# 泛函微分方程

# FANHAN WEIFEN FANG CHENG

# 泛函微分方程

李森林　温立志

湖南科学技术出版社

**泛函微分方程**

李森林　温立志

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路8号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1987年1月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米　1/32　印张：15.625　插页：4　字数：412,000

印数：1—1,700

ISBN 7—5357—0020—3/O·1

统一书号：13204·148　**定价：5.85元**

湘目：86—10

# 序　言

由于近代科学技术的发展，在许多科学领域的研究中，例如力学、物理学、生物数学、经济数学、自动控制、通讯理论等等，都涉及到微分差分方程和微分积分方程。因为这些方程比常微分方程更精确地描述了客观世界。泛函微分方程就是这些方程的总称和概括。因此对泛函微分方程的研究，不但有重要的理论价值，而且有实用价值。

近年来，泛函微分方程在国内外发展很快，论文很多，但专著较少。在我国除了1963年出版过秦元勋教授等合编的《带时滞的动力系统的运动稳定性》一书外，到现在尚无专著。为了便于初学及开展这方面的工作，泛函微分方程的专著出版是很有必要的，本书即为此目的而作。

对于本书，我们在此作些说明。

第一，本书明确地将泛函微分方程划分为三大方向，即有界滞量的泛函微分方程、无界滞量的泛函微分方程，以及无穷延滞的泛函微分方程三个方向。在1978年以前，大多数的论文是研究有界滞量的泛函微分方程。J. K. Hale在1977年出版的专著《Theory of Functional Differential Equations》，就是当时对有界滞量泛函微分方程的研究的最新总结。自1978年以来，无界滞量和无穷延滞的泛函微分方程得到了极大的发展，系统的理论逐步地建立起来了。本书总结这方面的资料，系统地介绍这三个方向的内容，这就更全面地反映了整个泛函微分方程的研究情况。

第二，稳定性理论是常微分方程研究的重要内容，也是泛函微分方程研究的重要内容。近年来在这方面出现了许多新的研究成果，故本书以较多的篇幅着重介绍这方面的工作。

第三，振动理论是常微分方程和泛函微分方程的一个重要分支。近年来泛函微分方程的振动理论获得很大的发展，论文很多。本书特立一章扼要地介绍这方面的成果。

第四，由于本书涉及的面较广，而篇幅有限，故有些内容不可能作深入的介绍，读者可在参考文献中得到更多的补充。

由于我们编写这本书的时间比较仓促，所以在内容的取舍和安排上考虑得还不够周到，加上作者水平有限，故错误之处在所难免，切望同行及读者斧正。

全书的主要撰写工作，是由温立志负责完成的。

在这里我们对吴建宏同志的大力协助表示感谢。他阅读了本书的全部手稿，提出了不少宝贵的意见。此外，还协助作者编写了本书的部份内容。

李森林
温立志
1985年3月

# 目　录

# 绪　论

在自然科学和工程技术的研究中，许多现象都用微分方程作为它们的数学模型，这些问题实际上都是假定事物的变化规律只与当时的状态有关，而和过去的历史无关，就一阶微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t)),\ \ x(0)=c$$

而言，它描述的量$x$在时刻$t$的变化率是仅仅依赖于$t$和$x(t)$本身，而不依赖于$x$在时刻$t$以前的值。

但是，事实告诉我们，许多事物的变化规律不仅依赖于当时的状态，还依赖于过去的状态，在这种情况下，微分方程就不能很精确地描述客观事物了，代之而起的就是微分差分方程特别是带时间滞后的微分方程。事实上，在缜密的考察之下便会发现，除了理想的情形以外，动力系统总是存在滞后现象的，即使质点间力的传递或者以光速传递的信息也是如此，在自动控制的装置中，从输入信号到收到反馈信号，也必然相差一段的时间，因此，用传统的微分方程去描述系统的状态只是一种近似，必须符合精度的要求才行，否则将导致错误，下面列举一些实例来说明时滞微分方程在科学技术中出现的广泛性。

**例1**　1973年，W.P.London和J.A.Yorke 研究了麻疹传播的模型[1]为

$$\dot{S}(t)=\beta(t)s(t)[S(t-12)-S(t-14)-2r]+r.$$

其中$S(t)$表示在时刻$t$无免疫力的个体数目，$r$是这种个体在人口

中所占的比例，$\beta(t)$为人口特征函数，常数滞量14和12是潜伏期的上限和下限。

**例2** 1952年，К·Ф·Теодорчик得出了电磁开关触头的振动方程[2]。

$$m\ddot{x}(t)+r\dot{x}(t)+kx(t)=\tilde{f}(t-\Delta,x)。$$

其中$m$为触头的质量，$r$表示系统的摩擦（或阻尼）特性，$k$表示弹性恢复力的特性，函数$\tilde{f}(t,x)$表示作用在开关的触头上的力$f(t,x)$的共振分量，$\Delta$为一个正数。

**例3** С·Б·Норкин在他的专著[3]中，介绍了先由Tischler和Bellman后由Корokko和ЧЖенСинъи研究过的液体燃料火箭的燃烧过程，设$W_0$是固定的输入燃烧室的燃料质量的速度，$W_1(t)$是燃烧的质量速度，$W_2(t)$是输入燃烧室的质量的速度，输入的与燃烧着的燃料之间存在某种时间上的滞后：$W_1(t)=W_2(t-\tau(t))$。若略去压力小误差引起燃烧室内的温度变化，则输入流动过程中的小摄动$x(t)=W_2(t)-W_0$应满足方程：

$$\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+\beta x(t)+\gamma x(t-\tau(t))=\delta。$$

其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\delta$取决于油箱与燃烧室的压力差，油管的长度，截面积，摩擦系数，燃料的流动速度、比重等因素。

**例4** 1935年J.Tinbergen[4]研究了造船工业中的模型

$$\dot{x}(t)+bx(t-\tau)=\varepsilon x^3(t-\tau)。$$

其中$x(t)$表示时刻$t$的实有吨位数同预定值之差，$\tau$表示建造一艘船的平均周期，$b>o$及$\varepsilon$均为常数。

**例5** 1964年J.J.Levin和J.Nohel在研究核反应堆的燃料的循环理论中遇到了这样的方程：[5]

$$\dot{x}(t)=-\int_{t-r}^{t}a(t-u)g(x(u))du。$$

其中$x(t)$是表示时刻$t$时的中子密度。

**例6** 1963年Н.Н.Крхсовский在最优控制理论中研究了如下的方程组：[6]

$$\dot{x}(t)=P(t)x(t)+B(t)u(t),$$

$$y(t)=Q(t)x(t),$$

$$\dot{u}(t)=\int_{-r}^{0}\left[d_\theta\eta(t,\theta)\right]y(t+\theta)+\int_{-r}^{0}\left[d_\theta\mu(t,\theta)\right]u(t+\theta).$$

这里的积分是黎曼一斯蒂尔吉斯积分。

**例7** 1976年R. Brayton研究了无损传输线连接问题时得到为如下形式的方程

$$\dot{u}(t)-k\dot{u}\left(t-\frac{2}{S}\right)=f\left(u(t),u(t-\frac{2}{S})\right).$$

其中$S=\sqrt{LC}$.

从以上几个例子可以看到，时滞微分方程有着广泛的应用，它涉及许多学科中的许多领域，如人口理论〔7〕、〔8〕、〔9〕、医学问题〔10〕、〔11〕、〔12〕、〔13〕、生物学〔14〕、〔15〕、〔16〕、〔17〕、经济问题〔18〕、〔19〕、〔20〕、〔21〕、自动控制理论〔22〕、〔23〕、〔24〕、〔25〕、〔26〕、〔27〕、物理学〔2〕、〔9〕、〔28〕、〔253〕等许多的方面。

从以上的例子中还可以看到，时滞微分方程的形式是多种多样的，有线性的，有非线性的，有一阶的，有高阶的，有一个方程的，有方程组的，有自治的，有非自治的以及各种可以分类的特点，这些分类的特点与常微分方程是类似的或者是相同的，但是其中有一个重要的特点是常微分方程所没有的，就是偏差量的区别，人们利用偏差量的区别将时滞微分方程分为滞后型、中立型、超前型、混合型等等（见第一章§1）。

例3是特别值得注意的，方程中出现的滞后量不是常数，而是函数$\tau(t)$，一般地，人们把形如

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x(t-\tau_2(t)),\cdots x(t-\tau_m(t)))\qquad(1)$$

的方程叫做广义的微分差分方程，或叫做变时滞的微分方程，历史上很多人称之为泛函微分方程。

值得注意的是$f$的定义域，它是定义在$\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\cdots\times\mathbf{R}}_{m+2\text{个}}$上的函

数。即使方程(1) 作为方程组出现，其中$x$及$f$都是$n$维向量函数，此时$f$也只是定义在$\mathbf{R}\times\underbrace{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n}_{m+1个}$之中。

1959年，H.H.Красовский用泛函分析的观点，将$f$看作是$\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$的连续泛函，($C$是连续函数空间)从而方程(1)当各个$\tau_i(t)$有界时可以表为

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{2}$$

的形式，其中$x_t\in C$，这样一来，方程(2) 不但把常微分方程、常时滞的微分差分方程、变时滞的微分差分方程，甚至如例6那样具有积分形式时滞方程都统一起来，而且具有与常微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)), \tag{3}$$

类似的形式，所不同者，(2)中的$f$定义在$\mathbf{R}\times C$中而(3) 中的$f$ 定义在$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$中。因此，泛函微分方程(2) 也可以看作是函数空间 中的常微分方程。

自1959年以来，无论是一般的泛函微分方程或者是较具体的微分差分方程，其发展是非常迅速的，在解的基本理论、稳定性理论、周期解理论、振动理论、解算子理论、分支理论等许多方面都出现了重要的成果，70年代以来，每年都有数以百计论文问世，专著也陆继出 现，其中J. K. Hale 在1977 年出版的«Theory of Functional Differential Equations»是最新的总结，自1977年以来，无穷延滞和无界滞量的泛函微分方程也跟着兴起，它们与有界滞量的泛函微分方程形成三大方向，发展非常迅速。

在我国，有些学者在文化革命前已开始注意到泛 函 微 分 方程这个方向，出现了一些研究成果，秦元勋、刘永清、王联在1963年出版了专著«带有时滞的动力系统的运动稳定性»。到文化革命时这个方向的研究被迫中断了。直到1978年在青岛举行第一届微分方程会议，又开始重视起来。1979年在长沙举行了第一届全国泛函微分方程会议，1981年在合肥举行了第二届全国泛函微分方程会议，1984年在峨嵋举行了第三届全国泛函微分方程会议，通过这三次会议，大大地促进了我国泛函微分方程的研究与发展。

不但人数上大大地增加，而且研究的方向也愈来愈广泛，论文的水平也愈来愈高。相信不久的将来，这个数学分支一定会更加兴旺，它对我国四个现代化建设，将必作出更多更大的贡献。

# 第一章

# 泛函微分方程的概念及分类

## §1 微分差分方程的概念及分类

### 1 微分差分方程的分类

在常微分方程$\dot{x}(t)=f(t,x(t))$中，未知函数$x$在时刻$t$的变化速度，只是与时刻$t$及状态$x(t)$有关，但从绪论中的实例可以看到，在自然现象中有些状态的变化速度不但与当时的状态有关，而且与过去的状态有关，如例1中W.London与J.Yorke关于麻疹传播的模型

$$\dot{S}(t)=\beta(t)S(t)[S(t-12)-S(t-14)-2r]+r.$$

它表明在时刻$t$的无免疫力的人数的变化速度$\dot{S}(t)$不但与$S(t)$有关，而且与12天前和14天前的感染人数有关，一般地，如果一个方程具有如下的形式

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),x(t-r_1),x(t-r_2),\cdots,x(t-r_n)). \quad (1)$$

其中$r_i$为常数，则此方程叫做微分差分方程(Differential Difference Equation，简写为DDE)，$r_i$叫做偏差，这种方程的线性形式为

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)x(t-r_i)+g(t). \quad (2)$$

当$g(t)\equiv0$时方程(2)是线性齐次的，当$g(t)\not\equiv0$时便是非齐次的。

关于DDE的分类，现在还没有一套完整的方法，一般只作如

下的分类：

① 当$r_i \geq 0 (i=1,2,\cdots,n)$时，则称方程(1) 为滞后型的微分差分方程 (Retarded Differential Difference Equation，简写为RDDE) 或时滞微分方程，各个$r_i$均称为滞后量或滞量。

② 当$r_i \leq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$时，则称方程(1) 为超前型的微分差分方程 (Advanced Differential Difference Equation，简写为ADDE) 或时超微分方程，各个$r_i$均称为超前量或超量。

③ 如果方程具有如下的形式：

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1)\cdots,x(t-r_n),\dot{x}(t-\tau_1),\cdots,\dot{x}(t-\tau_m))。\tag{3}$$

其中$r_i \geq 0 (i=1,2,\cdots,n)$，$\tau_i > 0 (i=1,2,\cdots,m)$。则称此方程为中立型的微分差分方程 (Neutral Differential Difference Equation，简写为NDDE)。

上述的分类方法是不完整的，例如方程

$$\dot{x}(t)=ax(t-1)+bx(t+1)$$

就不属于上述的三种类型。

对方程组的分类可类似地进行，只要将上述分类中的“函数”一词代之以“向量函数”即可。

在应用中最经常遇到的是滞后型，它的理论也被研究得比较深入和广泛，其次是中立型，超前型的研究进展甚微。

**2 微分差分方程概念的推广**

上述的微分差分方程中有两个特点，一是偏差$r_i$及$\tau_i$都是常数，二是偏差的个数是有限的，但实际应用上已超出这两个特点的范围，出现偏差不是常数及偏差的数目为无限的情形。

在方程(1) 中，如果偏差$r_i$是$t$的函数，即

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1(t)),\cdots,x(t-r_n(t)))。\tag{4}$$

此时方程(4) 是一种广义的微分差分方程，我们仍然称之为微分差分方程，亦有文献称之为具偏差变元的微分方程。

如果$r_i(t) \geq 0 (i=1,2,\cdots,n)$，则(4) 是滞后型的。亦有人称之为变时滞微分方程。

如果$r_i(t)\leqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则(4) 是超前型的，亦有人称之为变时超微分方程。

同理，如果方程(3)中的各个$r_i$及$\tau_i$均是$t$的函数，且$r_i(t)\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\tau_i(t)>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则对应的广义微分差分方程是中立型的。

下面我们将DDE进行另一种形式的推广，首先回顾方程(2)，

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)x(t-r_i)+g(t).$$

若$r=\max(r_1,\cdots,r_n)$，则各个偏差$r_i$离散地分布在区间$[0,r]$之中，现设想偏差不是离散地而是连续地分布在$[0,r]$之上，此时方程(2) 应转化为积分的形式，即

$$\dot{x}(t)=\int_0^r a(t,s)x(t-s)ds+g(t). \tag{5}$$

这种形式的方程称为微分积分方程，它是线性的。非线性的情形可写成如下的形式

$$\dot{x}(t)=\int_0^r f(t,s,x(t-s))ds,\quad (r>0). \tag{6}$$

**3 微分差分方程的初值问题**

下面介绍滞后型和中立型的微分差分方程的初值问题的提法。至于超前型的初值问题，至今尚未有一个公认的提法。

设$\mathbf{R}=(-\infty,\ \infty)$，$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$，$D$为$\mathbf{R}^n$中的一个开集。

① 滞后型微分差分方程的初值问题

在这里我们假定方程的滞后量都是$t$的连续函数，下面分四种情形进行考察。

(i) 有界滞量的方程的初值问题

设方程为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1(t)),\ \cdots,\ x(t-r_m(t))). \tag{7}$$

其中 $f$：$\mathbf{R}\times D^{m+1}\to\mathbf{R}^n$，$0\leqslant r_i(t)\leqslant r$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

如何给出方程(7)的初值？什么叫做方程(7)满足初值问题的

解？这与常微分方程是不同的。

首先给定一初始时刻$t_0\in\mathbf{R}$，若函数$x(t)$在$[t_0,b)$上是方程(7)的解，就必须要求$x(t)$在$[t_0,b)$上有定义且满足方程(7)，但(7)中含有$x(t-r_i(t))(i=1,2,\cdots,m)$，当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+r$时，$t-r_i(t)$有可能落在区间$[t_0-r,\ t_0]$之上，但是$x(t)$在$[t_0-r,\ t_0]$上是没有定义的，它等于多少，有待我们预先给定。例如给定$x(t)\equiv\varphi(t)$，$t_0-r\leqslant t\leqslant t_0$，那末$\varphi(t)(t_0-r\leqslant t\leqslant t_0)$就是方程(7)的一个初值，我们称之为初始函数，$t_0$与$\varphi(t)$合起来构成方程(7)的一个初始条件。

所谓方程(7)满足初值$\varphi(t)$ $(t_0-r\leqslant t\leqslant t_0)$的解，是指这样的函数$x$：$[t_0-r,\ b)\to D$，它在$[t_0-r,\ t_0]$上恒等于$\varphi(t)$，在$[t_0,b)$上满足方程(7)。

上述的初值问题的提法，是常用的提法，但仔细考察一下，便会发现它是不够精确的，例如方程 $\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\sin^2 t)$，$a$和$b$为常数，它是滞后型的方程，滞量 $r(t)=\sin^2 t\leqslant 1$，故有界。按上述的提法，对任一初始时刻$t_0$，初始函数$\varphi(t)$应在区间$[t_0-1,t_0]$上给出。但当我们取$t_0=\frac{\pi}{4}$时，满足$t\geqslant\frac{\pi}{4}$的一切$t-\sin^2 t$的值，均只落在区间$\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{4}\right]$之中，因此，初始函数$\varphi(t)$只需在区间$\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{4}\right]$给出即可，无需在区间$\left[\frac{\pi}{4}-1,\ \frac{\pi}{4}\right]$给出，因为在$\left[\frac{\pi}{4}-1,\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$上的$\varphi(t)$对方程毫无作用。如果我们取初始时刻$t_0=0$，此时，满足$t\geqslant 0$的一切$t-\sin^2 t$的值均不小于零。可见，初值只需在$t_0=0$处给出即可，例如$x(0)=x_0$。在区间$[-1,\ 0]$上给出初值是不必要的。

当初始时刻$t_0$给定以后，初值$\varphi(t)$的精确定义范围应该是如下的集合：

$$E_{t_0}=\bigcup_{i=1}^{m}\{t-r_i(t):\ t-r_i(t)\leqslant t_0,\ t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}. \tag{8}$$