高等学校教材

[第三版] 下册

# 电路分析基础

DIANLUFENXI JICHU

李瀚荪 编

高等教育出版社

（京）112号

**图书在版编目（CIP）数据**

电路分析基础　下册/李瀚荪编．-3版．-北京：高等教育出版社，1998重印

高等学校教材

ISBN 7-04-004184-7

Ⅰ．电…　Ⅱ．李…　Ⅲ．电路分析-电路理论-高等学校-教材　Ⅳ．TM133

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第00917号

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京发行所发行

文 字 六 〇 三 厂 印 装

*

开本 850×1168　1/32　印张 12.125　字数 290 000

1979年4月第1版

1993年6月第3版　1998年7月第7次印刷

印数 268 214—284 223

定价 11.00元

# 目　　录

## 第三部分　正弦稳态分析

# 第 三 部 分

# 正弦稳态分析

# 第 十 一 章

## 阻抗和导纳

在正弦激励的动态电路中，若各电压、电流均为与激励同频率的正弦波，则该电路称为正弦稳态电路。从本章起，一直到第十五章，我们将研究正弦稳态电路的分析方法，即正弦稳态分析①。

不论在实际应用中还是在理论分析中，正弦稳态分析都是极其重要的。许多电气设备的设计、性能指标就是按正弦稳态来考虑的，例如，在设计高保真度音频放大器时，就要求它对输入的正弦信号能够“忠实地”再现并加以放大。又如，在电力系统中，大多数的问题也都可以用正弦稳态分析来解决。以后我们还会知道，如果我们掌握了线性、非时变电路的正弦稳态响应，那末，从理论上说，便掌握了它对任何信号的响应。

由于在正弦稳态电路中，各个电压、电流响应与激励均为同频率的正弦波，因而它们都可以用相量来表示。对这类电路中正弦时间函数的分析问题便可以简化为对相量的分析问题。也就是说，利用相量可以使微分方程的求解问题简化为复数方程的求解问题。所谓正弦稳态分析指的就是运用相量的概念对正弦稳态电路进行分析。为此，我们必须先研究正弦稳态电路中各电压、电流用相量表示后，各相量间的约束关系如何。这就是本章前几节所要讲的内容，这部分内容可以说是正弦稳态分析的基础。在这一

① 如果在学完电阻电路分析部分后就进入学习本部分的内容，则在授课时宜对动态电路的含义，正弦电压、电流的瞬时值表示以及相量表示等加以补充说明。

基础上，我们将引入阻抗和导纳这两个极其重要的概念，它们不仅能把电阻电路的分析方法推广应用于分析正弦稳态电路，还能表征电路元件和电路在正弦稳态时的性能。本章分析正弦稳态电路的电压和电流，在此基础上，下章将分析正弦稳态电路的功率和能量。

## §11-1 有效值 有效值相量

周期电流、电压的瞬时值是随时间而变化的，在电工技术中，我们往往并不需要知道它们每一瞬间的大小，在这种情况下，就需要为它们规定一个表征大小的特定值。用它们的平均值作为这一特定值是不合适的，因为正弦波(一类重要的周期波)在一个周期内的平均值为零。用它们的最大值也是不合适的，因为最大值只能表明某一瞬间的大小。

考虑到周期电流(电压)和直流电流(电压)施加于电阻时，电阻都要消耗电能，以此为依据，我们可以为周期波规定一个表征其大小的特定值。设有两个相同的电阻 $R$，分别通以周期电流 $i$ 和直流电流 $I$。当周期电流 $i$ 流过电阻 $R$ 时，该电阻在一个周期 $T$ 内所消耗的电能为

$$\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T i^2R\,\mathrm{d}t=R\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t$$

当直流电流 $I$ 流过电阻 $R$ 时，在相同的时间 $T$ 内所消耗的电能为

$$PT=RI^2T$$

如果在周期电流的一个周期(或其任意整数倍)的时间内，这两个电阻 $R$ 所消耗的电能相等，也就是说，就平均作功能力来说，这两个电流是等效的，则该直流电流 $I$ 的数值可用以表征周期电流 $i$ 的大小，我们把这一特定的数值 $I$ 称为周期电流 $i$ 的**有效值**(effective value)。如令以上两式相等，就可得到周期电流 $i$ 的

有效值的定义式，亦即

$$RI^2T=R\int_0^T i^2\mathrm{d}t$$

或

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t} \tag{11-1}$$

由(11-1)式所示的有效值定义可知：周期电流的有效值等于它的瞬时值的平方在一个周期内积分的平均值再取平方根，因此，有效值又称为方均根值(root-mean-square value)。

类似地，可得周期电压 $u$ 的有效值

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t} \tag{11-2}$$

本书用不加下标的大写字母表示有效值①。

把有效值的定义式运用于正弦电流

$$i=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_i)$$

可得

$$\begin{aligned}I&=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2\cos^2(\omega t+\theta_i)\mathrm{d}t}\\&=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{2}[\cos(2\omega t+2\theta_i)+1]\mathrm{d}t}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}I_{\mathrm{m}}=0.707I_{\mathrm{m}}\end{aligned} \tag{11-3}$$

类似地，可得

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}}=0.707U_{\mathrm{m}} \tag{11-4}$$

由此可见：正弦波的有效值为其振幅的 $1/\sqrt{2}$。有效值可代替振幅作为正弦量的一个要素。

---

① 有些教材，特别是国外的教材中，以电流为例，有效值常记为 $I_{\mathrm{eff}}$ 或 $I_{\mathrm{rms}}$。

必须指出：大部分使用于 50 Hz 的交流电表测读的都是有效值。50 Hz的电压或电流如不加申明通常都是指有效值，例如，我们日常生活中用的交流电为 220 V，指的就是有效值，其振幅为 $\sqrt{2}\times 220=311$ V。

引用有效值后，以电压为例，正弦波也可表为

$$\begin{aligned}u(t)&=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_u)\\&=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta_u)\end{aligned}\tag{11-5}$$

对应的电压相量则可表为

$$\dot{U}_{\mathrm{m}}=U_{\mathrm{m}}\underline{/\theta_u}=\sqrt{2}\,U\underline{/\theta_u}\tag{11-6}$$

在正弦稳态电路的计算问题中，有时我们关心的是正弦量的有效值，因此，我们把上式中的复数 $U\underline{/\theta_u}$ 定义为电压有效值相量，记为 $\dot{U}$，这就是说，电压有效值相量为

$$\dot{U}=U\underline{/\theta_u}\tag{11-7}$$

它是一个复数，它的模为正弦电压的有效值，它的辐角为正弦电压的初相。相应地，上章所定义的电压相量 $\dot{U}_{\mathrm{m}}$ 可称为电压振幅相量，它和电压有效值相量的关系为

$$\dot{U}_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}\,\dot{U}\tag{11-8}$$

今后，除非特别声明，本书所称的相量均系指有效值相量。振幅相量附加下标 m。

**例 11-1** 若 $i_1(t)=5\cos(314t+60°)$ A，$i_2(t)=-10\sin(314t+60°)$ A，$i_3(t)=-4\cos(314t+60°)$ A。试写出代表这三个正弦电流的相量，并绘相量图。

**解** (1) $i_1(t)=5\cos(314t+60°)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{Re}[5e^{j60°}e^{j314t}]\\&=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}e^{j60°}e^{j314t}\right]\\&=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}_1e^{j314t}]\ \mathrm{A}\end{aligned}$$

故得代表电流 $i_1$ 的相量为

$$\dot{I}_1=\frac{5}{\sqrt{2}}\underline{/60^\circ}=3.54\ \underline{/60^\circ}=1.77+\mathrm{j}3.07\ \mathrm{A}$$

这一相量也可以根据正弦波的有效值和初相直接写出。

(2) $i_2(t)=-10\sin(314t+60^\circ)$

$$=10\cos(314t+60^\circ+90^\circ)\ \mathrm{A}$$

从上式可直接写出代表 $i_2$ 的相量为

$$\dot{I}_2=\frac{10}{\sqrt{2}}\underline{/150^\circ}=7.07\ \underline{/150^\circ}\ \mathrm{A}$$

(3) $i_3(t)=-4\cos(314t+60^\circ)$

$$=4\cos(314t+60^\circ-180^\circ)=4\cos(314t-120^\circ)\ \mathrm{A}$$

代表 $i_3$ 的振幅相量为

$$\dot{I}_{3m}=4\underline{/-120^\circ}\ \mathrm{A}$$

根据(12-8)式可知，代表 $i_3$ 的相量为

$$\dot{I}_3=\frac{4}{\sqrt{2}}\underline{/-120^\circ}=2.83\ \underline{/-120^\circ}\ \mathrm{A}$$

以上说明由瞬时值表示式写出相量的三种方法。

在上章例 10-7 中我们曾绘过这三个电流的相量图。当时，在复平面上表示各相量的有向线段的长度是按振幅的大小绘制的，因而可称为振幅相量图。绘相量图时，也可按有效值的大小来绘制有向线段，这种相量图称为有效值相量图，如图 11-1 所示。今后，除非特别说明，本书各相量图均系有效值相量图。图 11-1 所示的相量图与图 10-22 所示者相似，只是各有向线段的长度缩短为原长度的$1/\sqrt{2}$。

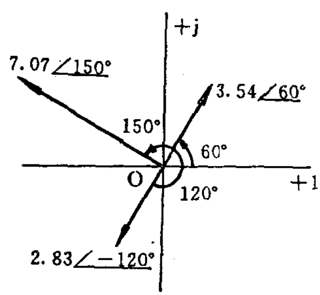



图 11-1 例 11-1

**例 11-2** 已知 $\dot{U}_1=50\underline{/-30^\circ}$ V、$\dot{U}_2=220\underline{/150^\circ}$ V、$f=50\text{Hz}$，试写出它们所代表的正弦电压。

**解** 由给定的相量可知:

$$U_1=50,\quad U_{1\text{m}}=50\sqrt{2},\quad \theta_1=-30^\circ$$

$$U_2=220,\quad U_{2\text{m}}=220\sqrt{2},\quad \theta_2=150^\circ$$

又

$$\omega=2\pi f=100\pi$$

故得

$$u_1(t)=50\sqrt{2}\cos(100\pi t-30^\circ)\ \text{V}$$

$$u_2(t)=220\sqrt{2}\cos(100\pi t+150^\circ)\ \text{V}$$

**练习题**

11-1 求代表下列各正弦波的相量$\left(以\dfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}\text{ 代表 }\cos\omega t\right)$，并作相量图:(1) $5\sin(\omega t+30^\circ)$;(2) $-8\cos(\omega t-45^\circ)$;(3) $-6\sin(\omega t-120^\circ)$。

11-2 若 $I$ 为流过电阻 $R$ 的正弦电流的有效值，试证明: $R$ 的平均功率 $P=I^2R$。

11-3 求下列各相量所代表的正弦电压或电流，已知 $f=50$ Hz:

(1) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}\underline{/30^\circ}$ V; (2) $-0.25\underline{/-30^\circ}$ V;

(3) $-0.69\underline{/30^\circ}$ A

## §11-2 基尔霍夫定律的相量形式

KCL 告诉我们:在任一时刻，流出电路节点的电流的代数和为零。设线性非时变电路在单一频率 $\omega$ 的正弦激励下（正弦电源可以有多个,但频率必须相同）进入稳态时，各处的电压、电流都将为同频率的正弦波。因此,在所有时刻，对任一节点 KCL 可表示为

$$\sum_{k=1}^{n} i_k=\sum_{k=1}^{n}\text{Re}(\dot{I}_{k\text{m}}e^{j\omega t})=0 \tag{11-9}$$

其中

$$\dot{I}_{km}=I_{km}e^{j\theta k}$$

为流出该节点的第 $k$ 条支路正弦电流 $i_k$ 的振幅相量。根据§10-7引理Ⅰ,由(11-9)式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_{km}=0 \tag{11-10}$$

又由(11-8) 式可知，若 $\dot{I}_k$ 为第 $k$ 条支路正弦电流的相量，则由(11-10)式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_k=0 \tag{11-11}$$

这就是说,如果(11-9)式成立,则(11-10)式及(11-11)式也一定成立。同理,在正弦稳态电路中,沿任一回路,KVL 可表示为

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{U}_{km}=0 \tag{11-12}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{U}_k=0 \tag{11-13}$$

以上两式中 $\dot{U}_{km}$ 及 $\dot{U}_k$ 分别为回路中第 $k$ 条支路的电压振幅相量及电压相量。因此,在正弦稳态电路中,基尔霍夫定律可直接用电流相量和电压相量写出,如同(11-11)、(11-13)两式所示;也可直接用电流振幅相量和电压振幅相量写出,如同(11-10)、(11-12)两式所示。

**例 11-3** 图 11-2 所示为电路中的一个节点,已知

$$i_1(t)=10\sqrt{2}\cos(\omega t+60°)\ \mathrm{A}$$

$$i_2(t)=5\sqrt{2}\sin\omega t\ \mathrm{A}$$

求 $i_3(t)$ 及 $I_3$。

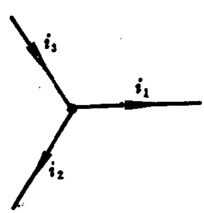



图 11-2 例 11-3

**解** 为了要利用 KCL 的相量形式，首先应写出已知电流 $i_1$ 和 $i_2$ 的相量，即

$$\dot{I}_1=10\underline{/60^\circ} \qquad \dot{I}_2=5\underline{/-90^\circ}$$

注意不要把 $\dot{I}_2$ 写为 $5\underline{/0^\circ}$。设未知电流 $i_3$的相量为 $\dot{I}_3$，则由(11-11)式可得

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0$$

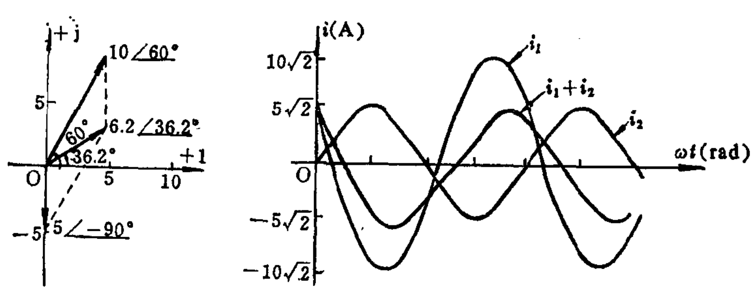
注意在运用(11-11)式时，各相量前的正负号仍然根据相对应的正弦电流的参考方向而定。流出节点为正，流入节点为负。由此可得

$$\begin{aligned}\dot{I}_3&=\dot{I}_1+\dot{I}_2\\&=10\underline{/60^\circ}+5\underline{/-90^\circ}\\&=5+j8.66-j5=5+j3.66=6.2\underline{/36.2}\text{ A}\end{aligned}$$

最后，根据所得相量 $\dot{I}_3$ 写出相对应的正弦电流 $i_3$，即

$$i_3(t)=6.2\sqrt{2}\cos(\omega t+36.2^\circ)\text{ A}$$

相量图及波形图分别如图 11-3(a)、(b) 所示。相量图中表明了




(a) 相量图 (b) 波形图

图 11-3 例 11-3

$\dot{I}_1+\dot{I}_2=\dot{I}_3$ 这一关系，如同 § 10-5 所指出的那样，在相量图中相量 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 构成平行四边形的两边而相量 $\dot{I}_3$ 则是其对角线。相量图还显示了各相对应正弦波之间的相位关系，例如，从相量图可知 $i_3$

超前 $i_2$ 的角度为 $36.2°+90°=126.2°$。

所求有效值 $I_3$ 为 6.2 V。

**例 11-4** 已知 $u_{ab}=-10\cos(\omega t+60°)\text{V}$

$$u_{bc}=8\sin(\omega t+120°)\text{V}$$

求 $u_{ac}$。

**解** $$u_{ac}=u_{ab}+u_{bc}$$

各电压均为同频率的正弦波，以相量表示后得

$$\dot{U}_{ac}=\dot{U}_{ab}+\dot{U}_{bc}$$

其中 $$\dot{U}_{ab}=-\frac{10}{\sqrt{2}}\underline{/60°}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-5-\text{j}8.66)$$

$$\dot{U}_{bc}=\frac{8}{\sqrt{2}}\underline{/120°-90°}=\frac{1}{\sqrt{2}}(6.93+\text{j}4)$$

故得

$$\dot{U}_{ac}=\dot{U}_{ab}+\dot{U}_{bc}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-5-\text{j}8.66+6.93+\text{j}4)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1.93-\text{j}4.66)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 5.04\underline{/-67.5°}$$

因此

$$u_{ac}=5.04\cos(\omega t-67.5°)\ \text{V}$$

相量图如图 11-4 所示。

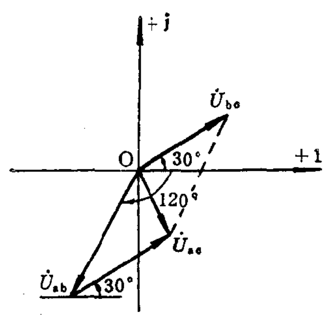


图 11-4 例 11-4

$$\dot{U}_{ac}=\dot{U}_{ab}+\dot{U}_{bc}$$

这一关系，也可以从这三个相量形成图所示的闭合三角形来反映。

本题用振幅相量做，更为简便。

**思考题**

11-1 若 $I_1$、$I_2$ 和 $I_3$ 分别为汇集于某节点的三个同频率正弦电流的有

效值，则这三个有效值满足 KCL，对吗？

11-2　若同频率正弦电流 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$ 的有效值为 $I_1$ 及 $I_2$，$i_1(t)+i_2(t)$ 的有效值为 $I$，问在什么条件下，下列关系成立：

(1) $I_1+I_2=I$

(2) $I_1-I_2=I$

(3) $I_1^2+I_2^2=I^2$

11-3　回顾一下，两个同频率正弦函数的求和问题，你有几种解法？（从中学三角课程考虑起）

### 练习题

11-4　若 $i_1(t)=\sqrt{2}\cos\omega t$ A，$i_2(t)=-\sqrt{6}\sin\omega t$ A，求 $i_1(t)+i_2(t)$。　　($2\sqrt{2}\cos(\omega t+60°)$ A)

11-5　电路如图 11-5(a) 所示，$i_s(t)=10\cos\omega t$ A，测得 $u_{ab}$、$u_{bc}$ 的波形如图 11-5(b) 所示。

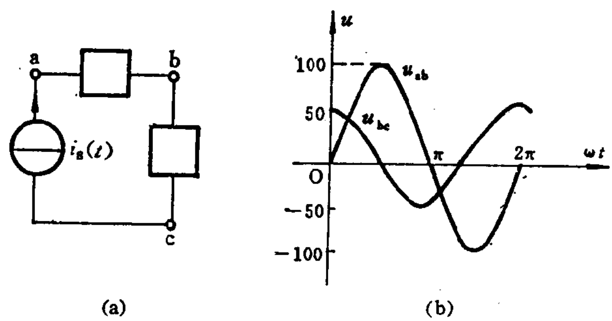



图 11-5　练习题 11-5

(1) 求 $u_{ac}$ 及有效值 $U_{ac}$；

(2) 求 $u_{ac}$ 与 $i_s$，$u_{ab}$ 与 $i_s$ 以及 $u_{bc}$ 与 $i_s$ 的相位关系；

(3) 绘相量图（包括上述的所有电压及电流相量）。

11-6　若 $100\cos\omega t=f(t)+30\sin\omega t+150\sin(\omega t-210°)$，试利用相量求解 $f(t)$。　　($103\cos(\omega t-75.96°)$)

## §11-3　三种基本电路元件伏安关系的相量形式

在关联参考方向下，线性非时变电阻、电容及电感元件的伏安

关系分别为

$$u=Ri \tag{11-14}$$

$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{11-15}$$

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{11-16}$$

在正弦稳态电路中，这些元件的电压、电流都是同频率的正弦波。为适应使用相量进行正弦稳态分析的需要，我们将导出这三种基本元件 VAR 的相量形式。

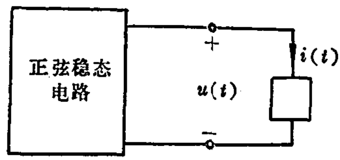



图 11-6　正弦稳态电路中的一个元件

设要研究的元件接在一正弦稳态电路中，如图 11-6 所示，则元件两端的电压和流过的电流可表示为

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_u)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}e^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{11-17}$$

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_i)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{11-18}$$

其中

$$\dot{U}=U\underline{/\theta_u}$$

$$\dot{I}=I\underline{/\theta_i}$$

我们的任务是要求出相量 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 的关系。

先考虑元件为电阻的情况，电路如图 11-7(a) 所示。根据欧姆定律

$$u=Ri$$

得

$$\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta_u)=\sqrt{2}RI\cos(\omega t+\theta_i) \tag{11-19}$$

由于 $R$ 是常数，这一式子表明电阻两端的正弦电压和流过的正弦电流是同相的，波形图如图 11-7(c) 所示。不论是(11-19)式还是波形图，表明的都是电压的时间函数与电流的时间函数之间的关系，称为时域(time domain)关系。