现良性循环和经济起飞。

在一般工程控制中正反馈是坏事，稳定性负反馈才是好事，

而经济控制中，很多正向正反馈是人们所希望的，而某些停滞性负反馈却是人们企图避免的.另外经济系统中有大量非线性元件，可以将负反馈变成正反馈，或把正反馈变成负反馈，例如重工业投资效果就是这类参数，投资效果提高，就可以将负反馈变成正反馈.

下面我们用方框图来描述正反馈与负反馈的差别.图1—10中的实线部分是没有专利制度时科技发明活动中，发明人与使用人之间的耦合.加上虚线部分后，就是在专利制度调节下科技发明活动中的耦合.图中的S为从事科技发明的人将科技发明的总输入(收入与费用之代数和)变换成科技发明成果(输出)X之传输系数.在没有专利制度时，科技发明对于发明人的直接收益，即发明人使用这一成果的直接好处（例如发明电的人使用电得到的好处）一般来说是相对较小的，这一正反馈通过反馈传输系数R_2将输出X变换成正的反馈输入y_2.科技发明往往要付出巨大代价，这种负反馈通过反馈传输系数R_1将输出X变换成负的输入$-y_1$.科技发明传给他人后，创造的收益通过反馈传输系数αr_i(这时$\alpha=1$)变成使用这种技术的各个单位之收益，而没有反馈到发明人那里，因此发明人与使用人之间为开环回路.这时发明人的输入为$-y_1$与y_2之代数和，由于$y_1\gg y_2$，所以$-y_1+y_2<0$. 也就是说在没有专利制度时，科技发明是种负反馈系统.若输出$X>0$，则输入$-y_1+y_2<0$；若$X<0$，则$-y_1=-R_1X>0$，$y_2=R_2X<0$，即$-y_1+y_2>0$.这种反馈振荡的结果，使输出X保持在一定水平，这就表现为科技水平的停滞.如果实行专利制度，使用专利的人产生的收益为$r_iy_i(i=1,\cdots,n)$，其中一部分由使用人得，其比例为$\alpha(0<\alpha<1)$，另一部分由发明人得，其比例为$\beta(\beta=1-\alpha)$.所以发明人得到的正收益就不仅有y_2，还有

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\beta r_i x_i.$$

一般$Y\gg y_1$，所以总输入$Y-y_1+y_2>0$，系统为闭环的正反馈，

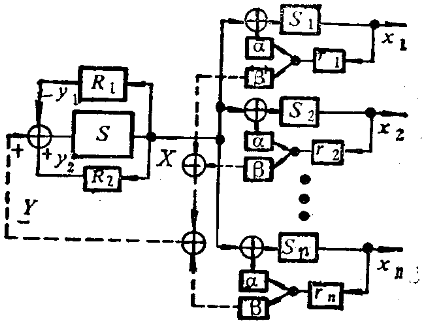


图1—10

输出 X 与输入 $Y-y_1+y_2$ 符号相同。这种正反馈使科技能加速发展。发明人希望自己的成果尽量推广，因为掌握这种新技术的人越多，则发明人的收入也越多，收入越多，发明人更有资金和积极性创造发明，这种良性循环造成人材辈出，群星灿烂的局面。

§1.3 稳 定 性

若经济系统有平衡状态，**当外界对系统的干扰使系统背离平衡状态时，系统是否能消除干扰恢复平衡**，这就是所谓**稳定性问题**。

我们通过市场反馈调节的**蛛网定理**来说明稳定性问题。

设市场对某种商品的需求函数为

$$x_t=a-bp_t,\qquad a,b>0,\qquad (1-17)$$

其中 p_t，x_t 分别为 t 时刻之价格和需求量。又设 t 时刻此种商品的供给量 x'_t 是由 $t-1$ 时刻的价格决定，因为生产要对价格作出反应有一时间滞后，于是供给函数为

$$x'_t=\alpha+\beta p_{t-1},\qquad \alpha,\beta>0\qquad (1-18)$$

在供求均衡的情况下

$$x_t=x'_t,\qquad (1-19)$$

这时价格也不再变动，即

$$p_t = p_{t-1} = \bar{p}, \tag{1—20}$$

其中 $\bar{p}$ 表示均衡价格.联立(1—17)、(1—18)、(1—19)和(1—20)，则可解出均衡价格和均衡供求量分别为

$$\bar{p} = \frac{a-\alpha}{b+\beta}, \qquad \bar{x} = \alpha + \beta\bar{p} = \frac{\alpha b + a\beta}{b+\beta}, \tag{1—21}$$

其中 $\bar{x}$ 为均衡供求量。

如果市场机制使供求量在非均衡值上达到瞬态相等，即

$$x_t = a - bp_t = \alpha + \beta p_{t-1} = x_t' \tag{1—22}$$

而均衡供求量为

$$\bar{x} = a - b\bar{p} = \alpha + \beta\bar{p} \tag{1—23}$$

(1—22)与(1—23)之差为

$$x_t - \bar{x} = -b(p_t - \bar{p}) = \beta(p_{t-1} - \bar{p}) \tag{1—24}$$

令 $\hat{x} = x_t - \bar{x}$ 为 t 时刻需求量与均衡供求量之偏差，且 $\hat{p}_t = p_t - \bar{p}$，$\hat{p}_{t-1} = p_{t-1} - \hat{p}$ 分别为 t 和 $t-1$ 时刻市场价格与均衡价格之偏差，代入(1—24)，我们有：

$$\hat{x}_t = -b\hat{p}_t = \beta\hat{p}_{t-1}. \tag{1—25}$$

所以
$$\hat{p}_t = A\hat{p}_{t-1}, \tag{1—26}$$

其中 $A = -\dfrac{\beta}{b}$，这是一个一阶齐次线性差分方程，设 $\hat{p}_0 = p_0 - \bar{p}$ 为初始时刻价格与均衡价格之差，则

$$\hat{p}_1 = A\hat{p}_0,$$

$$\hat{p}_2 = A\hat{p}_1 = A(A\hat{p}_0) = A^2\hat{p}_0,$$

……

$$\hat{p}_t = A\hat{p}_{t-1} = A^2\hat{p}_{t-2} = \cdots = A^t\hat{p}_0. \tag{1—27}$$

上式给出了线性蛛网模型之通解，求解的迭代过程可表为图1—11中的蛛网图和时间序列图。由于 $b>0$，$\beta>0$，所以 $A = -\dfrac{\beta}{b}<0$。当 t 不断从偶数变为奇数，又从奇数变为偶数时，A^t 就不断从正数变为负数，又从负数变为正数，因而 $\hat{p}_t$ 一会儿为正，一会儿为负，即 p_t 一会儿高于 $\bar{p}$ 一会儿低于 $\bar{p}$。所以实际价格在均衡价格上下振