现代数学丛书

极限环论

叶彦谦 等著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

极 限 环 论

叶彦谦 等著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 14.25　字数 351,000

1965 年 9 月第 1 版

1984 年 2 月第 2 版　1984 年 2 月第 2 次印刷

印数 2,001—11,300

统一书号：13119·652　定价：(科五)2.10 元

目　　录

绪　论

在微分方程定性理论中，关于极限环的研究是一个既有趣而又困难的部分．自从 H. Poincaré 在他的论文《微分方程所定义的积分曲线》(1881—1886) [1] 中发现极限环以后，它立刻就受到这位著名数学家的特别重视．为了决定一个已给的方程是否存在极限环，以及研究极限环的性质，他首先提出了地形系法，后继函数法，小参数法(最先见于《天体力学中的新方法》一书)和环域定理等重要的理论，并且人为地造出许多例子来检验这些方法的效果．与此同时他也已经注意到研究极限环与解决微分方程积分曲线族的全局结构问题之间的密切关系了．1901 年瑞典数学家 I. Bendixson 亦以与前同样的题目发表了一篇重要的论文[2]，在这篇文章里他把环域定理的证明严格化，并且加以推广，成为大家所熟知的、关于平面有界区域中动力系统的轨线的极限集的 Poincaré-Bendixson 理论．此外，他又首先应用 Green 公式，在平面向量场的闭轨线与发散量之间建立了联系，得到一个确定闭轨线不存在的定理．这种联系后来被人们不断地发展和加深，得到发散量沿闭轨线积分一周的数值与其稳定性之间的关系，发散量在鞍点的值与过鞍点的奇闭轨线的内侧稳定性之间的关系，等等．

与 Bendixson 论文发表的同一年，著名数学家 D. Hilbert 在国际数学会上提出了一系列的数学难题[3]，其中第十六个问题的后面一半是：方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_n(x,\ y)}{P_n(x,\ y)} \tag{1}$$

(P_n 与 Q_n 是次数不高于 n 的实系数多项式，x, y 是实变量) 最多

有几个极限环？它们的相对位置如何？说也奇怪，数学家们对 Hilbert 的其他问题兴趣都很大，钻研的人很多，但是对这个问题问津的人却不多[1)]．据我们所知，在二十世纪的前三十年中，研究此问题较有成绩的只有法国数学家 H. Dulac. 他在 1923 年发表了一篇长达 140 页的论文[4]，证明方程(1)的极限环的个数是有限的．此外，他还研究了当 $n=2$ 时方程(1)存在中心点的充要条件([5])，看来他已感到这两个问题之间是有密切联系的了．Dulac 在极限环理论方面还有一些其他的基本结果，读者在 §1 就可看到．稍后，德国数学家 M. Frommer 于 1934 年亦以方程(1)的中心点的充要条件($n=2$)为题发表了一篇论文[6]，并画出有中心点时方程的轨线全图；同时他还指出，方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+(1+\varepsilon)x^2+2xy-y^2}{-y+2xy-y^2} \tag{2}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时存在极限环．实际上，以后读者可以看到，对于非线性方程而言，极限环不但是它所特有的，并且也是极为常见的一种轨线．

数学理论的发展方向常是以生产实际中的问题为引导的，对于微分方程这个学科来说，情况尤其是如此．实际问题给予研究极限环理论的推动力远远胜过大数学家的号召．事情是这样：自从二十世纪以来，应用无线电子学有了迅速的发展；物理学家发明了可以产生稳定的自激等幅振荡的三极电子管，从而使声音与图象的无线电传播有了可能．但是要描写这种振荡现象却不是线性微分方程所能办到的．1926 年 van der Pol[7] 首先得到了以他的名字命名的、描写三极电子管中等幅振荡的方程：

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0 \quad (\mu\neq 0). \tag{3}$$

在化为相平面上的等价方程组以后，他用图解法证明了孤立闭轨线的存在性，并且又用当时在理论上还没有严格数学基础的平均

1) 五十年代以后情况有所改变，近年来有兴趣的人更多了。

法(van der Pol 方法)得到当$|\mu|$很小时闭轨线的近似方程. 显然,他是不熟悉 Poincaré 与 Dulac 等关于极限环的工作的. 三年以后, 苏联理论物理学家 A. A. Андронов 发表了一篇简短的论文[8], 阐明 van der Pol 方程的孤立闭轨线就是 Poincaré 所早已研究过的极限环. 这样一来, 他就把纯粹数学理论和无线电技术密切联系起来了. 自此以后, 苏联的莫斯科学派和高尔基城学派就开始对无线电技术与极限环理论开展了大量的研究工作. 就数学理论方面来说, 他们主要是研究极限环的存在性, 唯一性, 稳定性以及如何产生, 如何消失的问题. 他们大部分较重要而基本的工作可以在 A. A. Андронов, A. A. Витт 和 C. Э. Хайкин 合著的《振动理论》一书中找到. 尽管非线性振动方程除了不显含时间变数的定常系统(或自治系统)以外, 还有含时间变数的非定常系统, 但是 Андронов 等的著作所研究的方程则全部属于定常系统. 因此我们可以说, 这是一本专门研究极限环的数学理论及其在物理学上的应用的书, 自然, 它的重点是在应用方面.

至于其他国家, 在 van der Pol 以后对于极限环理论的研究, 除了法国工程师 A. Liénard, 几何学家 É. Cartan 与 H. Cartan 的少数工作出现得较早以外[9, 10], 一般都在 1940 年以后. 其中工作较有成绩的如 N. Levinson, G. F. D. Duff, S. P. Diliberto, G. Sansone, R. Conti, M. Urabe, 等等.

就我国来说, 我们自 1957 年开始(见 [11, 12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]) 已对于右方为二次多项式的方程的极限环问题进行了深入而有系统的研究(在这以前的数年里, 国内学者对于极限环的存在性, 稳定性, 唯一性等方面已有了一些工作). 研究的主要问题大致有三个:

1. 方程(1)当 $n=2$ 时的极限环的相对位置.
2. 方程(1)当 $n=2$, 3 时的二次代数曲线环.
3. 研究已给的方程(1) ($n=2$)的极限环的个数与轨线的全局

结构.

前两个问题原来认为已经彻底解决，但由于 Петровский 与 Ландис 的猜想已被证明是错误的[19, 20]，从而第一个问题距离彻底解决还相差很远. 后一问题尚在继续进行中. 至于在国外，除了 Н. Н. Баутин 1952 年的著名的工作 [21] 以外，我们发现自从 1960 年以后苏联白俄罗斯国立大学有一个讨论班也在对上述第三个问题进行研究，迄今已发表论文数十篇.

纵观国际上现有一切关于极限环的研究成果和学术动向，我们的看法是：虽然在微分方程定性理论中极限环问题具有头等的重要性，但微分方程工作者对它的重视程度还是不够的. 这表现在：迄今为止还未有过一本关于极限环的纯数学理论的专著，甚至以此为主题的综合性报告在国外文献中也未见到过，在国内也只有作者 1962 年写过一篇[22]. 另一方面，工程学界和物理学界对此问题虽然仍颇感兴趣，但却未得到数学家的大力支持(近年的情况有所改善). 已有的结果也嫌零碎而少系统.

本书的目的就是要想总结过去数十年来国内外有关极限环理论的重要成果，把它介绍给初学的人，同时亦兼顾这一理论与定性理论其他方面的联系.

本书除在正文中详细讲述较重要而基本的东西以外，还在每一节最后附带简要地介绍一些较次要或较深入的结果；并且配备适量的习题，以便初学者能更好地掌握该节的内容和方法.

§1. 基本概念，具体例子，判别极限环存在与不存在的若干准则

已给微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y), \tag{1·1}$$

其中 x, y, t 为实变量，P, Q 为 x, y 的连续单值实函数，且能保证解的唯一性.

定义 1·1 若方程(1·1)的解 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是 t 的非常数的周期函数，则称此解在(x, y)相平面上的轨迹为(1·1)的闭轨线. 由若干奇点以及两端进入奇点的轨线所构成的单闭曲线称为方程(1·1)的奇闭轨线.

定义 1·2 如果在方程(1·1)的闭轨线 Γ 的任意小的外(内)邻域中都存在非闭轨线，则称 Γ 为外侧(内侧)极限环.

定义 1·3 如果 Γ 是(1·1)的闭轨线，且存在 Γ 的一个外(内)邻域，它全部由闭轨线所充满，则称 Γ 为外(内)侧周期环.

注意：奇闭轨线也可能满足定义 1·2 或定义 1·3 的要求，但不称为极限环或周期环. 在 §3 中将要遇到的分界线环就是一种奇闭轨线，它的内侧可以满足定义 1·2 或定义 1·3 的要求.

根据 Poincaré-Beudixson 理论知道成立下面几条定理（定理 1·1～1·6），证明从略.

定理 1·1 若 Γ 是(1·1)的闭轨线，则存在 Γ 的足够小的邻域 U，使得

1° U 中不含奇点；

2° 过 Γ 上任何一点 P 的法线段，其位于 U 内部且包含点 P

的那一部分是截线，就是说，一切与它相遇的轨线都不和它相切，而且当 t 增加时都从同一个方向穿过它；

3° U 中任一闭轨线与 Γ 上任一点 P 的截线 l 必相交且只相交于一点，U 中任一非闭轨线 γ 与 l 交于无数个点，它们都在 Γ 的同一侧，且在 l 上的排列次序与其在 γ 上的排列次序是一样的。

由此定理可以看出，当闭轨线 Γ 是内(外)侧极限环或周期环时，位于 Γ 内(外)邻域中的非闭轨线只可能是一端无限盘近 Γ 的螺线，位于 Γ 内(外)邻域中的闭轨线只能是整个包含在 Γ 内部(或是 Γ 整个包含在它内部)的闭轨线。

定理 1·2 闭轨线 Γ 或为外(内)侧极限环，或为外(内)侧周期环。

在前一情况又可分为三种不同的情况：

1. 存在 Γ 的足够小的外(内)邻域，使其中一切轨线皆为非闭，且以 Γ 为 ω 极限集，这时称 Γ 为外(内)稳定环；

2. 存在 Γ 的足够小的外(内)邻域，使其中一切轨线皆为非闭，且以 Γ 为 α 极限集，这时称 Γ 为外(内)不稳定环；

3. 在 Γ 的任意小的外(内)邻域中，既存在闭轨线亦存在非闭轨线，这时称 Γ 为外(内)复合极限环。

定义 1·4 称 Γ 为稳定极限环，不稳定极限环或周期环，如果在它的内外两侧同时满足定理 1·2 所指出的相应的条件；称 Γ 为半稳定极限环，如果它是外(内)侧稳定而内(外)侧不稳定的；称 Γ 为复合极限环，如果它不属于上述四类之中。

由轨道稳定性的定义易见成立：

定理 1·3 外(内)侧复合极限环与周期环是轨道外(内)稳定的，外(内)侧稳定极限环是外(内)侧轨道渐近稳定的，外(内)侧不稳定极限环是外(内)侧负向轨道渐近稳定的。

其次，下面两个定理也是熟知的：

定理 1·4 如果闭轨线 Γ_1 与 Γ_2 一起围成一个环域 G，G 中

无奇点亦无其他闭轨线，则 G 中一切轨线都以 Γ_1 为 ω 极限集，以 Γ_2 为 α 极限集，或是反之．换言之，两条相邻的闭轨线（在上述条件之下）在其相邻的两侧必具不同的稳定性．

定理 1·5 若方程(1·1)中的 P, Q 是 x, y 的解析函数，则闭轨线 Γ 不可能是复合极限环．由此可知这时由周期环所充满的区域的内外境界上必含奇点(可能是无限远奇点)．

定义 1·5 闭轨线 Γ 称为正(负)定向的，如果当 t 增加时 Γ 上的动点沿着 Γ 以逆时针(顺时针)方向运动．

显而易见，位于一系周期环中的闭轨线都有相同的定向．但应注意，相邻两极限环却可能有不同的定向．

例 1 考虑方程组

$$\left.\begin{array}{ll}\left.\begin{array}{l}\dfrac{dr}{dt}=(r-1)(r-3),\\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dt}=(r-1)(r-2)(r-3)\sec|r-2|\dfrac{\pi}{2},\end{array}\right. & \text{当}\quad 1<r<3;\\[2ex] \dfrac{dr}{dt}=0,\quad \dfrac{d\varphi}{dt}=-\dfrac{4}{\pi},\quad \text{当}\quad r\geqslant 3; & \\[2ex] \dfrac{dr}{dt}=0,\quad \dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{4}{\pi},\quad \text{当}\quad r\leqslant 1. & \end{array}\right\} \tag{1·2}$$

易见此方程组的轨线是：1) 半径大于或等于 3 的圆，负定向；2) 半径小于或等于 1 的圆，正定向；3) 在环域 $1<r<3$ 中充满着非闭轨线，沿着每一条非闭轨线，当 $r>2$ 时有 $\dfrac{d\varphi}{dt}<0$，当 $r=2$ 时有 $\dfrac{d\varphi}{dt}=0$，当 $r<2$ 时有 $\dfrac{d\varphi}{dt}>0$.

由此可见 $r=1$ 与 $r=3$ 是相邻单侧极限环，前者是正定向外稳定环，后者是负定向内不稳定环．

现在让我们转到判别极限环存在与不存在的准则以及两个重要的具体例子．

定理 1·6 若有界闭区域 Ω 中最多含有限个奇点，且包含一

条正半轨线 γ，则 γ 的 ω 极限集只可能是：1)唯一的奇点；2)唯一的闭轨线；3) 可数无限多条或有限条两端进入奇点的轨线以及这些奇点.

推论(Poincaré 的环域定理) 若 Ω 为一环域，其中不含奇点，凡与 Ω 的境界线相交的轨线都从它的外(内)部进入(跑出)它的内(外)部，则 Ω 中至少存在一条包含内境界线在其内部的外稳定(不稳定)极限环和一条内稳定(不稳定)极限环. 这两条单侧极限环可能都是双侧环，也可能重合成为一条稳定(不稳定)极限环[1].

注意：若 Ω 的内境界缩为一个负向(正向)渐近稳定奇点，或是内外境界线有一部分成为方程(1·1)的轨线弧，其上可能有一些鞍点和负向(正向)渐近稳定奇点，则上述推论仍能成立.

例 2 与绪论中所说的 van der Pol 方程等价的方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu(1-x^2)y, \tag{1·3}$$

对于一切 $\mu>0(<0)$ 有稳定(不稳定)极限环[2].

【证】 显见当 $\mu>0$ 时(1·3)的唯一奇点(0, 0)是负向渐近稳定奇点，因此要证明存在极限环，只要作出一条包含原点在其内部的单闭曲线 L，使当(1·3)的轨线与 L 相交时都从外部进入内部.

首先画出等倾线

$$Q(x, y)=-x+\mu(1-x^2)y=0 \tag{1·4}$$

的图形，它有三个分支和三条渐近线：

$$y=0,\ x=\pm 1.$$

今在负 y 轴上取一点 $A(0, -y_0)$，过 A 作方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=\mu(1-x^2)y \tag{1·5}$$

---

1) 以后在大多数情况下往往都只得到唯一的稳定环，并且往往是单重环(定义见§2)，而不是由两个极限环靠近、重合而得的多重环.

2) $\mu<0$ 的情况可借改变 x, t 的符号而变为 $\mu>0$ 的情况，以下只就 $\mu>0$ 来论证.

的轨线，与直线 $x=-1$ 交于 $B(-1,\ -y_1)$，易见 $y_1=\frac{2}{3}\mu+y_0$. 注意沿着 $\widehat{AB}$ 有

$$\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}-\frac{\mu(1-x^2)y}{y}=-\frac{x}{y}<0,$$

所以(1·3)的轨线与 $\widehat{AB}$ 相交时都是从右向左地穿过它（如图 1·1 中的小箭头所示）.

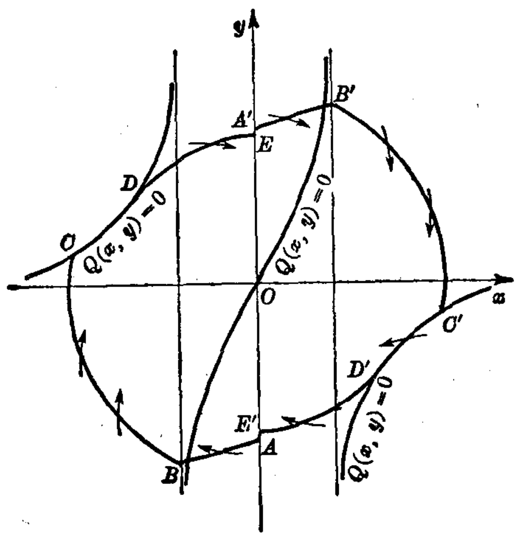

图 1·1

其次，过 B 作以原点为中心的圆弧，设它交负 x 轴以后再交曲线(1·4)的位于第二象限的那一支于 C（只要圆弧的半径足够大，交点总是存在的）. 注意，沿着 $\widehat{BC}$ 有

$$\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}+\frac{x}{y}=\mu(1-x^2)<0,$$

可知(1·3)的轨线与 $\widehat{BC}$ 相交时都是从它的左方穿到右方去.

现在研究方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu y \tag{1·6}$$

的轨线与曲线(1·4)的切点 $D(x_2, y_2)$，可以容易地证明 x_2 应满足方程

$$1+(1-\mu^2)x^2+2\mu^2x^4-\mu^2x^6=0,$$

当 $|x|=1$ 时上式左边为正，而当 $|x|$ 足够大时上式左边为负，因此曲线(1·4)的位于第二(及第四)象限的那一分支上必定存在唯一的切点 D. 当 y_0 足够大时可使 C 位于 D 的左边.

现在过 D 作方程(1·6)的轨线，与正 y 轴(一定)交于一点 E. 注意

$$\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}-\frac{-x+\mu y}{y}=-\mu x^2<0,$$

可知(1·3)的轨线与 $\widehat{DE}$ 相交时(两者都有正的斜率)都是从左到右地穿过它. 此外，(1·3)的轨线与(1·4)的 $\widehat{CD}$ 弧相交时都是从左到右穿过它.

由于 $\widehat{DE}$ 是固定的，而 y_0 可以取得任意大，故可设 A 关于 O 的对称点 A' 位于 E 的上方. 这时，(1·3)的轨线与直线段 $\overline{EA'}$ 相交时都是从左穿到右. 由于方程(1·3)，(1·5)，(1·6)所确定的向量场以及曲线(1·4)都对称于原点 O，所以曲线 $\widehat{ABCDEA'}$ 关于原点的对称线 $\widehat{A'B'C'D'E'A}$ 也有和它类似的性质. 这样，把这两曲线弧合在一起就构成我们所需要的环域的外境界线. 由于(1·3)是解析系统，可知由定理 1·6 的推论所肯定的两条单侧极限环如果不重合的话，则其中至少有一条应是稳定极限环. 事实上，第 6 节中将要证明(1·3)有唯一的稳定极限环.

注意：当 $\mu\geqslant 2$ 时原点是(1·3)的不稳定结点，可知位于极限环内部的奇点不一定是焦点. 此外，当 μ 更大时，例如 $\mu>10$，极限环也可以不是凸闭曲线.

定理 1·7(对称原理)　设在方程(1·1)中有

$$P(x, y)=P(-x, y),\ Q(-x, y)=-Q(x, y), \qquad (1\cdot 7)$$

又原点是 y 轴上的唯一奇点. 若轨线 Γ 从正 y 轴出发后又回到负 y 轴,则 Γ 是闭轨线. 如果原点附近的一切轨线都具有此性质,则原点是中心点.

【证】 因为这时方程(1·1)所确定的向量场对称于 y 轴,所以 Γ 和它关于 y 轴的对称线(也是轨线)一起构成一条单闭曲线. 又此单闭曲线与 y 轴的两个交点是常点,因此它是闭轨线.

注意:若将条件(1·7)改为

$$P(x,\ -y)=-P(x,\ y),\quad Q(x,\ -y)=Q(x,\ y) \tag{1·8}$$

并改设原点是 x 轴上的唯一奇点,则有和定理 1·7 类似的结论. 但应注意条件

$$P(-x,\ y)=-P(x,\ y),\quad Q(-x,\ y)=Q(x,\ y)$$

将导致 $P(0,\ y)=-P(0,\ y)=0$, 即 y 轴是轨线,因而这时即使 Γ 从正 y 轴出发后又能回到负 y 轴,它也只能是奇闭轨线. 同样,条件

$$P(x,\ -y)=P(x,\ y),\quad Q(x,\ -y)=-Q(x,\ y)$$

也是不适用的.

定理 1·8 设原点是 y 轴上的唯一奇点, 一切从正 y 轴出发的轨线绕原点一周后重又回到正 y 轴, 则由轨线确定的正 y 轴到它自己的拓扑映象的不动点位于闭轨线上(显而易见).

推论 若轨线所确定的映象把正 y 轴上某一不含原点的闭区间映到它自己里面去,则方程必存在闭轨线.

【证】 由拓扑学中的 Brouwer 不动点定理可知此映象必有不动点存在,且此不动点不是原点.

定理 1·8 及其推论对于研究非线性振动理论中常常出现的分区线性方程的极限环很有用处, 因为这时定理中所说的拓扑映象是可以用分析式子表示出来的(见§6). 此定理对于研究右方为不连续的系统的极限环也是有用处的, 因为它只要求通过正 y 轴上

的每一点有唯一的轨线就够了[1]．

例 3　考虑钟摆的摆动[2]．为了简化，假设钟摆的质量集中于摆锤的重心，并且只考虑支点处的干摩擦所产生的常数阻尼而忽略空气阻力(线性阻尼)．那末摆动方程是

$$\ddot{x}+x=-f_0 \text{ 当 } \dot{x}>0;\quad \ddot{x}+x=f_0 \text{ 当 } \dot{x}<0, \tag{1·9}$$

这里 x 表示角位移，并算作 $\frac{g}{l}=1$．化(1·9)为等价的方程组，易见在$(x,\ y=\dot{x})$上半平面中的轨线是以 $O''(-f_0,\ 0)$ 为中心的圆弧，而在下半平面中的轨线是以 $O'(f_0,\ 0)$为中心的圆弧；轨线上顺时针的方向是 t 增加的方向．x 轴上的线段$(-f_0,\ f_0)$中的每一点都是奇点，即对应于平衡位置；因为这时恢复力小于摩擦力，并且 $\dot{x}=0$，故运动应停止．由此可见如果没有发条供给钟摆以能量，则摆动有限次以后就归于静止，其轨线图如图 1·2 所示．

发条供给能量的方式是：当摆锤到达最低点($x=0$)时，发条就

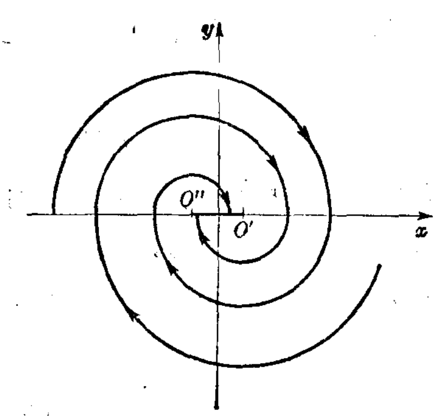

图　1·2

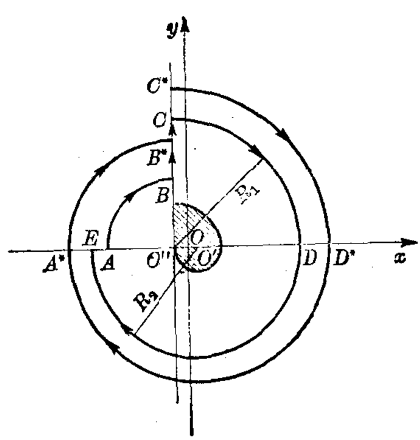

图　1·3

1) 不连续系统的极限环 Γ 可以这样定义：闭轨线 Γ 称为稳定极限环，如果存在 Γ 的一个邻域，使从其中任一点出发的轨线(可能与 Γ 相交)当 t 无限增大时能进入并永远保持在 Γ 的任何小邻域之中．

2) 本例采自绪论中所说的《振动理论》第三章 §5．

通过擒纵机构推它一下，使之获得定值的能量．为了计算简单起见，下面假设推动是在 $x=-f_0$, $y>0$ 时发生的．这样，在相平面上就有如图 1·3 中 $\overset{\frown}{ABCDE}$ 所示的运动路线，其中 $\overset{\frown}{AB}$ 是以 $O''(-f_0, 0)$ 为中心而半径等于 R_0 的圆弧，$\overline{BC}=R_1-R_0$，而 $R_1^2-R_0^2=h^2=$ 常数．$\overset{\frown}{CD}$ 是以 O'' 为中心、半径等于 R_1 的圆弧，$\overset{\frown}{DE}$ 是以 $O'(f_0, 0)$ 为中心、半径等于 $R_2=R_1-2f_0$ 的圆弧．设 A, E 的坐标分别为 $(-x_0, 0)$ 与 $(-x_1, 0)$，那末容易算出 x_0 与 x_1 之间的关系式：

$$(x_1+3f_0)^2-(x_0-f_0)^2=h^2. \tag{1·10}$$

这就是运动的轨线所确定的，负 x 轴到它自己的拓扑映象．这映象的不动点 $x_1^*=x_0^*$ 由方程

$$(x_0^*+3f_0)^2-(x_0^*-f_0)^2=h^2 \tag{1·11}$$

来确定，亦即

$$x_0^*=\frac{h^2}{8f_0}-f_0. \tag{1·12}$$

我们当然应该假设 $x_0^*>f_0$，它相当于条件

$$h>4f_0. \tag{1·13}$$

当(1·13)满足时，不但闭轨线的唯一存在得以保证，而且也不难证明它是稳定极限环．事实上，由(1·11)可得

$$x_0^*=\sqrt{h^2+(x_0^*-f_0)^2}-3f_0, \tag{1·14}$$

故当 $f_0<x_0<x_0^*$ 时便有

$$x_0^*>x_1=\sqrt{h^2+(x_0-f_0)^2}-3f_0>x_0, \tag{1·15}$$

其中前一不等式由 (1·10) 与 (1·14) 立刻看出，后一不等式由(1·11)容易推出．同样，当 $x_0>x_0^*$ 时有

$$x_0^*<x_1<x_0. \tag{1·16}$$

不等式(1·15)与(1·16)表示：当 $A\neq A^*$ 时 E 应介于 A 与 A^* 之间，但 x_0^* 的值由(1·12)唯一确定，故当 t 无限增大时一切运动都应趋向于过 A^* 的闭轨线．

最后介绍几个判别闭轨线不存在的法则.

定理 1·9(Poincaré 切性曲线法) 设 $F(x, y)=C$ 为一曲线族,其中 $F(x, y)$ 为一次连续可微. 如果在区域 G 中有

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}$$

(表示函数 F 沿着方程(1·1)的轨线关于 t 的变化率) 保持常号, 且曲线

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

(表示族中的曲线与(1·1)的轨线相切之点的轨迹,称为切性曲线) 不含方程(1·1)的整条轨线或不含闭分支, 则方程(1·1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与只含一个奇点的奇闭轨线.

【证】 设定理不成立, 则方程(1·1)有全部位于 G 中的闭轨线或只含一个奇点的奇闭轨线 Γ. 今将 $P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}$ 沿着 Γ 按 t 增加的方向积分一周,得到

$$\oint_\Gamma\left(P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}\right)dt=\oint_\Gamma\frac{dF}{dt}dt.$$

由函数 F 的单值性可知上式右边应等于零, 但另一方面, 等式左边的被积函数在 Γ 上保持常号且不恒等于零, 又沿着 Γ, t 单调增加,故其值应异于零,矛盾.

定理 1·10(Bendixson) 若在单连通域 G 中方程(1·1)的发散量 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 保持常号,且不在 G 的任何子区域中恒等于零, 则方程(1·1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与奇闭轨线 (这里假设 P, Q 有连续偏微商).

【证】 设定理不成立,方程(1·1)有闭轨线 Γ, Γ 连同它的内部区域 S 一起全部位于 G 中,因为 G 是单连通的. 于是由 Green 公式有