

孙靖民 米成秋 编著

机械结构优化设计

機械構造の最適化設計

哈尔滨工业大学出版社

机械结构优化设计

孙靖民 米成秋 编著

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书结合机械结构设计问题，阐述优化设计的基本概念和基本理论，内容包括：建立优化设计问题的数学模型，并总括介绍优化设计的概念和方法，必要的数学基础知识和一维搜索方法；无约束优化方法和线性、非线性规划，其中包括近些年发展起来的，使用效果较好的广义简约梯度法、二次规划迭代法和优化准则法；优化方法应用举例。本书并附有数学规划法、优化准则法和有限元—优化设计的 FORTRAN 语言源程序。

本书可供从事系统分析、管理科学，特别是机械结构设计方面的工程技术人员和科研人员阅读，也可作为高等院校有关专业高年级学生和研究生的教学参考书。

20160

机械结构优化设计

孙增民 米成秋 编著

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 17.75 字数 410,000

1985年5月第1版 1985年5月第1次印刷

印数 1—15,000

书号 15341·14 定价 3.65元

目 录

引 言	(1)
第一章 总论	(3)
§1. 优化设计问题举例	(3)
§2. 人字架的优化设计	(15)
§3. 优化设计的基本概念	(19)
§4. 优化设计的基本方法	(22)
第二章 基础知识	(25)
§1. 梯度的概念	(25)
§2. 多元函数的泰勒 (Taylor) 展开	(29)
§3. 多元函数的极值条件	(31)
§4. 函数的凸性	(33)
§5. 坐标变换及二次型函数的主轴线	(36)
§6. 一维搜索区间的确定和缩短	(39)
§7. 一维搜索的试探方法	(41)
§8. 一维搜索的插值方法	(45)
第三章 无约束优化问题的解法	(49)
§1. 最速下降法	(50)
§2. 牛顿 (Newton) 型方法	(54)
§3. 轭方向及共轭方向法	(57)
§4. 共轭梯度	(61)
§5. 变尺度法	(65)
§6. 鲍威尔 (Powell) 方法	(72)
§7. 单形替换法	(79)
第四章 线性规划和几何规划方法简介	(84)
§1. 线性规划问题的标准形式	(84)
§2. 基本可行解的转换	(86)
§3. 单纯形方法	(90)
§4. 单纯形法应用举例	(94)
§5. 最小二乘法	(99)
§6. 非线性规划问题的线性化解法——线性逼近法	(103)
§7. 对偶问题的概念	(107)
§8. 几何规划简介	(112)

第五章 非线性规划解法之一 —— 间接方法	(117)
§1. 约束变量法和拉格朗日 (Lagrange) 乘子法.....	(117)
§2. 库恩——塔克 (Kuhn—Tucker) 条件.....	(127)
§3. 制约函数法.....	(133)
§4. 乘子法简述.....	(141)
§5. 二次规划迭代法.....	(144)
§6. 简约梯度法和广义简约梯度法.....	(150)
第六章 非线性规划解法之二 —— 直接方法	(163)
§1. 可行方向法.....	(163)
§2. 梯度投影法.....	(165)
§3. 复形法和伸缩保差法简述.....	(176)
§4. 关于多目标函数优化问题的解法.....	(180)
小结 —— 方法的选择.....	(183)
第七章 优化准则法	(184)
§1. 满应力设计和能量准则.....	(184)
§2. 单个位移约束下的优化准则设计.....	(187)
§3. 多位移约束下的优化准则设计.....	(189)
§4. 优化准则法和数学规划法的一致性.....	(196)
第八章 机械结构优化设计举例	(199)
§1. 机床主轴的优化问题.....	(199)
§2. 主轴的优化准则法设计.....	(201)
§3. 主轴的数学规划法优化设计.....	(204)
§4. 主轴的有限元——优化设计.....	(208)
附 录	(217)
一、优化准则法源程序.....	(217)
二、数学规划法源程序.....	(225)
三、有限元——优化设计源程序.....	(243)
参考文献	(279)

引 言

机械产品的设计一般需要经过调查分析、方案拟定、技术设计、零件工作图绘制等环节。在传统设计中，这些环节几乎全都是由设计人员靠手工工具完成的。随着科学技术的发展，市场竞争的需要，要求机械产品更新换代的周期日益缩短，设计质量要求日益提高。因而，这种传统设计方法越来越不能适应发展的需要。

另外，机械产品设计总是希望能获得性能好、使用可靠、成本低等技术经济效益。这就要求设计者能从一系列可能的设计方案中选择一个最好的方案。但在传统设计中，由于分析和计算手段以及时间和费用的限制，可提供选择的方案是有限的，而且也不一定从中选出最好的。

近二十年来，随着电子计算机的应用，在机械设计领域内，已经可以用现代化的设计方法和手段进行结构设计，来满足上面对机械产品提出的要求。

现代化的设计工作已不再是过去那种凭借经验或直观判断来确定结构方案，也不是像过去“安全寿命可行设计”方法那样：在满足所提出的要求的前提下，先确定结构方案，再根据安全寿命等准则，对该方案进行强度、刚度等的分析、校核，然后进行修改，以确定结构尺寸。而是借助电子计算机，应用一些精确度较高的力学的数值分析方法（如有限元法等）进行分析计算，并从大量的可行设计方案中寻找出一种最优的设计方案，从而实现用理论设计代替经验设计，用精确计算代替近似计算，用优化设计代替一般的安全寿命可行设计。

机械结构的优化设计方法是六十年代迅速发展起来的一种设计方法，是机械设计现代化的重要发展方向之一。

优化方法在结构设计中的应用，既可以使方案在规定的设计要求下达到某些优化的结果，又不必耗费过多的计算工作量。因此，产品结构、生产工艺等的优化已经成为市场竞争的一种手段。例如，据资料介绍，利用一个化工优化系统（CHEOFS）的计算机手段，对一个化工厂进行设计。根据所给数据，在16小时内，进行一万六千个可行设计的选择，从中选出一个成本最低、产量最大的方案，并给出必需的精确数据。而在这之前，求解这个问题，曾用一组工程师工作了一年，但仅作了三个设计方案，而它们的效率却没有一个可以和上述优化方案相比。又例如，美国贝尔（Bell）飞机公司采用优化方法解决450个设计变量的大型结构优化问题。在对一个机翼进行重设计中，减轻重量达35%。波音（Boeing）公司也有类似的情况，在747机身的设计中，收到了减轻重量、缩短生产周期、降低成本的效果。武汉钢铁公司所引进的1700薄板轧机是西德DMAG公司提供的。该公司在对此产品进行优化修改后，就多盈利几百万马克。

优化方法不仅用于产品结构的设计、工艺方案的选择，也用于运输路线的确定、商品流通量的调配、产品配方的配比等等。目前，优化方法在机械、冶金、石油、化工、

电机、建筑、宇航、造船、轻工等部门都已得到广泛的应用。

在机械结构优化设计方面，国内已经用来解决过起重机塔架、雷达接收天线结构、机械传动方案、机床多轴箱方案、建筑结构等的设计，取得减轻重量达 30~40%，提高承载能力15%以上等等效果。此外，优化方法还是计算机辅助设计的重要组成环节。

机械结构的优化设计有两个主要的环节或内容：一是建立方程，即优化问题的提法或数学模型，它可以是解析式、试验数据或经验公式；另一个是优化问题的求解方法，即优化方法。

第一章 总 论

在优化方法中，通常是根据分析对象的设计要求，应用有关专业的基础理论和具体技术知识进行推导来建立相应的方程或方程组。对机械结构类的分析对象来说，主要是根据力学、机械设计基础知识和各专业机械设备的具体知识来推导方程或方程组（动力学问题中多为偏微分或常微分方程组的形式），这些方程反映结构诸参数之间的内在联系，通过它可以研究各参数对设计对象工作性能的影响。

下面通过几个具体例子，说明机械结构优化设计中建立方程组的方法和步骤（公式的推导尽量简略，以减少篇幅）。

§ 1 优化设计问题举例

例 1. 设计一个如图 (1—1) 所示的钢板弯曲弹簧，用于传递随时间变化的力 P 。为了调节和补偿装配中积累间隙，要求弹簧的变形 Δ 应尽可能的大。因此，对弯曲弹簧优化设计的目标是弹簧变形 Δ 最大。

按材料力学有关弯曲弹簧的应变能公式，得

$$U = \int_0^\pi \frac{M_b^2(Rd\theta)}{2EJ}$$

$$= \int_0^\pi \frac{(PR\sin\theta)^2(Rd\theta)}{2E\left(\frac{bt^3}{12}\right)}$$

或

$$U = \frac{6P^2R^3}{Ebt^3} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{3\pi P^2R^3}{Ebt^3}$$

式中的 E 是弹性模量， J 是抗弯惯性矩， M_b 是弯矩，其它符号如图中所示。

变形 Δ 为

$$\Delta = \frac{dU}{dP} = \frac{3\pi R^2(2P)}{Ebt^3} = \frac{6\pi PR^3}{Ebt^3} \quad (1-1)$$

这是一个用设计变量 b , R , t 表示的可计算的函数，称为目标函数。

根据钢板弹簧不同厚度 t 的使用数据，为避免疲劳断裂，要求其弯曲应力 σ_b 应满足下面的关系

$$\sigma_b \leq \frac{47000}{t^{0.25}k}$$

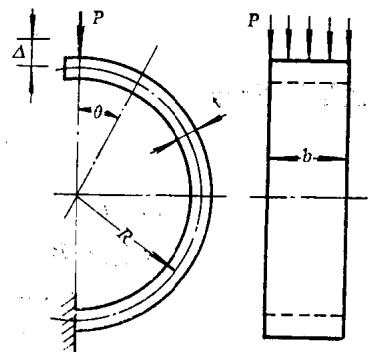


图 1—1

式中 k 是安全系数, 上式称为约束条件。若令 $y = \sigma_b t^{0.25}$, 则上述约束条件可写成下面的形式

$$y \leq y_{max} = \frac{47000}{k}$$

当 $t \ll R$ 时, 可以导出

$$\sigma_b \approx \frac{MC}{J} = \frac{PR \frac{t}{2}}{\frac{bt^3}{12}} = \frac{6PR}{bt^2}$$

这样, 则有

$$y = \sigma_b t^{0.25} = \frac{6PR}{bt^2} t^{0.25} = \frac{6PR}{bt^{1.75}} \quad (1-2)$$

它是一个由载荷和弹簧的几何尺寸组成的因子, 代表载荷环境。

因为制作弹簧时只能在一定范围内选取标准钢板的厚度 t , 所以我们对所用钢板厚度 t 应是间断的约束, 即

$$t = t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-3)$$

此外, 还应对尺寸 R 和 b 加上约束

$$R_{min} \leq R \leq R_{max} \quad (1-4)$$

$$b \leq b_{max} \quad (1-5)$$

这些都是设计时应满足的条件, 可概括为约束条件。

这样, 则问题可归结为: 求 b , R 和 $t = t_i$ 的值, 使弹簧的弯曲变形

$$\Delta = \frac{6\pi P}{Et^3} \cdot \frac{R^3}{b} \quad \text{为极大}$$

且满足约束条件

$$y \leq y_{max} \quad \text{或} \quad \frac{6P}{t_i^{1.75}} \cdot \frac{R}{b} \leq \frac{47000}{k}$$

$$b \leq b_{max}$$

$$R_{min} \leq R \leq R_{max}$$

$$t = t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

例 2. 对如图 (1-2) 所示的分度机构进行优化设计。

根据经验和计算, 槽轮机构上的驱动销和槽轮因接触而产生的最大力为 F_{max} , 如图所示。因而可据此确定最大的切应力 τ_{max} , 使机构既在最大工作速度 ω_{max} 下工作, 又能有较长的工作寿命。设计时可以根据经验取

$$\tau_{max} = k_1 \sqrt{\frac{F_{max}}{Td}}$$

式中的系数

$$k_1 = \frac{0.2426}{\sqrt{\frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}}}$$

T 和 d 是槽轮厚度和槽宽, 如图 (1—2) 所示; F_{max} 是最大动态接触力, 它和 ω 及结构尺寸有关。根据转动刚体动力学和图示尺寸, 可以导出

$$F_{max}kD \approx (I_G + I_L)\omega^2(\ddot{\beta})_{max}$$

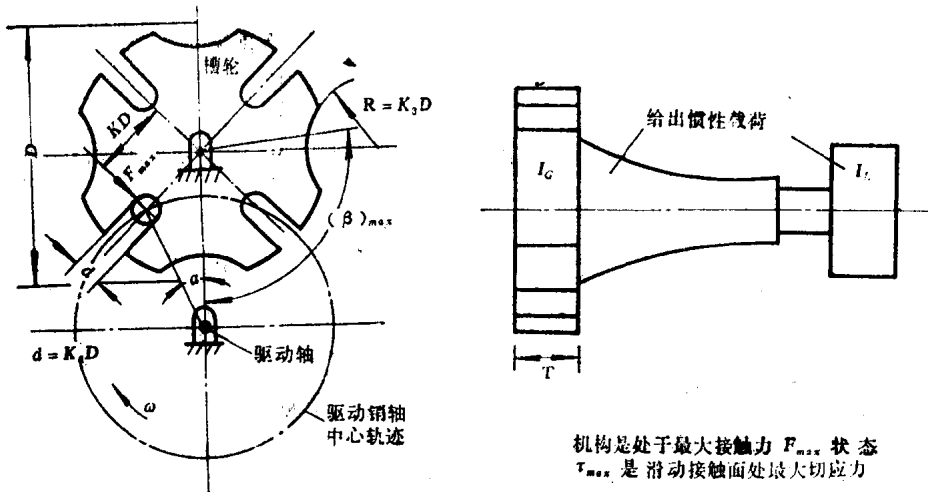


图 1—2

设计时可按槽轮厚度 T 取 $I_G = k_3 TD^4$, $I_L = (1 \sim \frac{2}{3})I_G$ 。于是得出

$$F_{max} \approx \frac{(I_G + I_L)\omega^2}{kD} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha^2} \right)_{max}$$

式中, I_G 和 I_L 是槽轮的质量惯性矩和载荷惯性矩; $\ddot{\beta}_{max} = \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha^2} \right)_{max}$ 是在 F_{max} 位置时的值; D 是槽轮直径; ω 是驱动轮角速度; k 是常数。

这样, 则有

$$\tau_{max} = k_1 \sqrt{\frac{F_{max}}{Td}} \approx k_1 \sqrt{\frac{(I_G + I_L)\omega^2 \ddot{\beta}_{max}}{kDTd}}$$

槽轮机构的设计目标是要求比值

$$\left(\frac{\tau_{max}}{\omega} \right)^2 \approx \frac{k_1^2 (I_G + I_L) \ddot{\beta}_{max}}{kDTd} \quad (1-6)$$

最小。它是设计变量 D 和 T 的可计算函数, 亦即设计问题的目标函数。

有两种设计方法, 一是给定 τ_{max} , 得 ω 的最大值; 另一种是给定 ω , 确定最小允许的 τ_{max} 值。这可使接触磨损引起损坏的机会最小。

上述诸式中的系数 k , k_1 至 k_3 和 $\ddot{\beta}_{max}$ 等可以从有关设计资料中选取。

这样, 则所设计机构的优化问题可以归结为: 求 D 和 T 的值, 使槽轮机构的切应力和速度之比 $\left(\frac{\tau_{max}}{\omega} \right)^2 \approx \frac{k_1^2 (I_G + I_L) \ddot{\beta}_{max}}{kDTd}$ 为最小, 且满足约束条件

$$d = k_2 D$$

$$I_G = k_3 T D^4$$

$$k_5 \leq \frac{T}{D} \leq k_4$$

$$D \leq D_{max}$$

$$T \leq T_{max}$$

例 3. 在图 (1—3) 所示的接触系统中, θ 是接触块与鼓轮间的接触角, N 是接触

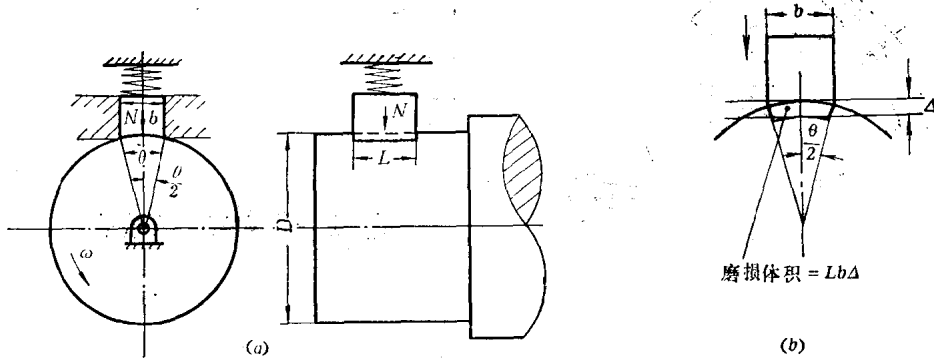


图 1—3

压力, ω 是鼓轮的迴转角速度。它们都是定值。设计时, 要求因磨损而更换接触块的次数最少。

根据接触磨损规律, 接触的运动件间材料的磨损量 (体积) 可写成下式

$$V = \frac{\mu N x}{3p}$$

式中 μ 是磨损系数; N 是作用的正压力; $x = \frac{D}{2} \omega t$ 是接触点间在 t 时间内的相对滑动距离; p 是材料的压强, 可近似地取为其屈服限 σ_s 的 3 倍, 即 $p \approx 3\sigma_s$; D 是鼓轮直径。

上式可改写成

$$V \approx \frac{\mu N \frac{D}{2} \omega t}{3 \cdot 3 \sigma_s} = \frac{\mu N D \omega t}{18 \sigma_s}$$

从图 (1—3b) 可看出, 磨损体积是

$$V = L b \Delta$$

其中的 Δ 是磨损深度, b 和 L 是接触块尺寸。

优化设计的目标是使接触件的磨损率 $\frac{\Delta}{t}$ 最小。由上两式得 (以 $b = D \sin \frac{\theta}{2}$ 代入)

$$\frac{\Delta}{t} \approx \frac{\mu N D \omega}{18 \sigma_s L b} = \frac{\mu N \omega}{18 \sigma_s L \sin \frac{\theta}{2}} \quad (1-7)$$

它是设计变量 D 、 L 、 b 的可计算函数，是目标函数。

由于正压力 N 的作用，鼓轮迴转需要克服一定的摩擦力矩 M_f ，其值为

$$M_f = \frac{fND}{2}$$

式中 f 是摩擦系数。

设计时，不允许产生过大的摩擦力矩，即 M_f 应有一个限制值 $(M_f)_{max}$ 。此外，还要考虑对接触块应有空间尺寸的限制。这些都是设计时应满足的约束条件。

这样，就可以把所讨论的问题综述为：求 D 、 b 、 L 之值，使接触件间的磨损率

$$\frac{\Delta}{t} \approx \frac{\mu ND\omega}{18\sigma_s Lb} = \frac{\mu N\omega}{18\sigma_s L \sin \frac{\theta}{2}}$$

为最小，且满足约束条件

$$M_f = \frac{fND}{2} \leq (M_f)_{max}$$

$$b = D \sin \frac{\theta}{2} \leq b_{max}$$

$$L \leq L_{max}$$

$$D_{min} \leq D \leq D_{max}$$

例 4. 轴承和轴承系统的优化设计。

对于动压式滑动轴承，当取无量纲形式的表达式时，通过计算可以得出它的：

$$\text{承载能力系数} = \frac{F\psi^2}{\mu v L};$$

$$\text{润滑油流量系数} = \frac{Q}{\psi v DL};$$

$$\text{轴承的功耗} = \frac{fPv}{102};$$

$$\text{轴承的温升} = \frac{fPv}{427c_p\rho Q};$$

$$\text{摩擦阻力系数} = \frac{f}{\psi};$$

$$\text{圆柱轴承的最小油膜厚度} = \frac{D}{2}\psi\left(1 - \frac{e}{c}\right);$$

轴颈的失稳转速（指开始半速涡动时的轴颈转速） $n_w = n_{KI} \sqrt{\frac{\bar{m}}{\gamma^2 k_{eg}}}$ 等等。

上述各式的： P 是轴承载荷； D 是轴承直径； L 是轴承长度； v 是轴颈圆周速度； μ 是润滑油粘度； c 是半径间隙； e 是轴颈和轴承中心间的偏心距； Q 是润滑油流量； f 是摩擦系数； $\psi = \frac{2c}{D}$ 是间隙比； c_p 是油的比热系数； ρ 是油的比重； $\bar{m} = \frac{\Omega\psi^3}{\mu L} m$ 是转轴分配到轴承上的无量纲质量； m 是转轴分配到轴承上的质量； Ω 是转轴的工作角

速度； k_{eq} 是当量刚度； γ 是刚度和阻尼的比例系数； n_{x1} 是转轴的第一临界转速。

优化设计时，可以取滑动轴承的最大承载能力、最小功耗、最小流量、最小温升或振动过程中的油膜稳定性等等之中的一个或几个的组合做为目标函数。其约束条件可以是最小油膜厚度、轴承温升、轴承功耗、轴承转速、轴承的长径比等等。

对一般的轴承系统，可以从动力学角度考虑它的优化设计。

若把轴承系统看做是由支承和轴承处的轴所组成，则在工作时，由轴和支承的质量、轴承系统刚度和阻尼组成一个振动系统。在外力作用下，它会产生沿垂直和水平两个方向的强迫振动。如果忽略垂直和水平方向上的刚度和阻尼的相互影响，则可以对它的两个方向的振动分别进行研究。若只考虑系统在垂直方向上的振动，则它可以简化成图(1-4)所示的力学模型。

图中 m_1 、 k_1 和 c_1 是轴的当量质量、轴承刚度系数和阻尼系数； m_2 、 k_2 和 c_2 是支承的质量、支承座的刚度系数和阻尼系数。这是一个两自由度的振动系统。

设计时，可以选择、调整 m_1 、 k_1 、 c_1 、 m_2 、 k_2 、 c_2 使系统强迫振动引起的振幅 X_1 和激振力 P 之比 $\frac{X_1}{P}$ ，即动柔度最小（或动刚度最大）。但是必须避免共振，同时 m_1 、 k_1 、 c_1 、 m_2 、 k_2 、 c_2 等应有一个设计对象所能允许的变化范围。

当忽略阻尼影响时，可以通过系统的两个自由度振动的运动方程

$$M\ddot{x} + Kx = p \quad (1-8)$$

解出其动柔度 $\frac{X_1}{P}$ 。式中的 M 和 K 是系统的质量矩阵和刚度矩阵。

避免共振就是要避免激振力频率 ω （例如轴的工作频率 ω ），与系统的固有振动频率 ω_i 重合。工程上按系统固有频率值给出一个频率禁区，使激振力频率不落在频率禁区内。一般要求激振力频率 ω 避开 $(1 \pm 20\%) \omega_i$ 禁区范围。

这样，问题可归结为：确定设计变量 $x = (m_1, m_2, k_1, k_2, c_1, c_2)$ 使目标函数

$$F = \frac{X_1}{P} = f(x) \quad \text{最小, 约束条件为:}$$

$$\text{若 } \omega_i > \omega, \quad \text{则 } \omega_i > 1.2\omega,$$

$$\text{若 } \omega_i < \omega, \quad \text{则 } \omega_i < 0.8\omega,$$

$$x_i^{\text{下}} \leq x_i \leq x_i^{\text{上}}.$$

其中 x_i 分别是 m_1 、 m_2 、 k_1 、 k_2 、 c_1 、 c_2 等设计变量。在实际设计中，轴的当量质量一般是给定的。这时，设计变量中不应再包括 m_1 。

例 5. 平面四连杆机构的优化设计。

平面四连杆机构的设计主要是根据运动学的要求，确定其几何尺寸，以实现给定的

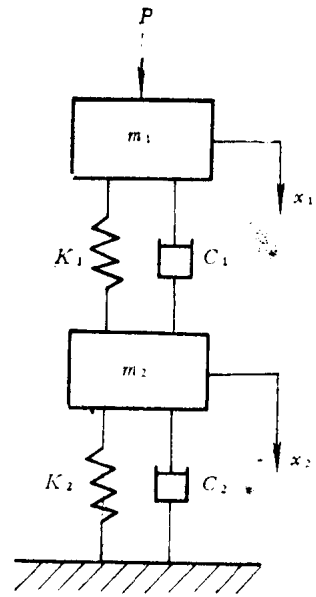


图 1-4

运动规律。

图(1—5)所示是一个曲柄摇杆机构。图中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 分别是曲柄 AB、连杆 BC、摇杆 CD 和机架 AD 的长度。 φ_0 是曲柄输入角， ψ_0 是摇杆输出的起始位置角。这里，规定 φ_0 为摇杆在右极限位置角 ψ_0 时的曲柄起始位置角，它们可以由 x_1 、 x_2 、 x_3 和 x_4 确定。通常规定曲柄长度 $x_1 = 1.0$ ，而在这里 x_4 是给定的，所以只有 x_2 和 x_3 是设计变量。

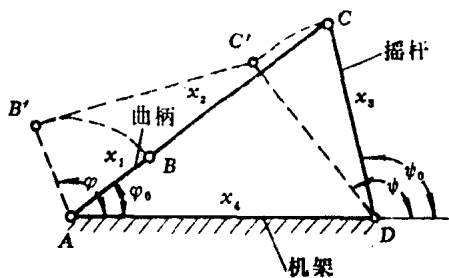


图 1—5

设计时，可在给定最大和最小传动角的前提下，当曲柄从 φ_0 位置转到 $\varphi_0 + 90^\circ$ 时，要求摇杆的输出角最优地实现一个给定的运动规律 $f_0(\varphi)$ 。例如，要求

$$\psi = f_0(\varphi) = \psi_0 + \frac{2}{3\pi} (\varphi - \varphi_0)^2$$

对于这样的设计问题，可以取机构的期望输出角 $\psi = f_0(\varphi)$ 和实际输出角 $\psi_i = f_i(\varphi)$ 的平方误差积分准则做为目标函数，使 $f(x) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}} [\psi - \psi_i]^2 d\varphi$ 最小。

当把输入角 φ 取 s 个点进行数值计算时，它可以化约为 $f(x) = f(x_2, x_3) = \sum_{i=1}^s [\psi_i - \psi_{i1}]^2$ 最小。

相应的约束条件有：

1. 曲柄与机架共线位置时的传动角

$$\text{最大传动角 } \gamma_{max} \leq 135^\circ$$

$$\text{最小传动角 } \gamma_{min} \geq 45^\circ$$

对这个问题可以计算出

$$\gamma_{max} = \arccos \left[\frac{x_2^2 + x_3^2 - 36}{2x_2x_3} \right]$$

$$\gamma_{min} = \arccos \left[\frac{x_2^2 + x_3^2 - 16}{2x_2x_3} \right]$$

所以有

$$x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \cos 135^\circ - 36 \geq 0$$

和

$$x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \cos 45^\circ + 16 \geq 0$$

2. 曲柄存在条件

$$x_2 \geq x_1$$

$$x_3 \geq x_1$$

$$x_4 \geq x_1$$

$$x_2 + x_3 \geq x_1 + x_4$$

$$x_4 - x_1 \geq x_2 - x_3$$

3. 边界约束

当 $x_1 = 1.0$ 时, 若给定 x_4 , 则可求出 x_2 和 x_3 的边界值。例如, 当 $x_4 = 5.0$ 时, 则有曲柄存在条件和边界值限制条件如下:

$$x_2 + x_3 - 6 \geq 0$$

$$4 - x_2 + x_3 \geq 0$$

和

$$1 \leq x_2 \leq 7$$

$$1 \leq x_3 \leq 7$$

例 6. 机床传动系统的优化设计。

这里用一个机床主传动系统为例, 说明在优化设计时建立数学模型的方法。

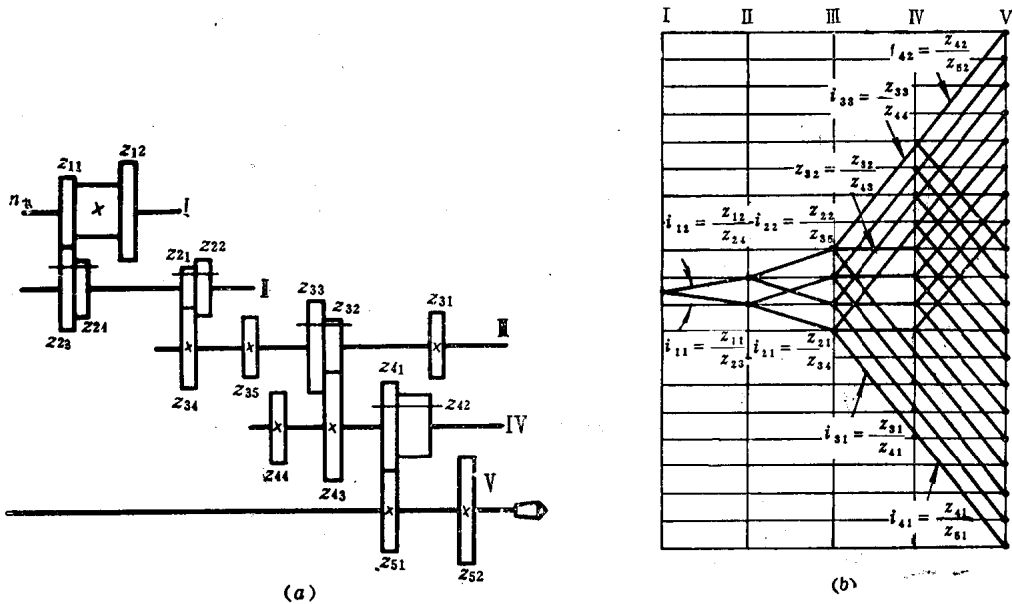


图 1-6

图 (1-6a, b) 所示分别是某车床主传动的传动系统图和相应的传动结构图。图中没有画出摩擦离合器, 因为它的结构尺寸参数是按现有结构选取的, 不需进行优选。由图可知: 它共有四个传动组, 即在 I—II 轴间的由 i_{11} 和 i_{12} 组成的第一传动组, II—III 轴间由 i_{21} 和 i_{22} 组成的第二传动组, III—IV 轴间由 i_{31} 、 i_{32} 和 i_{33} 组成的第三传动组, IV—V 轴间由 i_{41} 和 i_{42} 组成的第四传动组。IV 轴上的齿轮 z_{41} 是公用齿轮。

各传动组的模数依次为 m_1, m_2, m_3, m_4 。

这个传动系统的设计变量有以下三类, 即:

- 1) 各传动组的最低传动比, 分别是 i_{11} 、 i_{21} 、 i_{31} 、 i_{41} ;
- 2) 各传动组的最小主动轮齿数, 分别是 z_{11} 、 z_{21} 、 z_{31} 、 z_{41} (由于 z_{41} 是公用齿轮, 所以 z_{42} 就不是独立的变量);
- 3) 各传动组的模数, 分别是 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 。

所以共有 12 个设计变量。

说明一点, 当采用变位齿轮时, 还要考虑变位齿轮传动付和标准齿传轮动付中心距的差值 ΔA_i 。

目标函数取传动路线中各对啮合齿轮中心距之和最小, 它可写成

$$f(x) = \sum_{j=1}^4 \frac{m_j z_{j1}}{2} \left(1 + \frac{1}{i_{j1}}\right) \quad (1-9)$$

约束条件包括:

1) 由于结构尺寸引起的齿轮齿数、传动比值、中心距的限制 (可以是上限、下限或上下限);

2) 齿轮线速度的限制;

3) 齿轮弯曲和接触强度的限制等。

这台车床共有 67 个约束条件, 虽然形式各异, 但都可统一写成不等式约束的形式

$$g_j(x) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

或

$$x_i^{\text{下}} \leq x_i \leq x_i^{\text{上}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

这样, 问题可归结为: 求 $x = (i_{11}, i_{21}, i_{31}, i_{41}, z_{11}, z_{21}, z_{31}, z_{41}, m_1, m_2, m_3, m_4)^T$ 的值, 使

$$f(x) = \sum_{j=1}^4 \frac{m_j z_{j1}}{2} \left(1 + \frac{1}{i_{j1}}\right) \rightarrow \min$$

s. t. (即受约束于)

$$g_j(x) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$x_i^{\text{下}} \leq x_i \leq x_i^{\text{上}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

例 7. 直升飞机尾仓部分桁架结构的优化设计。

图 (1-7a) 是某直升飞机尾仓部分的外观图。图 (1-7b) 是它的内部桁架结构的两个视图。这种桁架结构, 设计时要求其总重量最小, 但各杆在受载时, 各杆单元的应力 σ_i 和节点位移 y_i 以及振动的固有频率 ω 都应有所限制。

图示的桁架结构, 共有 108 个杆单元, 28 个节点。若每个节点考虑 3 个自由度, 共有 72 个自由度 (28 个节点中有 4 个节点被固定)。对于这样的结构, 目前都是用有限元法来计算它的 y_i , ω^2 和 σ_i 。当取各杆横截面积 A_i 为设计变量 (可以把 A_i 进行分组处理, 以减少设计变量数目) 时, 相应的计算公式是

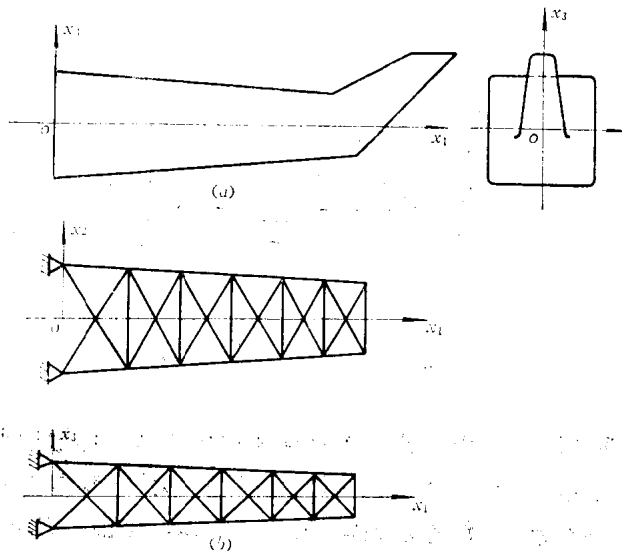


图 1-7

$$K(\mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{F} \quad (1-10)$$

$$K(\mathbf{A})\bar{\mathbf{y}} = \omega^2 M(\mathbf{A})\bar{\mathbf{y}} \quad (1-11)$$

式中， $K(\mathbf{A})$ 和 $M(\mathbf{A})$ 是结构刚阵和质阵； \mathbf{F} 是载荷阵； \mathbf{y} 是节点位移列阵； ω 和 $\bar{\mathbf{y}}$ 是固有频率和对应的振型矩阵。

式 (1-10) 和 (1-11) 是由许多个平衡方程所组成的方程组 (又称状态方程)，通过求解，可以得出与某一设计方案 (某一组设计变量所确定的方案) 相应的 y_j 、 ω^2 和 σ_i 值。

优化设计的目标是结构总重量最轻。若 L_i 是各杆单元的长度，则总重量 (ρ 是材料密度)

$$f(\mathbf{A}) = W = \rho g \sum_{i=1}^{108} L_i A_i \quad (1-12)$$

设计时，要求各 σ_i 都不能大于允许的 $\sigma_{i,允}$ ； y_j 必须小于允许的 $y_{j,允}$ ；计算的最低固有频率 ω^2 应大于频率的下限值 ω_0^2 ，各设计变量 A_j 应限制在一定界限之内。

这样，本优化问题归结为：求一组变量 \mathbf{A} ，使目标函数

$$f(\mathbf{A}) \rightarrow \min$$

s. t.

$$|\sigma_i| \leq \sigma_{i,允} \quad (i = 1, 2, \dots, 108)$$

$$|y_j| \leq y_{j,允} \quad (j = 1, 2, \dots, 72)$$

$$\omega^2 \geq \omega_0^2$$

$$A_{i,下} \leq A_i \leq A_{i,上}$$

当然，这些约束条件可统一写成不等式 $\mathbf{g}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{0}$ 的形式。

例8. 机床主轴结构的优化设计。

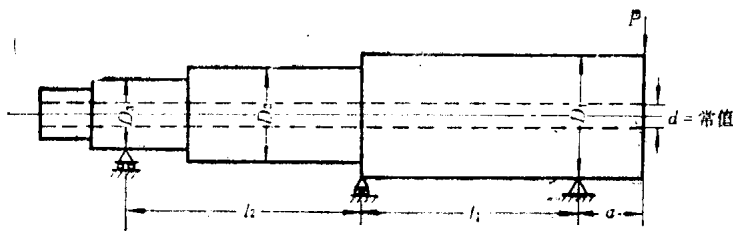


图 1-8

图 (1-8) 所示是一个机床主轴的典型结构原理图。对于这类问题，目前也是采用有限元法，利用式 (1-10) 和 (1-11) 形式的状态方程来计算轴端变形 y 和固有频率 ω 。

优化设计的任务是确定 D_1 、 l_1 和 a ，保证 y 和 ω 在允许限内，使结构的重量最轻。

这时，问题归结为：求 D_1 、 l_1 、 a 的值，使重量 $f(D_1, l_1) = \gamma \pi [\Sigma (D_1^2 - d^2) l_1 + (D_n^2 - d^2) a]$ 为最小，并满足条件