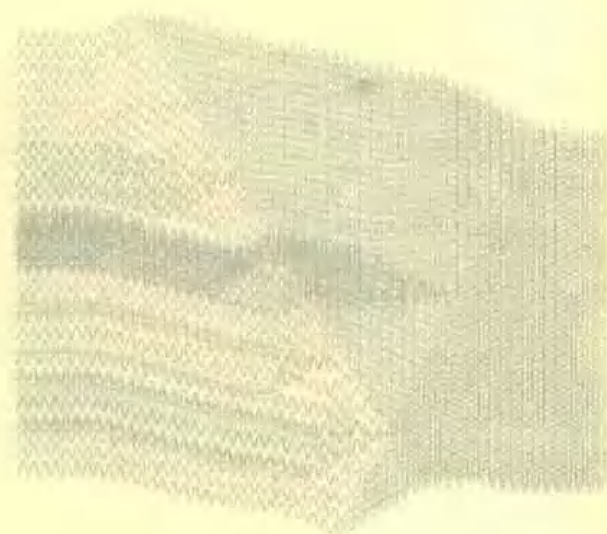


岩波講座 基礎工学 6

線形集中定数系論 III

高橋秀俊著



岩波書店

71.2'
24'
19-1

岩波講座 基礎工学 6

線形集中定数系論

III

高橋 秀俊



岩波講座 基礎工学 6 線形集中定数系論 III (全19巻/第18回配本)

1971年1月7日 第1刷発行 ©

東京都千代田区一ツ橋2-5-5 株式会社 岩波書店/精興社印刷・松岳社製本

目 次

第6章 伝送系としての4端子

6. 1 4端子の正実性	255
6. 2 リアクタンス4端子の合成	259
6. 3 梯子形構造によるLC4端子の実現	261
6. 4 多項式4端子	273
6. 5 与えられた動作伝達関数をもつLC4端子	276
6. 6 梯子形回路の等価変換	283
6. 7 梯子形LC回路上の波	285
6. 8 単一共振系による信号伝達	290
6. 9 4次の共振伝送系☆	302
6. 10 共振回路の結合	304
6. 11 結合共振回路の特性	306
6. 12 導波管の枝分れ	318

第7章 対 称 性

7. 1 対称成分と反対称成分	323
7. 2 左右対称型回路の解析	326
7. 3 固有振動	333
7. 4 対称性と群	335
7. 5 循環対称	344
7. 6 非可換群 $\mathfrak{S}_3$	352
7. 7 $\mathfrak{S}_3$ の固有値問題	360
7. 8 対称の位置にある節点	365
7. 9 力学系の対称性——回転群	367
7. 10 分子の振動(AB_2 型分子)	369
7. 11 分子の振動(3角錐形分子)	373
7. 12 立方晶系の対称性	375

伝送系としての 4 端子

第 5 章では線形系の周波数の関数としての特性について一般的に論じたが、本章では 4 端子、それも主として LC 4 端子について、信号の伝達という立場からやや詳細な解析を行なうことにする。ここで特に問題になるのは鎖状構造、電気回路でいえば梯子形の回路の性質であり、特にその外的特性と構造との関係が前章の理論の一つの発展として扱われる。また、その最も簡単な場合として、単一共振系、結合共振系の信号伝達特性が論じられる。

なお、6.3~6.6 節の解析はかなり立ち入った話であり、電気工学関係にやや片寄った観もあるので、この部分をとばして読まれても支障はない。また、6.8 節以降の問題は、この種の理論の応用としても扱われるが、主として初歩的な方法で扱ってある。☆印のついた部分は上記理論の応用なのでとばしてもよい。

6.1 4 端子の正実性

$2n$ 端子の中で 2 端子に次いで簡単なのが 4 端子であるが、4 端子はまた、信号の伝送、つまり一方の端子対から信号を入れて他方の端子対から信号を取り出すような使い方をする場合の基本になるので、本章で再び取り上げることにする。

そのような意味から 4 端子で特徴的なのは、1.7 節にのべた伝送行列による表現である。そこでまず、4 端子の正実性の伝送行列についての表現を求めてみよう。それは

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(V_1^* I_1 + V_2^* I_2) &= \operatorname{Re}\{(A^* V_1^* - B^* I_2^*)(C V_2 - D I_2) + V_2^* I_2\} \\ &= \operatorname{Re}\{A^* C |V_2|^2 + (1 - A^* D - C^* D) V_2^* I_2 + B^* D^* |I_2|^2\} \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

そこで、この 2 次形式が正定値 2 次形式であるために

$$\operatorname{Re} A^*C = \frac{1}{2}(A^*C + AC^*) \geq 0, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} & 4 \operatorname{Re} A^*C \operatorname{Re} B^*D - |1 - A^*D - C^*D|^2 \\ &= (A^*C + AC^*)(B^*D + BD^*) - (1 - A^*D - C^*D)(1 - AD^* - CD^*) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

(6.3)を適当に変形すると

$$-(AD - BC)(A^*D^* - B^*C^*) + B^*C + BC^* + AD^* + A^*D - 1 \geq 0. \quad (6.4)$$

そこで $AD - BC = 1$ を使うと, (6.4)は結局

$$\operatorname{Re}(AD^* + BC^*) \geq 1 \quad (6.5)$$

と書けることがわかる. そこで $s = j\omega$ に対して (6.2), (6.5) がみたされることが伝送行列に対する正実性のための必要条件である.

円 線 図

4端子の右側端子対にインピーダンス Z_0 をつないだとき, 左側端子対から見たインピーダンス Z は

$$Z = \frac{AZ_0 + B}{CZ_0 + D} \quad (6.6)$$

であるが, (6.6)は $Z_0 \rightarrow Z$ という1次変換と考えることができる. つまり4端子はインピーダンスに対する一つの1次変換オペレーターだと考えることができる. そこでこれを Z_0 の複素平面から Z の複素平面への写像と考えてみると, それは, 円を円にうつす写像である. そこで特に Z_0 平面の方眼が Z 平面に写像されたものは, 図6.1のような2組の, それぞれ一点で接する, そうして互いに直交する円の群になる. そうして, この図形は問題とする4端子を(ある一つの ω に対して)図示したものと考えることができる.

ここで特に, Z_0 の右半平面が Z 平面で何に写像されるかが重要である. それは Z_0 の虚軸に対応する Z 平面の円の外か内かでなければならないが, $\operatorname{Re} Z_0 \geq 0$ のときは当然 $\operatorname{Re} Z \geq 0$ でなければならないから, それは Z 平面では虚軸より右側に含まれるような一つの円の内部にならなければならない. 実はそのことがこの4端子の正実性にほかならないことが, 次のようにしてわかる.

図6.1で円群が共通に接している点 P は $Z_0 = \infty$ に相当し, そこでその座標

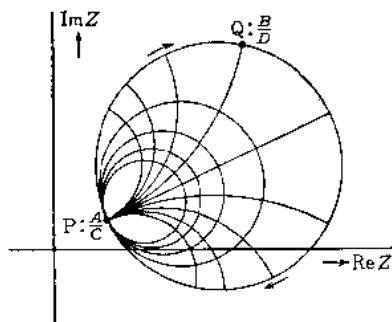


図 6.1 4端子によるインピーダンス平面の写像

は A/C である。また、 $Z_0=0$ が写像された点 Q の座標は B/D となる。 Z_0 の虚軸の写像である円の上では

$$\operatorname{Re} Z_0 = \operatorname{Re} \frac{DZ-B}{-CZ+A} = \operatorname{Re} \frac{(DZ-B)(-C^*Z^*+A^*)}{|CZ-A|^2} = 0. \quad (6.7)$$

すなわち、(6.7) の分子を 0 と置いた

$$\begin{aligned} (C^*D+CD^*)ZZ^* - (A^*D+B^*C)Z \\ - (AD^*+BC^*)Z^* + (A^*B+AB^*) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

がその方程式である。あるいは、簡単な計算で、

$$\left(Z - \frac{AD^*+BC^*}{C^*D+CD^*}\right) \left(Z^* - \frac{A^*D+B^*C}{C^*D+CD^*}\right) - \frac{1}{(C^*D+CD^*)^2} = 0 \quad (6.9)$$

となることがわかる。これから、円の中心の座標は

$$\frac{AD^*+BC^*}{C^*D+CD^*} \quad (6.10)$$

であり、半径は

$$r = \frac{1}{C^*D+CD^*} \quad (6.11)$$

であることがわかる(図 6.2)。そこで、円が右半平面内にあるためには

$$\operatorname{Re}(AD^*+BC^*) \geq 1 \quad (6.12)$$

でなければならない。

この場合

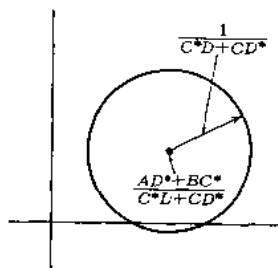


図 6.2

$$1/r = C^*D + CD^* \geq 0 \quad (6.13)$$

でなければならないのはもちろんである。そこで(6.12)と(6.13)とが、この4端子の正実性の条件にほかならない。

ここで(6.13)は前の(6.2)とは同じではない。しかし正実性条件のうちの一つの式はいろいろに書けるので、どれを採用しても同じことであることが容易に証明できる。 $AD - BC = A^*D^* - B^*C^* = 1$ の関係を利用すると、(6.13)は

$$\operatorname{Im} A \operatorname{Im} D + \operatorname{Re} B \operatorname{Re} C \geq 0 \quad (6.14)$$

と書くこともできる。

4端子の正実性の条件には、そのほかに、 s の右半平面で Z_{11} , Z_{22} 等が極をもたないという条件がある。この条件を伝送行列に適用すると、右半平面内のすべての s についても(6.12), (6.13)が成立することが正実性のための必要かつ十分な条件であることがわかる。なお、 A, B, C, D 等は、 Z_{12} の零点に対応して

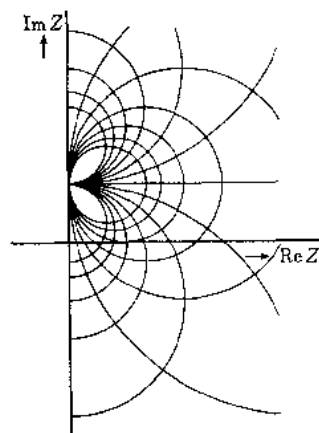


図 6.3 純リアクタンス
4端子によるインピー
ダンス平面の写像

右半平面に極をもつことが可能で、正実性と抵触しないことに注意しておこう。これは他の多くの行列の要素と違う点である。しかし一方零点は存在しない。

なお、純リアクタンス素子ばかりから成る4端子では、 $Z_{ik}(j\omega)$ はすべて純虚数であるから、(1.90)により A, D は実数、 B, C は純虚数である。それに対応して、前述の円は、半径が ∞ の円、つまり虚軸そのものになる。そこで、 Z_0 の右半平面は、図6.3のようにそっくり Z の右半平面に写像される。

6.2 リアクタンス4端子の合成

4端子についても $Z_{ik}(s)$ を与えて実際の回路を求める合成の問題があるが、2端子の場合とくらべてはるかに面倒になるので、ここでは立ち入らない。ただ純リアクタンス4端子、つまり LC 回路の場合だけを考えよう。

LC 4端子については、まず、 $Z_{ik}(s)$ の極はすべて虚軸上にあり、したがって Z_{ik} は

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \sum_r \frac{2a_{11}^{(r)}s}{s^2 + \alpha_r^2} + \frac{a_{11}^{(0)}}{s} + a_{11}^{(\infty)}s, \\ Z_{12} &= \sum_r \frac{2a_{12}^{(r)}s}{s^2 + \alpha_r^2} + \frac{a_{12}^{(0)}}{s} + a_{12}^{(\infty)}s, \\ Z_{22} &= \sum_r \frac{2a_{22}^{(r)}s}{s^2 + \alpha_r^2} + \frac{a_{22}^{(0)}}{s} + a_{22}^{(\infty)}s. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

ここで留数 $a_{ik}^{(r)}$ はすべて実数で、

$$a_{11}^{(r)} \geq 0, \quad a_{22}^{(r)} \geq 0, \quad (6.16)$$

$$a_{11}^{(r)}a_{22}^{(r)} - (a_{12}^{(r)})^2 \geq 0 \quad (6.17)$$

が成り立つ。そこでいま

$$Z_{11} = Z_{11}' + Z_{11}'' \quad (6.18)$$

と置いてみる。ここで Z_{11}' は、その極の位置は Z_{11} と同じで、その留数は

$$a_{11}^{(r)'} = \frac{(a_{12}^{(r)})^2}{a_{22}^{(r)}} \quad (6.19)$$

によって与えられるものとする。したがって Z_{11}'' の極は

$$a_{11}^{(r)''} = a_{11}^{(r)} - \frac{(a_{12}^{(r)})^2}{a_{22}^{(r)}} = \frac{a_{11}^{(r)}a_{22}^{(r)} - (a_{12}^{(r)})^2}{a_{22}^{(r)}} \geq 0, \quad (6.20)$$

したがって Z_{11}' も Z_{11}'' も、その極の留数はすべて正であり、したがって2端子のインピーダンスとして実現可能である。また $a_{11}^{(r)'}$ については

$$a_{11}^{(r)'} a_{22}^{(r)} - (a_{12}^{(r)})^2 = 0 \quad (6.21)$$

が成り立つ。これは極の留数のみたすべき条件(6.17)の等号の場合であるから、これによってつくった4端子

$$(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11}' & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

は実現可能である。そこで、もとの4端子を

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}' & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{11}'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

のように分解することができる。これは図6.4のように端子対の方に Z_{11}'' を直列につけた形に相当する。

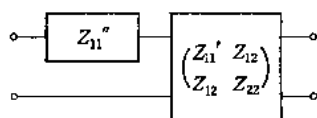


図 6.4

4端子(6.22)は図6.5のような回路で実現できる。ただし各コイルはすべて密結合変圧器を形成しており、

$$\left. \begin{aligned} L_1^{(r)} &= \frac{2a_{11}^{(r)'}}{\alpha_r^2}, & L_2^{(r)} &= \frac{2a_{22}^{(r)}}{\alpha_r^2}, \\ C^{(r)} &= \frac{1}{2a_{22}^{(r)}}, \\ L_1^{(\infty)} &= a_{11}^{(\infty)'}, & L_2^{(\infty)} &= a_{22}^{(\infty)}, \\ C^{(0)} &= 1/a_{22}^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

なお $\omega=0$ が極である場合、もしここでの留数 $a_{11}^{(0)}$ について $a_{11}^{(0)'} \neq a_{12}^{(0)}$ であると、これは理想変圧器を使わなければ実現できない。これは(6.23)のような分割をやってしまった後では、どうにもならないが、 $\omega=0$ での極だけは別にして考えれば、実現できる場合もある。すなわち

$$a_{11}^{(0)} \geq a_{12}^{(0)}, \quad a_{22}^{(0)} \geq a_{12}^{(0)} \quad (6.25)$$

がみたされているなら、

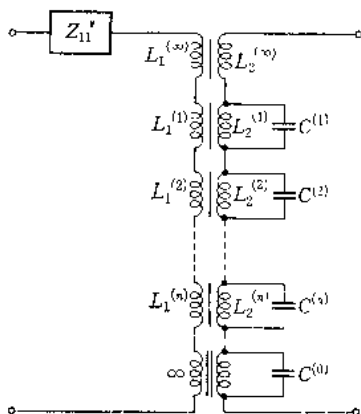


図 6.5 リアクトランス 4 端子の
部分分数構造による実現

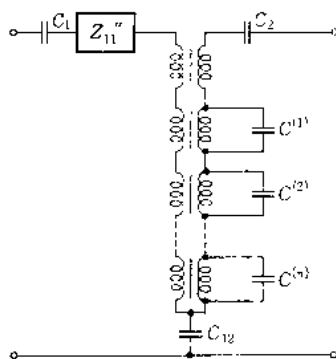


図 6.6 理想変圧器を使わない
でできる場合

$$\left. \begin{aligned} 1/C_1 &= a_{11}^{(0)} - a_{12}^{(0)}, & 1/C_2 &= a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)}, \\ 1/C_{12} &= a_{12}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

とすることによって、図 6.6 のような実現が得られる。なお、これらの C のうちで、 ∞ ($1/C=0$) になるものがあれば、それは何もない(短絡)と解釈する。

6.3 梯子形構造による LC 4 端子の実現

図 6.6 のような回路は Z 行列の部分分数表示から導かれるもので、理解しやすいが、実用的にはあまりよいとはいえない。その理由の一つは密結合変圧器が実際にはつくりにくいことであるが、もう一つは、4 端子の重要な用途であるフィルタ等の伝送用回路の場合、素子の誤差がその特性、特に遮断領域の特性に大きく影響することがあることである。そこで、伝送用 4 端子には、以下にのべる梯子形(縦統型)構造がより实际的である。

部分分数型で実現する場合は Z_{12} の極に着目したのに対し、梯子形で実現する場合は、主として Z_{12} の零点に着目する。 Z_{12} の零点とは、この 4 端子を通して信号が伝達されなくなるような s の値であり、つまり減衰(伝達率の逆数)が無限大になる点であるので、しばしば減衰極と呼ばれる。梯子形の合成は、4 端子から図 6.7 のように直列の枝、並列の枝を交互に分離して、残る 4 端子の次数を下げて行くことによって行なわれ、その点で 2 端子のブルーネの実現

法と似ている。そうして、直列の枝のインピーダンスの極、または並列の枝のアドミッタンスの極を減衰極の一つに一致させることにより、減衰極が残りの4端子から除去されて行くのである。そうして最後に、素通しの4端子または1個の理想変圧器が残るようになれば合成は完了する。

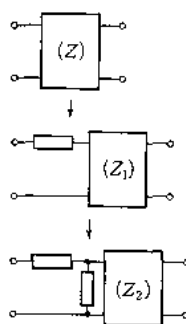


図 6.7 梯子形による合成手順

ここで、減衰極は Z や Y の極とち

がって多重極が許されることに注意しなければならない。また、減衰極は虚軸上だけでなく、複素平面の任意の場所にあらわれる。ただ、 LC 回路の場合は、 $Z_{12}(s)$ は奇関数であるから、零点は正負が必ず対になってあらわれ、しかも複素数の場合には必ず共役複素数と対になっているから、減衰極は次のようにいつも組になってあらわれる。

- a) $s=0, s=\infty$: これらは単一である。
- b) 純虚数 $s=\pm j\alpha$: 2個1組。
- c) 実数 $s=\pm\beta$: 2個1組。
- d) 複素数 $s=\pm j\alpha\pm\beta$: 4個1組。

そうして、減衰極がこのどの類であるかによって、それを分離する方法と、その難易がだいぶ異なってくる。

まず、4端子の Z 行列を、 s の関数として分数式の形で

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}/g & f_{12}/g \\ f_{12}/g & f_{22}/g \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

と書くことにする。ここで $f_{11}, f_{12}, f_{22}, g$ はいずれも s の実多項式で、一応全部に共通な因子はないものとする。

Z_{ik} の極の留数については多くの場合 (6.21) が成り立っている。そのときは、その s 、つまり $g(s)$ の零点において

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2=0 \quad (6.28)$$

となっている。そこで (6.28) の左辺は g で割れて

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2=gh \quad (6.29)$$

のように書ける。ここで h も s の多項式である。

ところで、 $g(s)$ の零点のいくつか $ja_1, ja_2, \dots, ja_m$ において (6.28) が成り立たないときには、 $f_{11}, f_{22}, f_{12}, g$ のすべてに $\prod_{i=1}^m (s - ja_i)$ を乗じる。そうしても Z_{ik} は変わらない。そうすると (6.29) の左辺は $\prod_{i=1}^m (s - ja_i)^2$ で割り切れ、 g もまた $\prod_{i=1}^m (s - ja_i)^2$ を含むので、 $f_{11}f_{22} - f_{12}^2$ は g で割りされることになる。こうして Z_{ik} の分母、分子に全部に共通の因子が入ることを許すことによって、いつも (6.29) が成り立つようにできる。ただし、 $f_{11}, f_{22}, f_{12}, g, h$ の全部に共通な因子はないものとする。その条件によって、これらは定数係数を除いて一義的にきまる。

すると

$$A = Z_{11}'Z_{22} - Z_{12}^2 = gh/g^2 = h/g. \quad (6.30)$$

また

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{22}/h & -f_{12}/h \\ -f_{12}/h & f_{11}/h \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

と書ける。また伝送行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}/f_{12} & h/f_{12} \\ g/f_{12} & f_{22}/f_{12} \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

なお、ここで減衰極とは $f_{12}=0$ となる s のことであると定義する。また、 $f_{11}, f_{12}, f_{22}, g, h$ の 5 個の多項式のうちで最も次数の高いものの次数 n をこの 4 端子の次数と定義する。さらに、 f_{12} が m 次多項式であるとき、 $m < n$ なら、 $s = \infty$ に $(n-m)$ 次の減衰極があるということにする。

梯子形合成の問題で、4 端子を左から分離して行く場合、いつも二つの量

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= A/C = f_{11}/g, \\ 1/Y_{11} &= B/D = h/f_{22} \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

を同時に考える。前者は右端を開放したとき、後者は右端を短絡したときの左から見た入力インピーダンスである。この二つの量はある意味で 4 端子を特徴づけているのである。

左側からある素子を分離する場合、この二つのどちらからでもそれが分離できるのでなければならない。すなわち、この二つから共通に引き出せる要素を分離して行くのが、合成の基本方針である。

次に上記の各種の減衰極を分離する手続きを示そう。

a) $s=0$ または ∞ にある減衰極の分離

$s=0$ または ∞ にある減衰極を分離するのは直列または並列に単純な L または C を分離すればよいので比較的簡単である。

(i) **$s=\infty$ の減衰極の分離** これには、直列の L または並列の C を分離して行けばよい。

仮定により (∞ に減衰極があるから) $n > m$ である。そこで f_{11}, f_{22}, g, h の次数の関係は、これを $\frac{(f_{11})}{(g)} \Big| \frac{(h)}{(f_{22})}$ のようにならべて記すと

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{n}{n-1} \Big| \frac{n-1}{n-2}, & \text{(b)} \quad & \frac{n-1}{n-2} \Big| \frac{n}{n-1}, \\ \text{(c)} \quad & \frac{n-1}{n} \Big| \frac{n-2}{n-1}, & \text{(d)} \quad & \frac{n-2}{n-1} \Big| \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

のどれかの型である。これは隣り同士の次数の差が1であるという条件によってきまる。ただし

$$\frac{n}{n-1} \Big| \frac{n-1}{n}$$

のようなものは許されない。このときは $f_{12}^2 = f_{11}f_{22} - gh$ が $2n$ 次となり、 f_{12} は n 次となって仮定に反するからである。

なお f_{11} と f_{12} の次数の差は偶数でなければならないから、 $n-m$ が偶数なら (a), (d) の型、 $n-m$ が奇数なら (b), (c) の型だけが可能である。

いま、(a) または (b) の場合だとする。すなわち $Z_{11}, 1/Y_{11}$ が共に $s=\infty$ に極をもつ場合である。そのときは4端子から直列に L を一つ取り出すことができる (図6.8)。すなわち

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= Z_{11}' + Ls, \\ \frac{1}{Y_{11}} &= \frac{1}{Y_{11}'} + Ls. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

ここで、 L の値は $Z_{11}', 1/Y_{11}'$ で $s=\infty$ が極でなくなるような値にすればよい。それには $Z_{11}, 1/Y_{11}$ の極の係数が等しくなければならない。それには

$$\frac{f_{11}}{g} - \frac{h}{f_{22}} = \frac{f_{12}^2}{gf_{22}} \quad (6.35)$$

が $s \rightarrow \infty$ で極をもたない必要があるが,

(6.35) の分母は $(2n-3)$ 次だから, f_{12}

の次数が $m \leq n-2$ ならばそうなる.

そこで

$$\left. \begin{aligned} f_{11}' &= f_{11} - Lsg, \\ h' &= h - Lsf_{22} \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

となり, $\frac{(f_{11}')}{(g')} \mid \frac{(h')}{(f_{22})}$ の次数は $\frac{n-2}{n-1} \mid \frac{n-3}{n-2}$ または $\frac{n-3}{n-2} \mid \frac{n-2}{n-1}$ となる.

もし $m=n-1$ であると, Z_{11} と $1/Y_{11}$ の極の係数は等しくない. そのときは L としてはその二つのうち小さい方を消すようにとる. このときは (b) の型であるから, 消えるのは Y_{11} の方でなければならない. そこで結果は h の次数だけが下がって $\frac{n-1}{n-2} \mid \frac{n-2}{n-1}$ となる.

なお, 変換 (6.36) によって f_{12}^2 は変化しないことは明らかである. そこで以上のようにして, L を直列にとり出すと, 回路の次数は 1 だけ下がり, m の方は変わらない. したがって減衰極の次数が 1 だけ下がる.

同様にして, 次数の関係が前述の

(c) または (d) のときは, $1/Z_{11}$, Y_{11} が $s = \infty$ に極をもつから, C を並列に取り出すことができる (図 6.9). そこで (6.

34) に対応して

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= Y_{11}' + Cs, \\ \frac{1}{Z_{11}} &= \frac{1}{Z_{11}'} + Cs \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

となり, あるいは

$$\left. \begin{aligned} f_{22}' &= f_{22} - Csh, \\ g' &= g - Csf_{11} \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

で f_{22}' , g' がきまる. そこで $\frac{(f_{11}')}{(g')} \mid \frac{(h')}{(f_{22})}$ の次数は $\frac{n-1}{n-2} \mid \frac{n-2}{n-3}$ 又は $\frac{n-2}{n-3} \mid \frac{n-1}{n-2}$ になり, やはり 1 次下がり, したがって減衰極の次数が 1 だけ下がる.

$m=n-1$ であるときは, やはり係数の小さい方の極を消すように C を取り出す. それは $1/Z_{11}$ の方であり, そこで g だけ次数が下がり結果は $\frac{n-1}{n-2} \mid \frac{n-2}{n-1}$ になる.

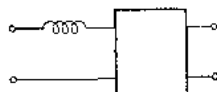


図 6.8

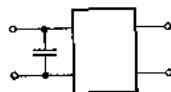


図 6.9

以上のようにして、次数 n が m より大きい限り、いつも直列の L または並列の C を取り出すことによって、回路の次数を下げるができる。

(ii) $s=0$ の減衰極の分離 この場合は直列の C 、または並列の L を分離して行けばよい(図 6.10)。

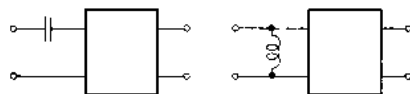


図 6.10

いま、 $f_{12}(s)$ の最低次の項の次数、つまり 0 における減衰極の次数を k としよう。容易に想像されるように、こんどは $f_{11}, f_{22}, \dots$ 等の $s=0$ でのふるまい、つまり、最低次の項が s の何乗であるかが問題になる。それを、前と同じように $\frac{(f_{11})_1^h}{(g)_1^h} \frac{(h)}{(f_{22})}$ のようにならべると、可能性は

$$(a) \quad \frac{0}{1} \Big| \frac{1}{2}, \quad (b) \quad \frac{1}{2} \Big| \frac{0}{1}, \quad (c) \quad \frac{1}{0} \Big| \frac{2}{1}, \quad (d) \quad \frac{2}{1} \Big| \frac{1}{0}$$

の 4 種である。やはり、隣り同士の差が 1 であるという条件と共通因子がないという条件からきまる。なお

$$\frac{0}{1} \Big| \frac{1}{0}$$

のような組合せは、 $f_{11}f_{22}-gh=f_{12}^2$ が $s=0$ で 0 でなくなるから、許されない。また k が偶数なら (a), (d), k が奇数なら (b), (c) の型しか許されない。

以下、 $s=\infty$ の極の除去と全く同様に進む。すなわち、(a), (b) の場合だと $s=0$ は $Z_{11}, 1/Y_{11}$ の極だから、 C を直列に取り出して

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= Z_{11}' + \frac{1}{Cs}, \\ \frac{1}{Y_{11}} &= \frac{1}{Y_{11}'} + \frac{1}{Cs}. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

$k \geq 2$ のときは、これによって $Z_{11}', 1/Y_{11}'$ 共に $s=0$ に極をもたないようにできる。すると、 f_{11}, h の最低次の項が消えるので、最低次の次数は 2 だけ増して、 $\frac{2}{1} \Big| \frac{3}{2}$ または $\frac{3}{2} \Big| \frac{2}{1}$ となる。しかしこの場合全部から s を約分することができるから

$$\left. \begin{aligned} f_{11}' &= \left(f_{11} - \frac{g}{Cs} \right) / s, & g' &= \frac{g}{s}, \\ h' &= \left(h - \frac{f_{22}}{Cs} \right) / s, & f_{22}' &= \frac{f_{22}}{s} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

のように変換すれば $\frac{(f_{11}')}{(g')} \bigg| \frac{(h')}{(f_{22}')}$ の次数は $\frac{1}{0} \bigg| \frac{2}{1}$ または $\frac{2}{1} \bigg| \frac{1}{0}$ になる。同時に

$$f_{12}' = f_{12}/s \quad (6.41)$$

となるから、 $k'=k-1$ 、つまり減衰極の次数が 1 だけ下がる。なお、(6.40)によって、回路網の次数も 1 だけ下がる。

同様にして (c) または (d) の場合は、 L を並列に分離して

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= Y_{11}' + 1/Ls, \\ 1/Z_{11} &= 1/Z_{11}' + 1/Ls, \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

また

$$\left. \begin{aligned} f_{22}' &= (f_{22} - h/Ls) / s, & h' &= h/s, \\ g' &= (g - f_{11}/Ls) / s, & f_{11}' &= f_{11}/s \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

として、次数は $\frac{0}{1} \bigg| \frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \bigg| \frac{0}{1}$ となる。

なお、 $k=1$ のときは、(b)、(c) だけが可能であるが、(b) の場合 Z_{11} と $1/Y_{11}$ の $s=0$ における極の留数が等しくなく、そのうちの小さい方、すなわち $1/Y_{11}$ の極だけを消すように C を選ばなければならない。その結果、次数は $\frac{1}{2} \bigg| \frac{2}{1}$ となり、約分の結果 $\frac{0}{1} \bigg| \frac{1}{0}$ となる。(c) の場合も同様である。その結果、0 における減衰極は完全に除去される。

b) 実周波数の減衰極の分離

実周波数、つまり純虚数の s の値 $\pm j\alpha$ に f_{12} の零点がある場合、それを分離する方法を考える。

そこで二つの場合に分けて考える。

(a) f_{11}, f_{22}, g, h のどれも $s = \pm j\alpha$ で 0 にならない場合。

(b) これらのうちに 0 になるものがある場合。

まず (a) の場合

$$Z_{11} - \frac{1}{Y_{11}} = \frac{f_{11}}{g} - \frac{h}{f_{22}} = \frac{f_{12}^2}{gf_{22}} \quad (6.44)$$