

# 量子物理学

上册

〔美〕R·埃斯伯格 R·瑞斯尼克 著

北京工业学院出版社



13.36  
477  
上

# 量子物理学

上册

[美] R.埃斯伯格 R.瑞斯尼克 著

吴伯泽 暴永宁 黄惠英 译



北京工业学院出版社

8610849

## 内 容 简 介

本书从初等量子力学观点出发,清楚地论述了几乎全部重要的量子系统的各种性质,并且特别注重量子力学的应用。书中的材料丰富,讨论由浅入深,各章都有许多例题、思考题和习题,因此,本书既适合作为教材,也适合作为自学材料使用。

本书可供大专院校物理系师生、研究生和有关的研究人员阅读。

DL70/SF  
19

## 量 子 物 理 学

### 上 册

[美] R. 埃斯伯格 R. 瑞斯尼克 著

吴伯泽 暴永宁 黄惠英 译

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经营

北京市通县向阳印刷厂印刷

787×1092 毫米 16 开本 22 印张 543 千字

1985 年 12 月第一版 1985 年 12 月第一次印刷

印数: 0001—8,000 册

统一书号: 13434·6 定价: 4.70 元

## 原 序

本书的主要目的是想从初等量子力学的观点出发, 清楚明确地论述几乎所有重要量子系统的各种性质. 书中所用到的量子力学, 只是为达到这个目的所需要的那些内容. 由此可见, 我们所选择的重点是量子力学理论的应用, 而不是这个理论本身. 我们希望, 这样做会使本书适合以后要接触量子物理学现象的大学生的需要. 当大学生们认识到量子力学具有惊人的诠释能力以后, 他们大概会想更多地了解这个理论. 因此, 我们希望本书同样适合以后还要学习更高级的正规量子力学课程的大学生的需要.

按照原来的设想, 本书是供学过初等微积分和用到微积分的初等经典物理学这两门基本课的大学生, 作为一学年的教材使用的. 不过, 要在较短的时间内学完它也可以. 第一至四章讨论早期量子物理学的各种现象, 并建立旧量子论的各种基本概念. 这几章可以相当快地翻阅过去, 尤其是那些过去已多少接触过量子物理学的读者, 更可以这样做. 量子力学的主要核心及其在单电子原子和双电子原子问题上的应用, 是第五至八章及第九章前四节的内容. 这个核心部分用不了半年就可以学完. 因此, 教师可以从讨论完全不同的课题(多电子原子和分子, 量子统计学和固体, 原子核和基本粒子)的各章选出一些材料, 加到这个核心内容中去, 编成各种各样学时较少的课程.

有些教师需要内容与本书相似、但对量子力学作更全面、更高水平的论述的教材, 有些教师在量子理论的应用方面所能接受的范围要狭窄得多, 对于这些教师来说, 罗伯特·埃斯伯格的《现代物理学基础》(Robert Eisberg: *Fundamentals of Modern Physics*, John Wiley & Sons, 1961) 可能比本书更适用一些. 而那些要求关于狭义相对论的论述比本书附录 A 更加广泛、但在水平和教学风格上同本书相似的教师, 我们建议他们再添用罗伯特·瑞斯尼克的《狭义相对论导论》一书(Robert Resnick: *Introduction to Special Relativity*, John Wiley & Sons, 1968).

本书过去的几次试版, 是我们通过一定过程不断增订的, 其中包括我们在各自的学校和四所其他学校所进行的长期课堂试教. 后来, 埃斯伯格对最后一次试版作了重大的修改补充, 完成了本书的编写工作, 所以, 他是本书的主要作者. 瑞斯尼克则承担了把最后一次试版改写成一本程度较低的相应现代物理学教材的任务, 因此, 他是那本教材的主要作者.

本书在教学上的特点(其中有些通常是在同一水平教科书中找不到的), 在课堂试教中已证明是非常有成效的. 这些特点是: 每一章的开头都有详细的提纲, 每一章都有许多解好的例题, 每章都有可以任意选读的段落, 书后有可以任意选读的附录, 书中有一些小结性的小节和表, 每一章末尾有一组思考题以及很长一组各种久经考验的习题, 在全书末尾还有各章习题的部分答案. 本书写得很严谨, 但思路开阔, 所以, 我们相信它也很适合作为自学或自我测试的教材.

我们在本书中采用米、千克、秒制(即国际单位制)单位, 但又并不完全限于使用它. 当某一特定领域在一般实践中采用别的单位时, 我们也就跟着采用那些单位.

我们非常高兴能借此机会感谢 H. 福斯特 (Harriet Forster)、R. 霍比 (Russell Hobbie)、S. 梅耶 (Stuart Meyer)、G. 萨林格 (Gerhard Salinger) 和 P. 耶尔金 (Paul Yergin) 等博士对本书提了建设性的意见, 感谢 D. 斯威德洛 (David Swedlow) 博士帮助我们出题解题, 感谢 B. 祁 (Benjamin Chi) 博士帮助设计插图, 感谢 D. 德涅克 (Donald Deneck) 先生在编辑和其他方面给予许多帮助, 并感谢 C. 杨 (Cassie Young) 和 C. 克列门特 (Carolyn Clemente) 等两位女士帮助打字和做了其他事务性工作。

罗伯特·埃斯伯格  
(加利福尼亚州圣巴巴拉市)  
罗伯特·瑞斯尼克  
(纽约州特洛伊市)

# 目 录

## 上 册

<b>第一章 热辐射和普朗克的假说</b> .....	( 1 )
1—1 引言.....	( 1 )
1—2 热辐射.....	( 2 )
1—3 经典的空腔辐射理论.....	( 6 )
1—4 普朗克的空腔辐射理论.....	( 12 )
1—5 普朗克辐射定律在计温术中的应用.....	( 18 )
1—6 普朗克假设及其含意.....	( 19 )
1—7 量子论的历史概述.....	( 20 )
<b>第二章 光子——辐射的粒子性</b> .....	( 24 )
2—1 引言.....	( 24 )
2—2 光电效应.....	( 25 )
2—3 爱因斯坦关于光电效应的量子理论.....	( 27 )
2—4 康普顿效应.....	( 31 )
2—5 电磁辐射的二象性.....	( 36 )
2—6 光子和X射线的产生.....	( 37 )
2—7 电子对的产生和湮没.....	( 39 )
2—8 光子的吸收截面和散射截面.....	( 44 )
<b>第三章 德布罗意假说——粒子的波动性</b> .....	( 50 )
3—1 物质波.....	( 50 )
3—2 波粒二象性.....	( 56 )
3—3 测不准原理.....	( 58 )
3—4 物质波的性质.....	( 62 )
3—5 测不准原理的一些推论.....	( 70 )
3—6 量子理论的哲学问题.....	( 71 )
<b>第四章 玻尔的原子模型</b> .....	( 77 )
4—1 汤姆孙模型.....	( 78 )
4—2 卢瑟福模型.....	( 81 )
4—3 有核原子的稳定性.....	( 86 )
4—4 原子光谱.....	( 87 )
4—5 玻尔假设.....	( 90 )
4—6 玻尔模型.....	( 91 )

4—7	对原子核有限质量的改正	( 96 )
4—8	原子的能态	( 98 )
4—9	量子化定则的诠释	(100)
4—10	索末菲模型	(104)
4—11	对应原理	(106)
4—12	对旧量子论的批判	(108)
<b>第五章</b>	<b>薛定谔的量子力学理论</b>	(113)
5—1	引言	(113)
5—2	导致薛定谔方程的似乎合理的论证	(116)
5—3	玻恩对波函数的诠释	(122)
5—4	期待值	(129)
5—5	不含时薛定谔方程	(138)
5—6	本征函数应具有的性质	(142)
5—7	薛定谔理论中能量的量子化	(144)
5—8	小结	(151)
<b>第六章</b>	<b>不含时薛定谔方程的解</b>	(161)
6—1	引言	(162)
6—2	零势能	(162)
6—3	阶跃势(能量小于势阶高度的情况)	(167)
6—4	阶跃势(能量大于势阶高度的情况)	(175)
6—5	势垒	(181)
6—6	粒子穿透势垒的几个例子	(187)
6—7	方阱势	(190)
6—8	无限深方阱势	(194)
6—9	简谐振子势	(200)
6—10	小结	(204)
<b>第七章</b>	<b>单电子原子</b>	(211)
7—1	引言	(211)
7—2	薛定谔方程的推导	(213)
7—3	不含时方程的分离	(214)
7—4	不含时方程的解	(216)
7—5	本征值、量子数和简并性	(217)
7—6	本征函数	(220)
7—7	几率密度	(223)
7—8	轨道角动量	(233)
7—9	本征值方程	(237)
<b>第八章</b>	<b>磁偶极矩、自旋和跃迁速率</b>	(244)
8—1	引言	(244)
8—2	轨道磁偶极矩	(245)

8—3	斯特恩-革拉赫实验和电子的自旋	(248)
8—4	自旋-轨道相互作用	(254)
8—5	总角动量	(257)
8—6	自旋-轨道相互作用能量和氢原子的能级	(260)
8—7	跃迁速率和选择定则	(264)
8—8	现代量子理论和旧量子论的比较	(270)
<b>第九章 多电子原子——基态和X射线激发</b>		(274)
9—1	引言	(275)
9—2	全同粒子	(275)
9—3	不相容原理	(281)
9—4	交换力与氦原子	(284)
9—5	哈特里理论	(291)
9—6	哈特里理论的一些结果	(294)
9—7	多电子原子的基态和周期表	(300)
9—8	X射线的线光谱	(307)
<b>第十章 多电子原子——光激发</b>		(316)
10—1	引言	(316)
10—2	碱金属原子	(317)
10—3	有数个光激电子的原子	(321)
10—4	$LS$ 耦合	(324)
10—5	碳原子的能级	(330)
10—6	塞曼效应	(332)
10—7	小结	(338)



# 第一章 热辐射和普朗克假说

## 1-1 引言

旧量子论；量子物理学与经典物理学的关系；普朗克常数的作用

## 1-2 热辐射

热辐射的性质；黑体；光谱辐射率；分布函数；辐射率；斯忒藩定律；斯忒藩-玻耳兹曼常数；维恩定律；空腔辐射；能量密度；基尔霍夫定律

## 1-3 经典的空腔辐射理论

空腔内的电磁波；驻波；容许频率数；能量均分；玻耳兹曼常数；瑞利-金斯谱

## 1-4 普朗克的空腔辐射理论

玻耳兹曼分布；分立的能量；能量均分定律的失效；普朗克常数；普朗克谱

## 1-5 普朗克辐射定律在计温术中的应用

光学高温计；3K 宇宙背景辐射和大爆炸

## 1-6 普朗克假设及其含意

普朗克假设的一般提法；量子化的能量；量子态；量子数；宏观单摆

## 1-7 量子论的历史概述

普朗克最初的工作；企图使量子化同经典物理学相协调的一些尝试

### 思考题

### 习题

## 1-1 引言

1900年12月14日，在德国物理学会的一次会议上，普朗克宣读了他的论文《正常光谱的能量分布律理论》。这篇论文最初几乎没有受到人们的注意，但它却是物理学中一次革命的起点。尽管一直过了四分之一世纪以后，现代量子力学——我们目前的认识的基础——才由薛定谔和其他人建立起来，但人们却把这篇论文发表的日期看作量子物理学的诞辰。我们今天的认识是由许许多多条研究道路交汇而成的，它们各代表经典物理学彻底崩溃的一个侧面。在本章和以后的三章里，我们要详细考察那个现在被称为旧量子论的理论的几个主要的里程碑，因为正是这个理论导致了现代的量子力学。在谈到旧量子论时，我们所要讨论到的实验现象，遍及经典物理学的所有各个分支学科：力学，热力学，统计力学，以及电磁学。这些现象一再同经典定律发生的矛盾，以及这些对立在量子概念的基础上所得到的解决方法，将使我们看出量子力学的必要性。因此，我们现在研究旧量子论，将使我们在第五章开始讨论量子力学时，更容易对量子力学有比较深刻的理解。

就象相对论一样（这个理论将在附录A中非常简要地加以叙述），量子物理学也是经典物理学的推广，它把各个经典定律作为一些特殊情形包括进去。相对论是把物理定律的适用范围

• 1 •

扩展到高速度的区域中去,而量子物理学则是把这个范围扩展到小尺度的区域中去;并且,正如相对论有一个具有根本性意义的普通常数——光速  $c$ ——来代表它一样,量子物理学也有一个表征它的、具有根本性意义的普通常数,这个常数现在称为普朗克常数  $h$ .普朗克是在企图解释他对热辐射所观察到的各种性质时,把这个常数引入他 1900 年那篇论文的.现在我们要自己从头开始考察热辐射,并由此推导出普朗克常数,以及与它相联系的、极其重要的能量不连续的量子概念.我们将会发现,热辐射具有相当重要的意义,直到今天,它仍然很有理由值得我们重视.举例来说,这种现象最近曾经帮助了天体物理学家在几个互相竞争的宇宙起源理论当中作出抉择.

## 1-2 热 辐 射

一个物体由于它温度的作用而发出的辐射称为热辐射.所有物体都在向它的周围发出这样的辐射,同时也从周围吸收这样的辐射.如果一个物体在开始时比它周围的环境更热,它就会逐渐冷却,因为它发射能量的速率超过它吸收能量的速率.当它达到热平衡时,发射率和吸收率就相等了.

凝聚态(即固态或液态)物质所发射的是连续的辐射谱.这种谱的细节几乎完全同组成物体的具体材料无关,但却同温度有重大的关系.在一般温度下,大多数物体并不是靠它们所发射的光,而是靠它们所反射的光而被我们看到的.如果它们不受到任何光的照射,我们就不能看到它们了.但是,在非常高的温度下,物体本身也能发光.这时我们可以看到它们在暗室中发光;不过,即使在高达开氏几千度的温度下,物体所发出的热辐射也有90%以上处在电磁波谱的红外部分,我们无法看到它们.可见,自身发光的物体是非常热的.

作为例子,我们假定把一根铁通条放在火中加热,让它达到越来越高的温度,并且周期地把它从火中撤出足够长的时间,以便观察它的性质.当通条的温度相对说来还比较低的时候,它也辐射出热,但热并不明显.随着温度的升高,通条所发出的辐射总量非常迅速地增大,因而可以察觉到一些明显的效果.通条先呈暗红色,然后变成鲜红色,最后,在极高的温度下,通条呈强烈的蓝白色.这就是说,随着温度的上升,物体所发出的热辐射越来越多,并且最强的辐射的频率也越来越高.

物体的温度与它所发出的辐射频谱之间的这种关系,被用在一种称为光学高温计的装置中.这种装置实质上是一个原始的分光计,它使操作者可以依靠观察炽热物体(如恒星之类)所发出的热辐射的颜色即频率的组成,估计出这个物体的温度.物体所发出的是一个连续的辐射光谱,而眼睛所看到的主要颜色对应于可见光谱区中最强的辐射.炽热的煤、白炽灯丝和太阳,都是我们常见的发出可见光的物体的例子.

一般地说,炽热物体所发出的热辐射谱的细致形式,多少取决于这个物体的成分.不过,实验告诉我们,有一类炽热物体能发射出具有普遍性质的热辐射谱.这类物体称为黑体,也就是说,这种物体的表面能够把投射到它上面的热辐射全部吸收掉.黑体这个名称是很恰当的,因为这样的物体不会把光反射出去,所以它看来是黑的.任何一个物体,只要用灯盏或铋黑这样的黑色颜料涂上一层漫射层,就是(近于)黑体的一个例子.下面我们还要简短地描述另一个完全与此不同的例子.已经发现,所有黑体,不管它们具有什么样的具体成分,在同样的温度下都会发出具有相同谱的热辐射.这个普遍的事实,可以根据热力学平衡的经典理论来说明.但是,

单单靠热力学的论证,是无法得到谱的具体形式的.黑体所发出的辐射的普遍性质,使它们具有特别重要的理论意义,因此,物理学家们一直想找到一种办法来解释黑体谱的具体特点.

黑体辐射的谱分布由物理量  $R_T(\nu)$  来描述,这个量称为谱辐射率,它的定义是:  $R_T(\nu) d\nu$  等于绝对温度为  $T$  的单位表面在单位时间内发出的、频率至  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  间隔内的辐射的能量.对这个量的最早的精确测定,是陆米和普林赛姆在 1899 年进行的.他们所使用的仪器实质上同测定光谱所用的棱镜分光计相似,不过,它的透镜、棱镜等等都要用特殊材料制成,这样,它们对于频率相对说来比较低的热辐射才会是透明的.用实验观察到的  $R_T(\nu)$  对  $\nu$  和  $T$  的依赖关系示于图 1-1.

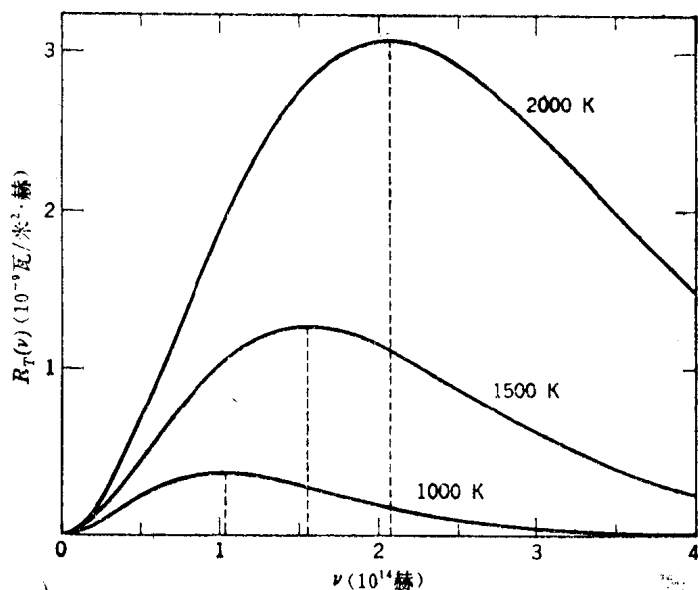


图 1-1 当辐射体的温度为 1000K, 1500K 和 2000K 时黑体辐射体的谱辐射率与辐射频率的函数关系, 应该注意到, 辐射率达到最大值(虚线)的频率, 随着温度的升高而直线增大, 因此, 每平方米辐射体所发出的总功率(曲线下面的面积), 便随着温度而非常迅速地增大.

光谱辐射率是分布函数的一个例子, 其实, 这种函数在物理学中是很常见的. 例如, 麦克斯韦速度分布函数(它的外观相当象图 1-1 中的一条曲线)告诉我们, 在固定的压力和温度下, 气体中的分子是怎样按照它们的速度进行分布的. 读者大概已经知道的另一种分布函数(它具有按指数规律递减的形式), 是描述含有某种原子核的样品中放射性原子核衰变时间的分布函数; 当然, 读者肯定也看到过在一次物理考试中全班同学所得到的分数的分布函数.

图 1-1 中所示出的是具有已知面积和一定温度(比如说 1000K)的黑体的谱辐射率分布函数, 这个分布函数告诉我们: (1) 如果频率  $\nu$  比  $10^{14}$  赫兹小得多, 那么, 在固定大小的频率间隔  $d\nu$  内辐射出的功率是非常小的. 当  $\nu$  等于零时, 辐射功率也等于零. (2) 当  $\nu$  从非常小的数值逐渐增大时, 在间隔  $d\nu$  内辐射出的功率迅速地增大. (3) 当  $\nu \approx 1.1 \times 10^{14}$  赫兹时, 功率达到最大值. 这就是说, 在这个频率上, 辐射功率最强. (4) 在  $\nu \approx 1.1 \times 10^{14}$  赫兹以后, 随着  $\nu$  的增大, 辐射功率缓慢地、但不停顿地下降. 当  $\nu$  值趋于无限大时, 辐射功率再一次等于零.

图中所示的两个较高温度值(1500K 和 2000K)的分布函数告诉我们: (5) 辐射功率最强的频率, 随着温度的上升而增大. 经过细致的检验可以证明, 这个频率随温度而直线地增大. (6) 在所有频率下, 辐射的总功率都随着温度的上升而增大, 并且要比直线增长快一些. 在指定

温度下,辐射的总功率,简单地由该温度的曲线下方的面积  $\int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu$  给出,因为  $R_T(\nu) d\nu$  是在频率间隔  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  内辐射出的功率.

谱辐射率  $R_T(\nu)$  对全部  $\nu$  的积分,就是温度为  $T$  的黑体每单位面积在单位时间内发射出的总能量.它称为辐射率  $R_T$ .这就是说,

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \quad (1-1)$$

正如我们前面在讨论图1-1时所看到的, $R_T$  随着温度的上升而迅速地增大.其实,这个结论就是所谓斯忒藩定律,它在1879年第一次用下面经验方程的形式表达出来:

$$R_T = \sigma T^4 \quad (1-2)$$

式中

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{瓦/米}^2 \text{K}^4$$

称为斯忒藩-玻耳兹曼常数.图1-1还告诉我们,随着温度  $T$  的上升,光谱会朝着高频方向位移.这个结论被称为维恩位移律:

$$\nu_{\text{最大}} \propto T \quad (1-3a)$$

式中  $\nu_{\text{最大}}$  是在指定温度下  $R_T(\nu)$  达到其最大值的频率  $\nu$ .当  $T$  增大时, $\nu_{\text{最大}}$  朝着高频方向移动.所有这些结论全都同前面讨论过的日常经验相符合,具体地说,随着温度的上升,物体所发出的热辐射总量会迅速地增大(在高温下,通条所辐射出的热能要多得多),并且辐射的主频率也变的越来越高(通条的颜色由暗红色变成蓝白色).

如果考虑一个内部有空腔的物体,并且这个空腔只靠物体上的一个小洞与外界相通(如图1-2所示),我们就可以找到黑体的另一个例子——以后我们将看到,这个例子具有特别重要的意义.外界射在小洞上的辐射将进入空腔,并被腔壁来回反射,最后被腔壁吸收掉.如果小洞的面积比起空腔内表面的面积来非常之小,那么,入射辐射通过小洞反射回去的数量就可以忽略不计.这时,射在小洞上的辐射实质上全部被吸收掉了,因此,这个小洞就必定具有黑体表面的性质.在实验室实验中所采用的黑体,大多是按这种思路设计出来的.

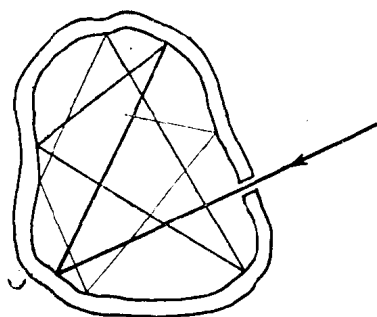


图1-2 物体内的空腔靠物体上的一个小洞与外界相通.射在小洞上的辐射经过空腔内表面接连多次反射后,就完全被吸收了.因此,小洞的吸收作用同黑体相似.在逆过程中,从小洞发出的辐射是由内表面发出的各个组分组成的,这时小洞的发射作用也同黑体相似.

现在假定腔壁被均匀地加热到温度  $T$ .

这时,腔壁将发出热辐射,使它充满整个空腔.从内部射在小洞上的这种辐射,有一小部分将穿过小洞.这样一来,小洞将起着一个小热辐射体的作用.既然小洞必定具有黑体表面的性质,所以,小洞所发出的辐射就必定具有黑体的谱;但是,既然小洞只不过是陈列出空腔内部所存在的热辐射的样品,所以很明显,空腔内的辐射也必定具有黑体的谱.事实上,它将具有表征腔壁温度  $T$  的黑体谱,因为这是为这个系统规定的唯一的温度.空腔通过小洞发射出的谱是由能通量  $R_T(\nu)$  来描述的.不过,要描述空腔内部的辐射——即所谓空腔辐射——的谱,能量密度  $\rho_T(\nu)$  要更有

用一些, 这个量的定义是单位空腔体积在温度  $T$  下在频率间隔  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  内所包含的能量。显然, 上述两个量是互成比例的; 也就是说,

$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu) \quad (1-4)$$

由此可见, 在腔壁温度为  $T$  的空腔内的辐射, 具有与温度为  $T$  的黑体表面所发出的辐射相同的性质。在进行实验时, 利用被加热物体那个有小洞与外界相通的空腔来产生黑体谱是很方便的; 在理论工作中, 通过分析空腔辐射来研究黑体辐射也很方便, 因为这时有可能利用非常普通的论证去预言空腔辐射的各种性质。

**例1-1 (a)** 由于  $\lambda\nu = c$ , 而  $c$  是固定不变的光速, 所以, 维恩位移律(1-3a)也可以写成如下形式:

$$\lambda_{\text{最大}} T = \text{常数} \quad (1-3b)$$

式中  $\lambda_{\text{最大}}$  是在指定温度  $T$  下谱辐射率达到其最大值时的波长。维恩常数的实验测定值是  $2.898 \times 10^{-3} \text{米} \cdot \text{K}$ 。如果我们假定恒星表面的表现与黑体相同, 我们就可以通过测定  $\lambda_{\text{最大}}$ , 很好地估计出它们的温度。现在已知太阳的  $\lambda_{\text{最大}} = 5100 \text{埃}$ , 而北极星的  $\lambda_{\text{最大}} = 3500 \text{埃}$ , 试求出这两个恒星的表面温度。(1埃 =  $10^{-8}$ 厘米 =  $10^{-10}$ 米)

太阳的表面温度  $T = 2.898 \times 10^{-3} \text{米} \cdot \text{K} / 5100 \times 10^{-10} \text{米} = 5700 \text{K}$ 。北极星的表面温度  $T = 2.898 \times 10^{-3} \text{米} \cdot \text{K} / 3500 \times 10^{-10} \text{米} = 8300 \text{K}$ 。

在5700K, 太阳表面已接近于它的绝大部分辐射都处在可见光谱区内的温度。这暗示我们说, 我们的眼睛是通过人类进化的漫长时期逐渐适应于太阳, 才变得对它以最大强度辐射出的那些波长最为敏感的。

(b) 试利用斯忒藩定律(1-2)和刚才得到的两个温度值, 求出从每平方厘米恒星表面辐射出的功率。

对于太阳

$$\begin{aligned} R_T &= \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \text{瓦/米}^2 \cdot \text{K}^4 \times (5700 \text{K})^4 \\ &= 5.90 \times 10^7 \text{瓦/米}^2 \approx 6000 \text{瓦/厘米}^2 \end{aligned}$$

对于北极星,

$$\begin{aligned} R_T &= \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \text{瓦/米}^2 \cdot \text{K}^4 \times (8300 \text{K})^4 \\ &= 2.71 \times 10^8 \text{瓦/米}^2 \approx 27,000 \text{瓦/厘米}^2 \end{aligned}$$

**例1-2** 假定有两个很小的不透明物体用细线悬挂在一个抽真空的巨大空腔内, 彼此相距很远; 空腔的壁也是不透明的, 并保持恒定的温度。在这样的场合下, 这两个物体与空腔的壁只能通过辐射交换能量。设  $e$  是物体发射辐射能的速率,  $a$  是物体吸收辐射能的速率。试证明在平衡状态下,

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} = 1 \quad (1-5)$$

关系式(1-5)就是所谓基尔霍夫辐射定律。

平衡状态就是整个空腔系统都处在恒温下的状态, 因此, 在这种状态下, 每一个物体的发射速率都必然等于吸收速率。可见

$$e_1 = a_1, e_2 = a_2$$

因此,

$$\frac{e_1}{a_1} = 1 = \frac{e_2}{a_2}$$

如果其中有一个物体(比方说物体2)是黑体,这时,  $a_2 > a_1$ , 因为黑体是比非黑体更好的吸收体. 这样一来, 从式(1-5)可得出  $e_2 > e_1$ . 由此可见, 我们所观察到的良吸收体必定也是良发射体这个事实, 已经由基尔霍夫定律在这里预言过了.

### 1-3 经典的空腔辐射理论

在本世纪开始不久, 瑞利和金斯都计算过空腔(或黑体)辐射的能量密度, 计算的结果指出, 在经典物理学和实验结果之间存在着严重的冲突. 这种计算同在考虑许多我们以后要讨论到的其它现象(例如固体的比热)时需要进行的计算很相似, 所以, 我们在这里要讨论它的详细计算过程, 但是, 为了使我们在进行这类计算时有一个指导方向, 我们要先概略地谈谈一般的计算方法.

我们先考虑一个具有金属壁的空腔, 它的金属壁被均匀地加热到温度  $T$ . 这时, 金属壁会发出热频段的电磁辐射. 我们知道, 其所以会发生这种情形, 主要是由于金属壁中的电子受到热骚动而开始加速运动(见附录B). 不过, 我们不需要详细地研究腔壁中电子的行为. 我们所要做的, 是要集中注意空腔内部电磁波的行为. 瑞利和金斯的做法如下. 他们首先利用经典电磁理论去表明, 在空腔的内部, 辐射必定以驻波的形式存在, 并且驻波的节点就在金属表面上. 他们利用几何关系, 计数出在频率间隔  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  内这种驻波的数目, 以便确定驻波的数目同频率  $\nu$  有什么依赖关系. 其次, 他们利用经典分子运动论的结果, 计算出当系统处在热平衡状态时这些驻波的平均总能量. 在经典理论中, 这个平均总能量只取决于温度  $T$ . 把这个频率间隔内的驻波数乘上驻波的平均能量, 再除以空腔的体积, 就得到在频率间隔  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  内单位体积所包含的平均能量. 这就是我们所求的量——能量密度  $\rho_r(\nu)$ . 现在我们把这整个计算进行一遍.

为简单起见, 我们假定充满电磁辐射的金属壁空腔呈正立方体的形状, 它的棱长为  $a$ , 如图 1-3 所示. 这时, 在腔壁之间来回反射的辐射, 可以沿由腔棱决定的三个互相垂直的方向分解成三个分量. 由于相对的两壁互相平行, 这三个辐射分量不会相混, 因此, 我们可以分别对它们进行处理. 我们先考虑  $x$  分量和  $x=0$  那个金属壁. 所有射在这壁上的  $x$  分量的辐射都被它反射回去, 因此, 入射波和反射波就结合而形成驻波. 既然电磁辐射是一种横向振动, 并且其电场矢量  $\mathbf{E}$  垂直于波的传播方向; 又由于这个分量的传播方向同现在所考虑的腔壁相垂直, 所以电场矢量  $\mathbf{E}$  同腔壁相平行. 但是, 金属壁是不能维持一个同它的表面相平行的电场的, 因为壁中的电荷总是可以流动而把这个电场中和掉. 因此, 对于这个分量来说,  $\mathbf{E}$  在腔壁上必定永远等于零. 这就是说, 同辐射的  $x$  分量相关的驻波在  $x=0$  处必定有一个节点(即振幅等于零). 同样, 这个驻波在  $x=a$  处也必定有一个节点, 因为在这个相应的腔壁上也不能够存在同它的表面相平行的电场. 不仅如此, 这样的条件也适用于其他两个分量; 与  $y$  分量相关的驻波在  $y=0$  和  $y=a$  处必定有节点, 而与  $z$  分量相关的驻波在  $z=0$  和  $z=a$  处也必定有节点. 这些条件对空腔电磁辐射的可能波长, 因而也对可能频率施加了一个限制.

现在我们来考虑怎样计数波长处在  $\lambda$  到  $\lambda + d\lambda$  的间隔内(相应的频率间隔是  $\nu$  到  $\nu + d\nu$ )、节点处在空腔表面上的驻波数目的问题. 为了集中注意这种计算所牵涉到的概念, 我们首先要只

处理  $x$  分量;这就是说,我们所要考虑的是长度为  $a$  的“一维空腔”.这是一种简化了的、但不太真实的情形.在我们仔细处理好这种情形以后,我们就会知道,把所得到的结果推广到真实的三维空腔去是很容易的.

一维电磁驻波的电场,在数学上可以用下面的函数来描述:

$$E(x, t) = E_0 \sin(2\pi x/\lambda) \sin(2\pi \nu t) \quad (1-6)$$

式中  $\lambda$  是驻波的波长,  $\nu$  是它的频率,  $E_0$  是它的最大振幅.前两个量通过下面的方程彼此相联系:

$$\nu = c/\lambda \quad (1-7)$$

式中  $c$  是电磁波的传播速度.方程(1-6)所表示的波的振幅在空间中作正弦变化  $\sin(2\pi x/\lambda)$ , 并且它就象简谐振子一样,在时间中以频率  $\nu$  作正弦振动.由于在所有的时间  $t$ , 在满足关系式

$$2x/\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1-8)$$

的所有位置上,振幅都明显地等于零,所以,这个波具有固定不变的节点,也就是说,它是一个驻波.为了满足波在一维空腔的两端都有节点的要求,我们把  $x$  轴的原点选在空腔的一个端点 ( $x=0$ ) 上,这就要求在另一个端点上即当  $x=a$  时,

$$2x/\lambda = n \quad (1-9)$$

式中

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

这个条件决定了波长  $\lambda$  的一组容许值.对于这些容许值,驻波振幅的图样具有图 1-4 所示的形状.这些图样可以看作是两端固定的一根弦——这是一个同样满足式(1-6)的真实的物理系统——发生振动时的驻波的图样.但是我们上面所讨论的例子中,这些图样所代表的是电磁驻波.

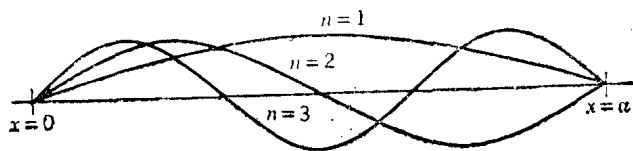


图1-4 在以  $x=0$  和  $x=a$  为腔壁的一维空腔中,当指标  $n$  的值等于1, 2, 3时,驻波振幅的图样.

在继续讨论下去的时候,利用容许频率来代替容许波长要方便一些.容许频率是  $\nu = c/\lambda$ , 其中  $\lambda = 2a/n$ .这就是说

$$\nu = cn/2a, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1-10)$$

我们可以画一个图来表示出这些容许的频率值:在这个图上画一根轴,并在轴上每一个整数  $n$

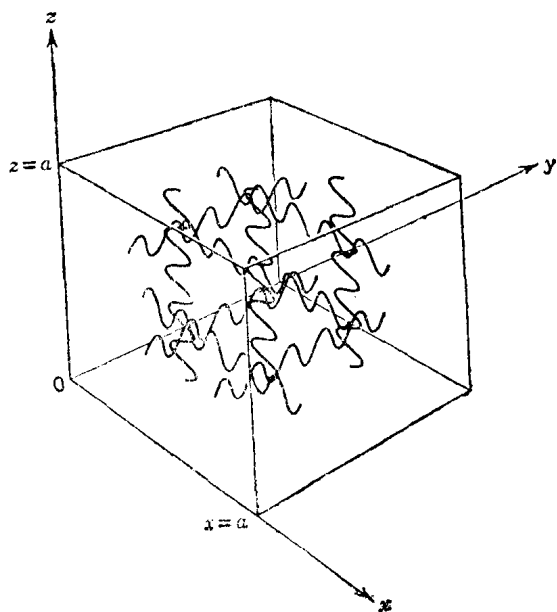


图1-3 一个呈正立方体形状的金属壁空腔,其中充满了电磁辐射.图中示出在腔壁上来回反射的辐射的三个互不干涉的分量,它们形成了一些节点处在每一腔壁上的驻波.

值标出一点.在这样的图上,按照式(1-10),与特定  $n$  值相对应的容许频率  $\nu$  的值,等于从原点到相应点的距离  $d$  的  $c/2a$  倍,或者说,距离  $d$  等于  $2a/c$  乘以频率  $\nu$ .这种关系示于图 1.5. 在计算从  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  范围内容许频率值的数目——我们把它叫做  $N(\nu)d\nu$ ——的时候,这种图是很有用的.要计算出这个量值,我们只需要在  $n$  轴上作出分别对应于频率  $\nu$  和  $\nu + d\nu$  的两个界限,并计数出处于这两个界限之间的点数就行了.由于这些点在  $n$  轴上均匀地分布,所以很明显,处在这两个界限之间的点数必定同  $d\nu$  成正比,但却与  $\nu$  的大小无关.其实我们也很容易看出,  $N(\nu)d\nu = (2a/c)d\nu$ .不过,我们应当把它再乘上一个附加因子 2,因为对于每一个容许频率,电磁波有两个可能的偏振态,结果就有两个相应的独立波.因此,我们得到

$$N(\nu)d\nu = \frac{4a}{c}d\nu \quad (1-11)$$

这样,我们就完成了在人为一维空腔场合下容许驻波数的计算.

上面的计算使我们可明显看出,把这种计算推广到真实的三维空腔场合上去应该怎样做.这种推广示于图 1-6. 原来在单一  $n$  轴上按整数值均匀分布的一组点,现在变成了一个均匀的

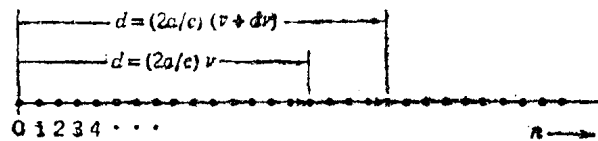


图 1-5 在长度为  $a$  的一维空腔内,决定容许频率值的指标  $n$  的容许值.

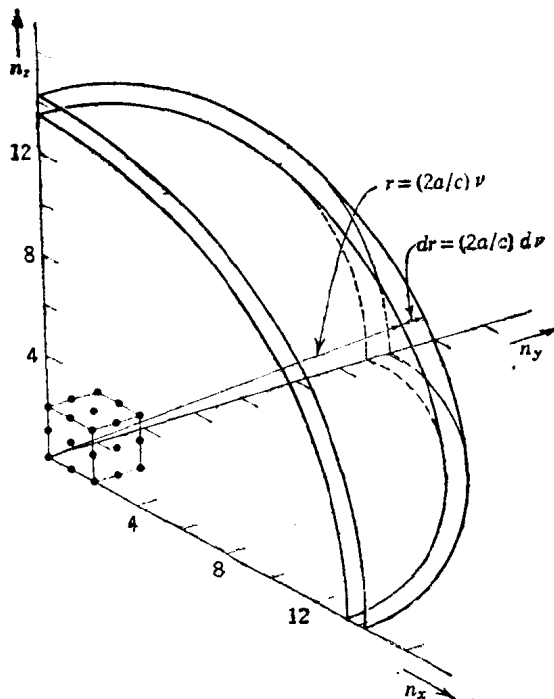


图 1-6 在棱长为  $a$  的正立方体三维空腔内,容许频率由三个指标  $n_x, n_y, n_z$  决定,其中每一个指标都只能取整数值.为简明起见,在同这三组指标相对应的许许多多阵点当中,这里只画出很少的几个阵点.

三维点阵,这些点的三个坐标是三个互相垂直的  $n$  轴上的整数值.这个点阵中的每一点都同一个特定的容许三维驻波相对应.每一阵点所指定的  $n_x, n_y, n_z$  的整数值分别给出这个三维波的  $x, y, z$  分量的节点数.这种做法相当于把一个三维波(即一个向任意方向传播的波)分解成三个一维波.这时在  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  的频率间隔内的容许频率数,等于半径分别对应于频率  $\nu$  和  $\nu + d\nu$  的两个球壳之间所包含的阵点数.这个量同两个球壳之间所包含的体积成正比,因为那些阵点是均匀分布的.这样,很明显,  $N(\nu)d\nu$  将正比于  $\nu^2 d\nu$ , 其中第一个因子  $\nu^2$  与球壳的面积成正比,第二个因子  $d\nu$  是两个球壳之间的距离.在下面的例子里,我们将详细进行计算,并求出

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (1-12)$$

式中  $V = a^3$  是空腔的体积.

**例 1-3** 试导出公式(1-12).这个公式给出在棱长为  $a$  的正立方体金属壁空腔的场合下,



每一个频率间隔内容许电磁波驻波的数目。

我们来考虑波长为 $\lambda$ 、频率为 $\nu=c/\lambda$ 的辐射，它的传播方向由 $\alpha, \beta, \gamma$ 这三个角度决定，如图1-7所示。这个辐射必定是个驻波，因为它的三个分量全都是驻波。我们已经在图上用一组同传播方向 $\alpha, \beta, \gamma$ 垂直的平面指出了这个驻波的几个固定节点的位置。辐射的这些节面之间的距离正好等于 $\lambda/2$ ，这里 $\lambda$ 是辐射的波长。我们还指出了它的三个分量的节点在三个坐标轴上的位置。这些节点之间的距离是

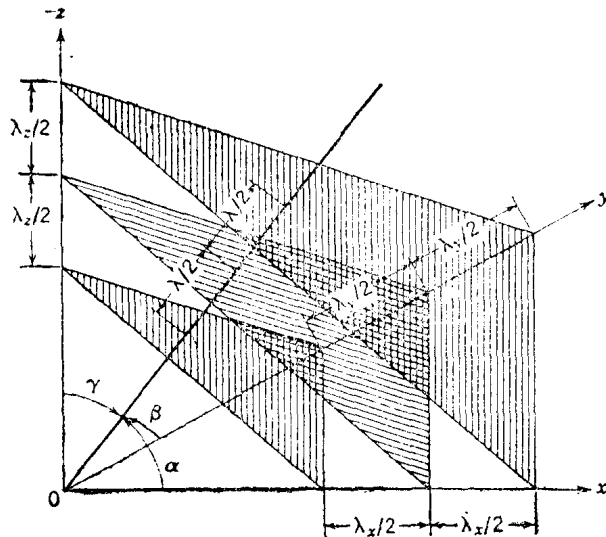


图1-7 在一个正立方体空腔内向一定方向传播的驻波的节面

$$\begin{aligned} \lambda_x/2 &= \lambda/2 \cos \alpha \\ \lambda_y/2 &= \lambda/2 \cos \beta \\ \lambda_z/2 &= \lambda/2 \cos \gamma \end{aligned} \quad (1-13)$$

现在我们要写出三分量电场在三个轴上的振幅表式。这三个表示式是

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E_{0x} \sin(2\pi x/\lambda_x) \sin(2\pi \nu t) \\ E(y, t) &= E_{0y} \sin(2\pi y/\lambda_y) \sin(2\pi \nu t) \\ E(z, t) &= E_{0z} \sin(2\pi z/\lambda_z) \sin(2\pi \nu t) \end{aligned}$$

$x$ 分量的表示式所表示的是最大振幅为 $E_{0x}$ 、空间变化为 $\sin(2\pi x/\lambda_x)$ ，并且以频率 $\nu$ 振动的一个波。由于在 $2x/\lambda_x=0, 1, 2, 3, \dots$ 时 $\sin(2\pi x/\lambda_x)$ 等于零，这个波是个波长为 $\lambda_x$ 的驻波，因为它有一系列彼此相距 $\Delta x=\lambda_x/2$ 的固定节点。 $y$ 分量和 $z$ 分量的表示式所表示的是最大振幅为 $E_{0y}$ 和 $E_{0z}$ 、波长为 $\lambda_y$ 和 $\lambda_z$ 的驻波，但是，这三个分量的驻波都以辐射的频率 $\nu$ 振动。应该注意到，这些表示式自动满足 $x$ 分量在 $x=0$ 处有节点、 $y$ 分量在 $y=0$ 处有节点、 $z$ 分量在 $z=0$ 处有节点的要求。为了使这些表示式同样满足 $x$ 分量在 $x=a$ 有节点、 $y$ 分量在 $y=a$ 处有节点、 $z$ 分量在 $z=a$ 处有节点的要求，我们要令

$$\begin{aligned} \text{当 } x=a \text{ 时, } 2x/\lambda_x &= n_x \\ \text{当 } y=a \text{ 时, } 2y/\lambda_y &= n_y \\ \text{当 } z=a \text{ 时, } 2z/\lambda_z &= n_z \end{aligned}$$

式中 $n_x=1, 2, 3, \dots; n_y=1, 2, 3, \dots; n_z=1, 2, 3, \dots$ 。应用式(1-13)，这些条件就变成

$$(2a/\lambda) \cos \alpha = n_x, \quad (2a/\lambda) \cos \beta = n_y, \quad (2a/\lambda) \cos \gamma = n_z$$