代數函數論

下　册

Н. Г. 捷波塔遼夫著

高等教育出版社

51.6223
11

中国科学院計算技术研究所
1957.12.16.
2602858
藏書

代 數 函 數 論

下 册

Н. Г. 捷波塔遼夫著
夏定中 戴執中譯

高等教育出版社

中国科学院計算中心
藏 书
001395

本書系根据苏联技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的捷波塔遼夫(Н. Г. Чеботарёв)著“代数函数論”(Теория алгебраических функций) 1948年版譯出的。

本書可作为大学生和研究生的选修課的教材，又数学研究工作者的参考書。

代　数　函　数　論

下　册

Н. Г. 捷波塔遼夫著

夏定中　戴执中譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海春明印刷廠印刷　新華書店總經售

書號 13010·210　開本 850×1168 1/32　印張 6 12/16　字數 175,000

一九五六年十二月上海第一版

一九五六年十二月上海第一次印刷

印數 1—11,000　　定價(7) ¥ 0.70

下 册 目 錄

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第六章　解析函数理論的应用

§ 37. 一般解析函数理論的知識

从本章起，我們將离开代数函数的算術理論的立場，而來陈述代数函数論的另外一些部分，它們主要是以一般的解析函数理論为其基礎的。在这里我們必須假定讀者已經具有了解析函数(复变函数)理論的基本知識。

在本節中，我們要讀者回憶一些在以后很有用的基本事实。这些事实的論証，我們可以从任何一本解析函数論的教程中知道。

复变量 $z=x+iy$ 的形如

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y) \tag{1}$$

的函数 $f(z)$，如果其中含兩个实变量 x、y 的实函数 u 与 v 在复变量 z 平面的某一个区域 K 內是可微的，並且在区域 K 內滿足微分方程組

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

的話，就称为解析函数。方程組(2)称为哥西-黎曼方程。

所謂复变量 $z=x+iy$ 的平面，我們理解为一个平面，在其中选定一个直角坐标系，而以复变量 z 的兩个分量 x、y 作为这平面中的点的坐标，於是在变量 z 的值与这平面的点之間，便建立起了一一对应的关系。

I. 解析函数 $f(z)$ 在区域 K 的每一个点处都有微商，卽極限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=f'(z),$$

这極限的值，同增量

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

的分量 Δx、Δy 趋向 0 的方式無关。

II．解析函数

$$w=f(z)=u+iv$$

使变量 $z=x+iy$ 的平面中的每一个点，同变量 w 的平面中的一个点成对应，这便是説，它作出了把一个平面映到另一个平面上去的映射：z 平面中的每一条曲線对应着 w 平面中的一条曲線，等等。这映射是个保角映射：如果在 z 平面中，兩条曲線相交成角度 θ，那末在 w 平面中，它們所对应的那兩条曲線也相交成同一个角度 θ。並且，z 平面中的角度方向（例如，逆时針方向），对应着 w 平面中的同一的角度方向（第一类保角映射）。

III．哥西定理．弧長有确定的有限值的曲線，称为可求長的曲線（спрямляемая кривая）。如果一条可求長的封閉曲線 C，包圍了一个完全位於 K 内的区域，那末曲線積分

$$\int_C f(z)dz=\int_C(u\,dx-v\,dy)+i\int_C(v\,dx+u\,dy)=0。\tag{3}$$

在这里主要的是需要在曲線 C 所圍成的那个区域的内部，函数 $f(z)$ 滿足前面所説的条件，或者，照通常的説法，$f(z)$ 是个正則函数。

要达到我們的目的，通常只須取由有限多節直線段所構成的折線，以及圓弧，來作为可求長曲線便夠了。

由格林公式

$$\int_C\{P(x,y)dx+Q(x,y)dy\}=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\tag{4}$$

与关系式（2），便可推得（3）式的成立。公式（4）右端的那个二重積分，是在曲線 C 所圍成的那个区域上來取的。並且，在以后我們还假定：沿閉路線的曲線積分，其所取的積分方向，总是使得当沿着这路線繞行一周时，路線所圍成的区域始終保持在其左方的那个方向。

IV．哥西公式．如果关於 C，作出如在 III 中一样的假定，並且

点 a 位於 C 的内部，那末

$$(5)\qquad f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{z-a}.$$

可能有人覺得，如在(3)中令

$$f_1(z)=\frac{f(z)}{z-a},$$

公式(5)就像是与公式(3)矛盾的。这个矛盾的解释是，$f_1(z)$並不是在 C 的内部处处都正則的；即，它在点 a 处变成無限大。

V. 泰勒級数. 如果点 a 取在区域 K 的内部[在以后我們將說：在函数 $f(z)$ 的正則性区域的内部]，那末在这个点处便可以定出函数 $f(z)$ 所有的高級微商的值：

$$(6)\qquad f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\cdot dz}{(z-a)^{n+1}}\qquad (n=1, 2, 3,\cdots),$$

其中 C 是任何一条整个位於 K 的内部、而且包含了点 $z=a$ 在其自己所圍的内部的可求長的閉曲線。这时函数 $f(z)$ 可以展开成級数

$$(7)\qquad f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots,$$

这級数对於在某一个以点 $z=a$ 为中心的圓的内部的所有点 z 來說都收斂，而对於在这个圓外部的点 z 來說則都發散。因此，所說的这个圓称为收斂圓。一方面，在收斂圓的内部，函数 $f(z)$ 是正則的；另一方面，在收斂圓的边界上必然至少有一个点存在，在这个点处 $f(z)$ 不再是正則的。

VI. 罗朗級数. 設函数 $f(z)$ 在由兩个圓周 C 与 c 所圍成的环形内部是單值而且正則的，圓周 C 与 c 的半徑分別是 R 与 r $(R>r)$，中心都在点 $z=a$ 处。这时函数 $f(z)$ 可以展开成一个在这环形的内部是收斂的級数，这級数是按照 $z-a$ 的正次冪与負次冪來排列的：

$$(8)\qquad f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{b_1}{z-a}+\frac{b_2}{(z-a)^2}+\cdots,$$

其中的系数有如下的表达式:

$$(9)\qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$(10)\qquad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)(z-a)^{n-1}dz\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)。$$

因为 $f(z)$ 在圓 c 的內部不是正則的,所以不应当認为

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

[参看(6)式]。

特別値得注意的是,$f(z)$ 在 C 的內部、除了点 $z=a$ 以外、处处都为正則时的情形。这时我們說,$f(z)$ 在点 $z=a$ 处,有一个孤立異点。級数(8)的含有 $z-a$ 的負次冪的部分,称为函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 处的主要部分。如果这主要部分等於 0,則 $f(z)$ 在点 $z=a$ 处便是正則的;如果它僅由有限多項組成,我們称点 $z=a$ 是函数 $f(z)$ 的極点,而且,如果

$$b_m\neq 0,\quad b_n=0\qquad(n=m+1,\ m+2,\cdots)$$

的話,就說这个極点是 m 階的。如果 $f(z)$ 在点 $z=a$ 处有 m 階極点,則乘積

$$(z-a)^m f(z)$$

在点 $z=a$ 处是正則的。当 z 趋近於 a 时,$f(z)$ 就趋於無限大。

如果在点 $z=a$ 处,函数 $f(z)$ 的主要部分由無限多項組成,那末点 $z=a$ 便称为函数 $f(z)$ 的本性異点。若 $z=a$ 是函数 $f(z)$ 的一个本性異点,那末,与極点不同,当 z 趋近於 a 时,函数 $f(z)$ 並不趋於無限大,而可以取与任何一个給定的数任意接近的値(維尔斯特拉斯定理)。我們在以后將不牽涉到本性異点,因为無論是有理函数,或者代数函数,都

不具有本性異点。

VII. 分歧異点. 解析函数$f(z)$的異点，若在它的任何一个鄰域內函数都不是單值的，便称为分歧異点。点$z=a$对於函数

$$w=\sqrt[n]{z-a}$$

來說，便可以作为分歧異点的一个例子。如果置

$$z-a=\rho\cdot e^{i\theta},$$

那末

$$w=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta}{n}}。$$

若使点z沿着圍繞$z=a$而半徑为ρ的圓周，經行一周，卽，保持ρ不变，而使輻角θ遍取从0到2π的一系列連續的值，那时函数w便不是回到它原先的那个值上，而是得到了一个因子

$$\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}},\quad \varepsilon^n=1。$$

只有当z繞点a經行n周后，我們才回到函数w的初始值上。分歧異点的更一般的例子，是按照$(z-a)^{\frac{1}{n}}$的整次冪排列的收斂級数的情形。这种分歧異点可以作为代数函数的特征，我們將在§38中更詳細地研究它們。

另外一种分歧異点的例子，是对於函数

$$w=\ln(z-a)$$

來說的点$z=a$。設

$$z-a=\rho e^{i\theta},$$

我們便有

$$w=\ln\rho+i\theta。$$

如果照前面那样，使z沿着以点a为中心的圓周經行一周，那时函数w便獲得了一个增量$2\pi i$。不論沿圓周經行多少周，我們終不能回复到w的初始值上。这样的分歧異点称做对数分歧点，以与前面所說的那种代数分歧点相区别。

VIII. 刘儆尔定理. 如果一个函数对於z的所有的值，連$z=\infty$这个值也在內，都是正則的，那么这函数等於一个常数。

这时，对於函数$f(z)$在点$z=\infty$处的情况，应当理解为就是函数$f\left(\frac{1}{z_1}\right)$在点$z_1=0$处的情况，这同我們在算術理論中已經有过的情形完全一样。

由刘微尔定理可以得出一些重要的推論，我們立刻就会看到，利用它們可以把函数按照其異点的特性來加以分类。

IX. 有理函数. 每一个有理函数，在任一点处，总或者是正則的，或者有極点。这只要用積分法中所常用的方法，把有理函数分解成部分分式，便很容易看出。特別如，多項式僅在点$z=\infty$处有極点。

倒轉來說，利用刘微尔定理，也容易証明：除了極点之外沒有其他異点的函数，必定是有理函数。首先可証明，在这种情形下，函数的極点的个数是有限多的：因为，假如不然的話，極点的聚点，也將是函数的一个異点了，但这个聚点並不是一个極点。然后，从函数中減去对应於它的所有極点（点$z=\infty$也包括在內）的那些主要部分，便得到一个处处正則的函数，根据刘微尔定理，它等於一个常数。

X. 代数函数. 跟自变量z以一个代数方程式

$$f(z, w)=0 \tag{11}$$

联系着的函数w，称为代数函数。

如果这个方程式(11)关於w的次数是n，那末对於z的每一个值，对应着w的n个值；因此，函数w不是單值的。如果值z_0、w_0满足方程式(11)，並且

$$\frac{\partial f(z_0, w_0)}{\partial w}\neq 0, \tag{12}$$

那末，在w是z的函数这一假定下，把方程式(11)微分任何多次，我們便可得出在点(z_0, w_0)处w的关於z的各級微商的值。利用公式(7)，我們可以得到把w展开成含$z-z_0$的整次冪的級数的一个展开式，这級数在一个經过函数w的最近異点的圓周內收斂，这种異点或者是函数w的極点，或者是使得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\frac{\partial f(z, w)}{\partial w}=0 \tag{13}$$

的点。但因为最后那种点使方程式 (11) 的判别式等於 0，而这判别式是 z 的一个多项式，所以函数 w 的異点的个数总是有限多的。在 § 38 中我們將看到，在使 (13) 成立的那些点处，函数 w 可以展开成按 $z-z_0$ 的分数次冪排列的級数，这便是說，那些点都是代数分歧点。

因此，代数函数的異点只可能是極点或者代数分歧点。反过來，在下面我們也將証实，每一个僅具有極点型与代数分歧点型的異点的函数，也必定是个代数函数。

XI. 确定解析函数的唯一性. 已經知道，如果两个解析函数的值，在，某一个区域內彼此相等，或者，甚至於僅在位於这两个函数的正則性区域內的某一条曲線上彼此相等，那么，在这两个函数的整个定义区域內，它們的值便都相等。

XII. 解析延拓. 上段所說的这个性質，使我們可以把原先用來規定函数 $f(z)$ 的那个区域 K，加以擴展。在 K 內选取一个圓心为点 $z=a_1$ 的圓 C_1 后，对於它的每一个內点，我們可以如同对於它的圓心那样，得出泰勒級数。設 C_1 的一个內点是 $z=a_2$。对於这个点的泰勒級数，是在以点 a_2 为圓心的某一个圓周 C_2 內收斂的。根据在 V 中所提到过的收斂圓的性質，圓 C_2 在一切情形下，都含有一个包含在 C_1 內的最大的圓，而在若干情形下，圓 C_2 也可能跑出到 C_1 的外面。对待 C_2，也像我們剛才对待 C_1 那样地來做，並且把这过程一直繼續下去，我們便把函数 $f(z)$ 的定义区域擴展到可能大的界限。这时我們可能会遇到下述的两种障碍：

1）可能会發現，把函数延拓到某一个区域的外面去是不可能的。在这样的情形下，这个区域的边界便叫做函数 $f(z)$ 的天然边界。要構造一个具有天然边界的函数的例子並不困难；例如，对於函数

$$1+z+z^{2^2}+z^{3^3}+z^{4^4}+\cdots+z^{n^n}+\cdots,$$

單位圓周

$$|z|=1$$

便是它的天然边界。可是，对於我們所研究的代数函数來說，天然边界並不存在。

2）可能会發現，函数的解析延拓，对於自变量的同一个值，达到了不同的函数值。更精确地說：設我們已經知道了函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 附近的展成幂級数的展开式，卽，展成按 $z-a$ 的乘幂排列、而在一个以点 a 为中心的圓 C 内收斂的級数的展开式(圖 5)。要求找出函数 $f(z)$

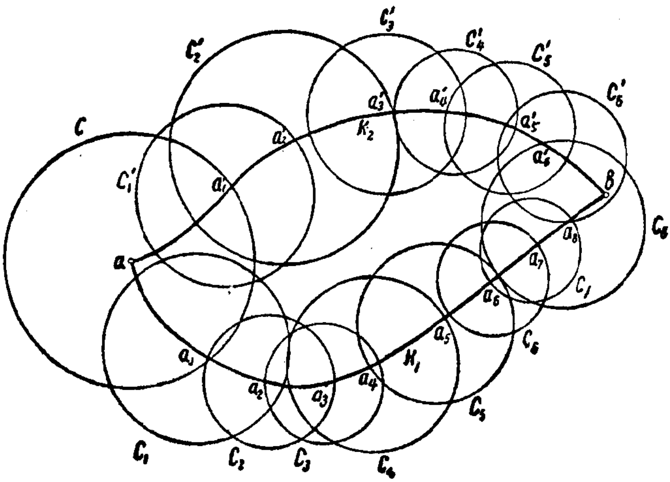

圖 5

在一个位於圓 C 外面的点 $z=b$ 处的值。为此，我們用一条可度長曲線 K_1 把点 a 与点 b 連接起來，並設 K_1 与 C 相交於函数 $f(z)$ 的一个正則点。我們作出把 $f(z)$ 展成 $z-a_1$ 的幂級数的展开式，其中 a_1 是位於 K_1 上而在 C 的内部的任何一个点。設这級数在一个越出圓 C 的界限的圓 C_1 内收斂。沿曲線 K_1 取一个位於圓 C_1 内部的点 a_2，再对於它來作出泰勒級数的收斂圓 C_2；並把这过程繼續下去。如果这时曲線 K_1 不

經过函数$f(z)$的異点，那末每一个这样所得到的圓C_i的半徑，都不小於由函数$f(z)$的異点到曲線K_1上的点的最近距离δ。另一方面，如果我們規定，例如，取点a_{i+1}为距离点a_i等於圓C_i的半徑的一半的点，那末，設K_1在点a与b之間的那段弧長等於s，則我們在進行这过程不超过

$$\frac{2s}{\delta}$$

步之后，便可到达点b而得出了函数$f(z)$在点b处的值。

設我們一方面沿着K_1实施解析延拓的过程，規定了$f(b)$；另一方面，沿着另一条連接点a与点b的可度長曲線K_2，实施解析延拓的过程，也規定了$f(b)$。在一般的情形，这两个值$f(b)$不必是相等的，而且在代数函数論中，也將給出这种情形的例子。可是，如果曲線K_1与K_2圍成了某一个区域K，那末，利用唯一性定理(参看XI)，可以証明：

如果在沿着曲線K_1与K_2作函数$f(z)$的解析延拓时，我們在点$z=b$处得到了不同的函数值，那么在区域K的內部，必定有分歧異点存在，在这些分歧異点的任何鄰域內，函数$f(z)$都不是單值的。

在§38中我們將看到：代数函数的分歧異点，总是代数分歧点。

XIII．諾依曼(C. Neumann)球面．在平面上來表示复变数的值有一种不方便之处，就是在平面上沒有任何点可与值$z=\infty$相对应，而这个值在代数函数論中，是同z的有限値沒有基本上的差別的。有鑒於此，C.諾依曼提出了用一种特殊的方式，把平面上的点，投影到球面上去。为此，他作一个任意半徑的球面，与复变数z的平面在点$O(0,0)$处相切(圖6)。然后，他把球面上与点O位於同一直徑上的那个点記作S(南極)。要作出平面上的任意一个点M到球面上的投影，我們把M同S連接起來，而把直線MS与球面的交点N，作为是这所求的投影。点N是唯一地規定了的，因为这直線与球面的另一个交点是S。

反过來，要找出在平面上同球面上的任意一个(異於S的)点N相

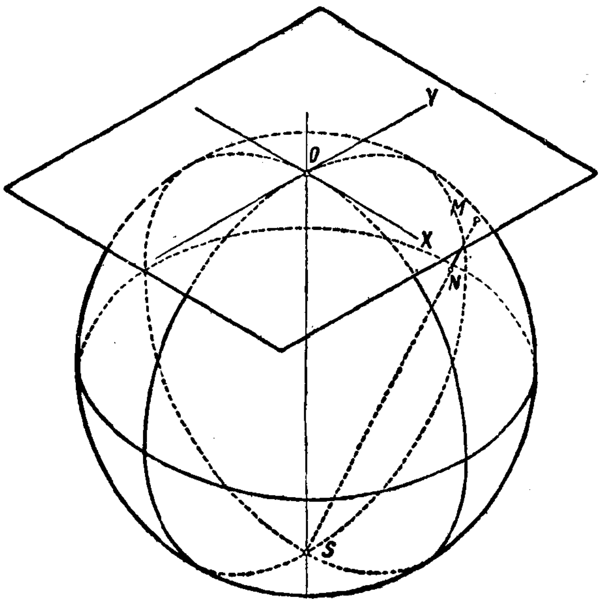

圖 6

对应的点，我們延長弦 NS 到它与平面的交点 M 处，而就把平面上的这个点 M 看作是对应於球面上的点 N 的。

如果点 M 無限制地远离 O，那末对应於它的那个点 N 便無限地接近於 S。我建議讀者，作为一个習題，去建立起距离 OM 与距离 SN 之間的关系。

因此，在平面上所作的一个以点 O 为中心的半徑極大的圓的外部，在球面上便对应着一个半徑極小而包含了点 S 在其內的圓的內部，卽，对应着点 S 的一个鄰域。这使得我們可以把点 S 看作是对应於值 $z=$ $=\infty$ 的。

我們要指出在解析函数論中与在解析几何中（就实际說，在投影几何中）無窮远点的解釋的不同之处。在解析几何中，平面內的每一个方向都对应着它自己的一个無窮远点，因此，全体無窮远点形成一条無窮远直線，这直線好像环繞着这个平面。

§ 38. 牛頓圖式

在上一節中我們已經知道，由方程式

$$(1)\qquad f(z,\ w)=0$$

所規定的代数函数 w，可以展成按照 $z-z_0$ 的整次冪排列的收斂級数，只要 z_0 不是方程式(1)的判別式 $D(z)$的根。我們現在來考慮更一般的情形，卽，我們对於 z_0 將不作任何的假設。我們只假定：方程式(1)的左端对於变量 z、w 不能分解成重因式，这便是說，判別式 $D(z)$ 不恆等於 0。

不影响普遍性，可以設 $z_0=0$；不然的話，我們可以就取差 $z-z_0$ 來作为 z 好了。

为了要使下面的研究更一般起見，我們假定：系数 $a_k(z)$是 $z^{\frac{1}{q}}$的冪級数，其中 q 是任何一个自然数。

設

$$(2)\qquad f(z,\ w)=a_0(z)+a_1(z)w+\cdots+a_{n-1}(z)w^{n-1}+a_n(z)w^n,$$

其中

$$(3)\qquad a_k(z)=c_{k0}z^{\rho_k}+c_{k1}z^{\rho_k+\frac{1}{q}}+\cdots\qquad(c_{k0}\neq 0;k=0,\ 1,\cdots,\ n)。$$

現在我們开始來尋求在形式上如級数

$$(4)\qquad w=\alpha z^{\varepsilon}+\alpha' z^{\varepsilon'}+\cdots\qquad(\varepsilon<\varepsilon'<\varepsilon''<\cdots,\ \alpha\neq 0)$$

的函数 w，其中的指数 ε, ε', ε'',…，一般說來都是分数。要求出 ε 与 α 的可能的値，我們注意到，当以(4)代入(2)中时，应当得到一个恆等於 0 的式子。特別是，z 的最低次冪的系数应当等於 0。当 ε 还沒有确定时，我們不能确切地說，所得到的項之中，那一些項是次数最低的；我們所知道的僅是，次数最低的項必包含在下面那些項中：

$$(5)\qquad c_{00}z^{\rho_0};\ c_{10}\alpha z^{\rho_1+\varepsilon};\ c_{20}\alpha^2z^{\rho_2+2\varepsilon};\ \cdots;\ c_{n0}\alpha^nz^{\rho_n+n\varepsilon}。$$

这些項的系数，都不等於 0；所以，要

$$f(z,\ \alpha z^{\varepsilon}+\cdots)$$

中的最低次項变成 0，必須选取 ε，使得在指数

(6) $$\rho_0,\ \rho_1+\varepsilon,\ \rho_2+2\varepsilon,\cdots,\ \rho_n+n\varepsilon$$

中，至少有兩个是彼此相等的，而其余的指数則都比較要大些；然后，便不难选擇 α，使得(5)中具有相等指数的那几項的系数的和等於 0。这問題可以用有限多次运算來解決：ε 应当是線性方程組

(7) $$\rho_i+i\varepsilon=\rho_j+j\varepsilon \qquad (i\neq j;\ i,\ j=0,\ 1,\cdots,\ n)$$

中一个方程式的根，而且在这些根中，僅有將其代入(6)中其余的式子中时都給出不小於 $\rho_i+i\varepsilon$ 的值的那些根，方能給出我們的問題的解。

为了要迅速而方便地求得这些 ε 的値，有一个几何的方法存在，这方法創始於牛頓，所以称为牛頓圖式，或牛頓多角形，或牛頓平行四边形。这方法是：在坐标紙上画出坐标为

(8) $$(0,\ \rho_0),\ (1,\ \rho_1),\ (2,\ \rho_2),\cdots,\ (n,\ \rho_n)$$

的那些点，再經过其中的每一个点，作具有角系数 ε 的平行直線（在这里，所謂角系数，我們理解为乃是所給的直線与 x 軸的負向之間所成的角度的正切）。这些直線中的每一条，与 y 軸相交於縱坐标

$$\rho_k+k\varepsilon \quad (k=0,\ 1,\cdots,\ n)$$

处。因此，需要在这些直線中至少有兩条最下的彼此相合，而其余的直線則都在較上的位置。

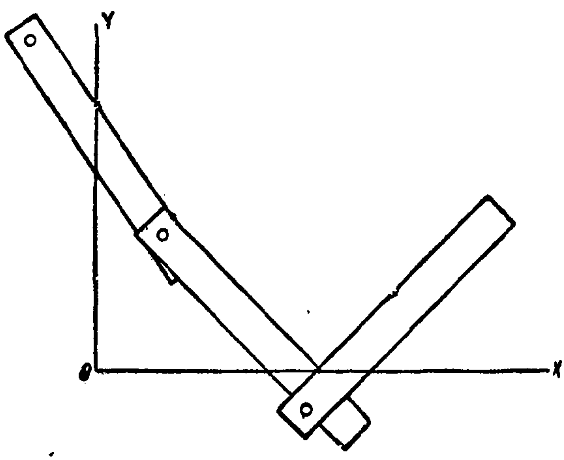

圖 7

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com