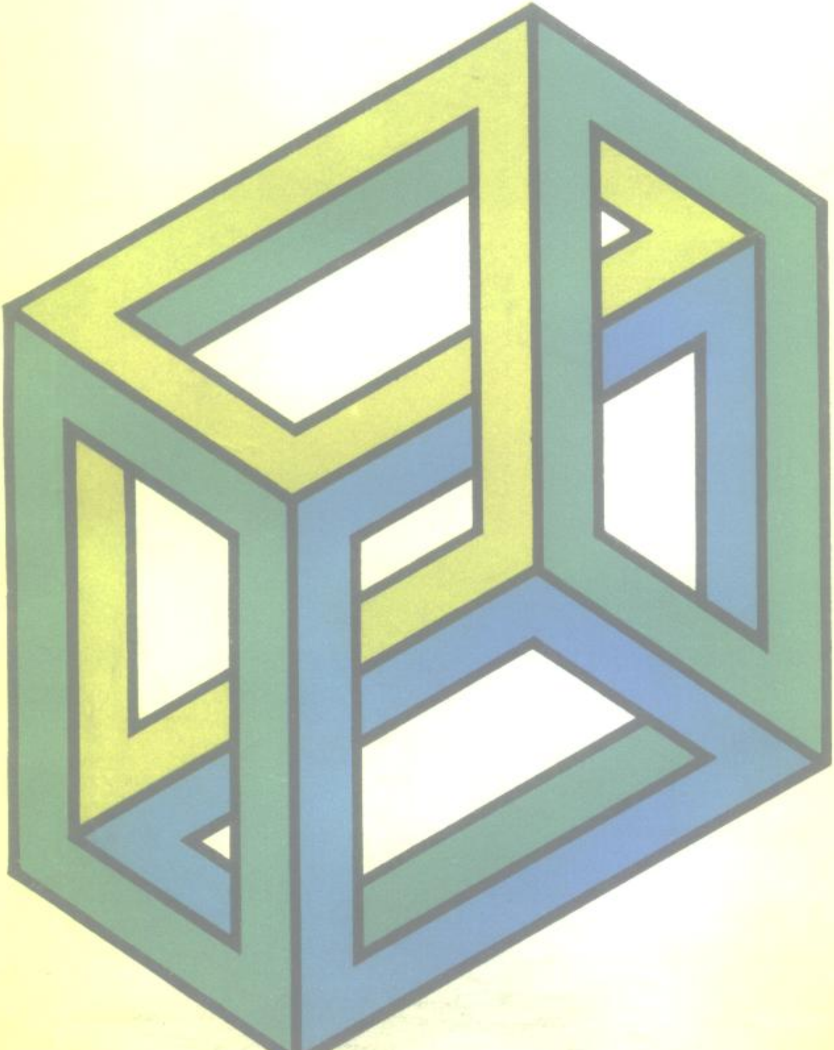
工程数学

矢量分析与张量计算

[修订版]

杨　曙　编



工 程 数 学

矢量分析与张量计算

（修 订 版）

杨 曙 编
李恒沛 审

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院数学教研室合编的"工程数学"七个分册之一。本分册介绍矢函数的微分和积分，梯度、散度、旋度的定义及计算公式，势量场与管式场，正交曲线坐标系，直角坐标系中的张量和一般坐标系中的张量。书中附有较多例题和习题，书后有习题解答。

本书可作为高等工科院校教材，也可供有关科技人员参考。

工 程 数 学

矢量分析与张量计算

（修 订 版）

杨 曙 编

李恒沛 审

责任编辑 陈子玉

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

师范学院出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 $7\frac{7}{8}$　207千字

1987年11月第二版　1987年11月第三次印刷　印数：32,001—35,700册

ISBN7-118-00123-6/O4　　定价：1.80元

再版说明

《工程数学》(修订版)包括：《概率论与数理统计》、《矢量分析与张量计算》、《复变函数》、《线性代数》、《计算方法》、《拉普拉斯变换与富里哀变换》、《数学物理方程、特殊函数》。

本书原名矢量分析，这次再版增加了张量计算，因此现在改名为矢量分析与张量计算。

矢量分析部分，修订后仍然保持了初版的思想体系与基本结构。变动较多的地方是第三章的前面几节，以便更符合思维的逻辑性，并顺便提出了矢量势的概念与计算方法，而矢量势在自然科学中是常要用到的。在第二章末增加了梯度、散度与旋度定义的统一形式及矢量场的微分法两节。各章都增加了一些帮助理解概念和理论、熟练运算、初步应用的例子和习题。

张量计算部分，本着由简到繁，由易到难的原则，将内容分为两章。前一章先讲直角坐标系中的张量，以此为基础，再在后一章讨论一般坐标系下的张量。在论述过程中注意了由具体到抽象的原则。两章中举了不少例子，用以说明概念和具体计算。

本版仍由北京航空学院数学教研室李恒沛副教授审阅。他认真地细阅了原稿，提出了许多宝贵意见，并热情地为张量计算部分配备了一套习题。在此特表示衷心的感谢。

编　者

前　　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的《工程数学》教材之一。全套教材共分七册出版：《矢量分析》、《复变函数》、《积分变换》、《线性代数》、《计算方法》、《数学物理方程与特殊函数》、《概率论与数理统计》。

本册介绍在研究流体力学、电动力学以及其它自然科学中所需要的矢量运算方面的基础知识。包括数量场的梯度、矢量场的散度和旋度以及与之有关的一些内容。

书中加有“*”号的内容可根据情况予以取舍，附录内容供读者参考。各章附有适量习题，书后附有习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册矢量分析由西北工业大学杨曙编写，北京航空学院李恒沛主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此一并致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　者

目　录

第一章　矢性函数的微分和积分 …… 1

§1.1　矢性函数的概念与代数运算 …… 1

§1.2　矢函数的极限与连续 …… 4

§1.3　矢函数的导数与微分 …… 7

§1.4　导数矢量在两个方向的分解 …… 14

§1.5　$r'(s)$的几何意义 …… 16

§1.6　矢函数的积分 …… 19

习题一 …… 21

第二章　梯度、散度和旋度 …… 25

§2.1　数量场和矢量场 …… 25

§2.2　方向导数 …… 29

§2.3　数量场的梯度 …… 33

§2.4　梯度的运算法则 …… 37

§2.5　矢量场通过曲面的通量 …… 42

§2.6　矢量场的散度 …… 45

§2.7　矢量场沿着闭曲线的环量 …… 51

§2.8　矢量场的旋度 …… 53

§2.9　梯度、散度和旋度定义的统一形式 …… 63

§2.10　矢量场的微分法 …… 67

习题二 …… 72

第三章　势量场与管式场 …… 76

§3.1　势量场与无旋场 …… 76

§3.2　势函数的计算 …… 80

§3.3　管式场 …… 84

§3.4　连续性方程 …… 89

§3.5　格林公式 …… 91

习题三 …… 94

第四章　关于梯度、散度和旋度的计算公式……………………96
　§4.1　基本公式……………………………………………………96
　§4.2　一次微分运算公式的证明……………………………………97
　§4.3　二次微分运算公式的证明……………………………………104
　习题四………………………………………………………………106
第五章　正交曲线坐标系……………………………………………110
　§5.1　正交曲线坐标系……………………………………………110
　§5.2　梯度、散度、旋度、Δψ在正交曲线坐标系下的表示式………115
　习题五………………………………………………………………124
第六章　直角坐标系中的张量………………………………………126
　§6.1　引言…………………………………………………………126
　§6.2　坐标变换……………………………………………………128
　§6.3　零阶与一阶张量……………………………………………135
　§6.4　二阶张量……………………………………………………139
　§6.5　高阶张量……………………………………………………150
　§6.6　张量的加法、乘法与缩并……………………………………152
　§6.7　张量的对称性………………………………………………156
　§6.8　二阶对称张量的主轴和特征值………………………………161
　§6.9　张量场的导数………………………………………………172
　习题六………………………………………………………………178
第七章　一般坐标系中的张量………………………………………182
　§7.1　基与斜角坐标系……………………………………………182
　§7.2　基的变换与斜角坐标变换……………………………………189
　§7.3　矢量的协变与逆变分量………………………………………194
　§7.4　斜角坐标系中的张量…………………………………………203
　§7.5　一般张量……………………………………………………211
　§7.6　协变导数……………………………………………………219
　习题七………………………………………………………………232
附录1　格林、高斯、司托克斯公式…………………………………235
附录2　矢量代数中的一些公式………………………………………237
习题答案……………………………………………………………238

第一章　矢性函数的微分和积分

本章所讨论的内容是后面各章的基础，同时也是研究许多自然科学时常用的一种工具。矢性函数的微分与积分概念，从实质上讲，和函数 $y=f(x)$ 的微分与积分概念类似。因此，在学习本章时，只要常与函数的微分与积分中对应的内容紧密地联系起来，就不会遇到什么困难。

§1.1　矢性函数的概念与代数运算

今后我们所讨论的矢量都是变矢量。所谓变矢量是指其大小或方向在所论问题中是变化的，或其大小与方向同时都是变化的矢量。例如，在变力作功问题中的变力就是一个变矢量。又如质点沿曲线运动时，其速度矢量也是一个变矢量。

今后，我们用粗体字母，例如 $\boldsymbol{a}$，A，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{B}$ 等表示矢量。

定义1.1　设有一变矢量 $\boldsymbol{a}$ 和一实变量 t，如果 t 在区间 (t_1, t_2) 内每取定一值时，矢量 $\boldsymbol{a}$ 总有一确定的值（即确定的大小与方向）和它对应，则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 为实变量 t 的函数，且记为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$$

而区间 (t_1, t_2) 称为函数的定义域。

例如，设一物体受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，沿 x 轴从 x_1 运动到 x_2，显然，这变力 $\boldsymbol{F}$ 和物体运动的速度 $\boldsymbol{V}$ 都是坐标 x 的函数，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x),\quad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(x)$$

而区间 (x_1, x_2) 为它们的定义域。

今后，我们常称函数 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ 为**矢性函数**，或简称为**矢函数**。为与矢函数区分开，而称函数 $y=f(x)$ **为数性函数**。

任取一个空间直角坐标系 xyz。将矢函数关于这坐标系的三个分量用 $a_x(t)$、$a_y(t)$、$a_z(t)$ 表示，于是

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$

或写成

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$$

起点在坐标原点 o，终点为M的矢量$\overrightarrow{OM}$叫做点M的**矢径**，常用$\boldsymbol{r}$表示：

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,\ y,\ z\}$$

空间任意一点的位置均可用该点的矢径表示出来。当点M为变点，即它的三个坐标x、y、z都是t的函数时，则此点M的矢径用$\boldsymbol{r}(t)$表示：

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$$

显然，当t在$(t_1,\ t_2)$内变动时，点M的轨迹一般是一条曲线(图 1-1)。方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ t_1<t<t_2$$

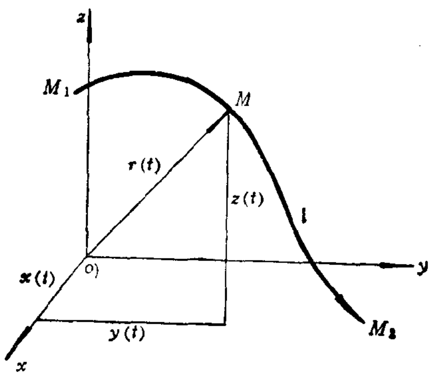


图 1-1

称为曲线l的**参数方法**。

例如，圆$x^2+y^2=a^2$的参数方程可以写为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ a\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ b\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

双曲线的右支

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (x\geqslant a)$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\{a\mathrm{ch}u,\ b\mathrm{sh}u\},\ -\infty<u<+\infty$$

抛物线

$$y^2=2px \qquad (p>0)$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\left\{\frac{u^2}{2p},\ u\right\}, \qquad -\infty<u<+\infty$$

值得注意的是：任何曲线的参数方程都不是唯一的。

对于曲线的参数方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \qquad t_1<t<t_2$$

若当 t 从t_1变到t_2时，$\boldsymbol{r}(t)$ 的终点描绘出从M_1到M_2的曲线(图 1-1)，则从M_1沿曲线到M_2的方向称为该曲线的**正向**。规定了正向的曲线叫做**有向曲线**。例如参数方程

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ b\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

所表示的椭圆曲线，其正向为逆时针方向。

矢径函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的几何意义一般表示空间一条曲线。它的模$|\boldsymbol{r}(t)|$则表示**空间的点到坐标系点的距离**。由$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$，知

$$|\boldsymbol{r}(t)|=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$$

对于一般的矢函数$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，如将 t 取不同值时所得各个矢量的起点都移置于空间某一定点M_0（因在许多实际问题中，矢量的起点往往无关紧要)，则其终点在空间描出一条曲线。换言之，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$的几何意义仍然表示空间曲线。$\boldsymbol{a}(t)$ 的模$|\boldsymbol{a}(t)|$则表示**空间两点间的距离**。由

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$$

知

$$|\boldsymbol{a}(t)|=\sqrt{a_x^2(t)+a_y^2(t)+a_z^2(t)}$$

这表明求矢函数的模与求矢量的模的运算是一样的，只是结果不

一样，矢函数$\boldsymbol{a}(t)$的模仍是t的函数。

至于矢函数的其它代数运算也和矢量的一样。令$h(t)$表示数性函数。

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$$
$$\boldsymbol{b}(t)=\{b_x(t),\ b_y(t),\ b_z(t)\}$$

则当$t_1\leqslant t\leqslant t_2$时，有

$$\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t)=\{a_x(t)+b_x(t),\ a_y(t)+b_y(t),\ a_z(t)+b_z(t)\}$$

$$h(t)\boldsymbol{a}(t)=\{h(t)a_x(t),\ h(t)a_y(t),\ h(t)a_z(t)\}$$

$$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)=a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)+a_z(t)b_z(t)$$

$$\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x(t) & a_y(t) & a_z(t)\\ b_x(t) & b_y(t) & b_z(t)\end{vmatrix}$$

两个矢函数$\boldsymbol{a}(t)$与$\boldsymbol{b}(t)$相互垂直的充要条件是$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)=0$。

例如，已知$\boldsymbol{a}(t)=\{t,\ 1-t^2,\ \cos t\}$，$\boldsymbol{b}(t)=\{\sin t,\ \ln t,\ t^2\}$（$t>0$），则有

$$|\boldsymbol{a}(t)|=\sqrt{(1-t^2)^2+t^2+\cos^2 t},$$
$$|\boldsymbol{b}(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\ln^2 t+t^4}$$

$$\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ t & 1-t^2 & \cos t\\ \sin t & \ln t & t^2\end{vmatrix}$$
$$=\{t^2(1-t^2)-\cos t\cdot\ln t,\ \sin t\cos t-t^3,\ t\ln t-(1-t^2)\sin t\}$$

§1.2 矢函数的极限与连续

和讨论数性函数时一样，在讨论矢性函数的微分和积分之前，我们先来建立矢函数的极限与连续的概念。

一、矢函数的极限

定义1.2 设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在t_0的某一邻域内有定义（但在t_0处可以无定义），又$\boldsymbol{b}$为一常矢量。若对于每一个任意给定的正数ε，必有一个正数δ存在，使得当$0<|t-t_0|<\delta$时，有

$$|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{b}|<\varepsilon$$

成立，这时我们说，当t趋于t_0时，函数$\boldsymbol{a}(t)$以$\boldsymbol{b}$为其**极限**。用符号表示，就是

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{b} \tag{1.2.1}$$

将$\boldsymbol{a}(t)$和$\boldsymbol{b}$在直角坐标系下分解：

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$$

$$\boldsymbol{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$$

这样容易看出式（1.2.1）成立的**充要条件**是

$$\lim_{t\to t_0}a_x(t)=b_x,\quad \lim_{t\to t_0}a_y(t)=b_y$$

$$\lim_{t\to t_0}a_z(t)=b_z$$

事实上，根据定义，式（1.2.1）和

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{b}|=0$$

等价，而这式又可写成

$$\lim_{t\to t_0}\sqrt{[a_x(t)-b_x]^2+[a_y(t)-b_y]^2+[a_z(t)-b_z]^2}=0$$

亦即

$$\lim_{t\to t_0}a_x(t)=b_x,\quad \lim_{t\to t_0}a_y(t)=b_y$$

$$\lim_{t\to t_0}a_z(t)=b_z$$

这个充要条件告诉我们，对矢函数之极限的讨论可以转化为对数性函数（即该矢函数的三个分量）之极限的讨论。

二、极限的运算法则

设$f(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$当$t\to t_0$时的极限都存在，于是有

$$\lim_{t\to t_0} f(t)\boldsymbol{a}(t)=\lim_{t\to t_0} f(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

我们来证明第三式，其余各式留给读者自证。

设

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$$
$$\boldsymbol{b}(t)=\{b_x(t),\ b_y(t),\ b_z(t)\}$$

于是

$$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)=a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)+a_z(t)b_z(t)$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]&=\lim_{t\to t_0}[a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)\\&\quad+a_z(t)b_z(t)]\\&=\lim_{t\to t_0}a_x(t)\lim_{t\to t_0}b_x(t)+\lim_{t\to t_0}a_y(t)\lim_{t\to t_0}b_y(t)\\&\quad+\lim_{t\to t_0}a_z(t)\lim_{t\to t_0}b_z(t)\\&=\{\lim_{t\to t_0}a_x(t),\ \lim_{t\to t_0}a_y(t),\ \lim_{t\to t_0}a_z(t)\}\cdot\{\lim_{t\to t_0}b_x(t),\\&\quad\lim_{t\to t_0}b_y(t),\ \lim_{t\to t_0}b_z(t)\}\\&=\lim_{t\to t_0}\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}\cdot\lim_{t\to t_0}\{b_x(t),\\&\quad b_y(t),\ b_z(t)\}\\&=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)。\end{aligned}$$

三、矢性函数连续的定义

定义1.3 设矢函数$\boldsymbol{a}(t)$在$(t_1,\ t_2)$中有定义，又$t_1<t_0<t_2$，若

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}(t_0)$$

则称矢函数$\boldsymbol{a}(t)$在t_0**连续**。

不难看出：矢函数$\boldsymbol{a}(t)$在t_0连续的**充要条件**是它的分量$a_x(t)$、$a_y(t)$、$a_z(t)$都在t_0连续。

在(t_1, t_2)上每一点都连续的矢函数$\boldsymbol{a}(t)$，称为在该区间上是连续的。由上面的充要条件可知：一矢性函数在某一区间上是否连续的问题，可以转化为讨论它的三个分量（数性函数）在该区间上是否连续的问题。

今后所遇到的矢函数，我们假定都是连续的。

§1.3 矢函数的导数与微分

下面，我们来建立矢函数的导数与微分的概念，以及求导数和求微分的运算法则。这些概念和运算法则跟数性函数中对应的概念和运算法则并无区别。

一、导数的定义

定义1.4 设矢函数$\boldsymbol{a}(t)$在(t_1, t_2)上连续，并设t_0和$t_0+\Delta t$都在这区间内。如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称矢函数$\boldsymbol{a}(t)$在t_0是**可导**的，这个极限值称为$\boldsymbol{a}(t)$，在t_0的**导数**，用$\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{t0}$或$\boldsymbol{a}'(t_0)$表示，即

$$\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{t0}=\boldsymbol{a}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{a_x(t+\Delta t)-a_x(t)}{\Delta t},\ \frac{a_y(t+\Delta t)-a_y(t)}{\Delta t},\right.\\&\qquad\left.\frac{a_z(t+\Delta t)-a_z(t)}{\Delta t}\right\}\end{aligned}$$

$$=\left\{\frac{da_x}{dt},\quad \frac{da_y}{dt},\quad \frac{da_z}{dt}\right\} \tag{1.3.1}$$

故知一矢函数的导数可通过它的三个分量的导数表示出来。

特别地，对于矢径函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$，我们有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left\{\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}\right\} \tag{1.3.1$'$}$$

由式（1.3.1）可知：导数$\boldsymbol{a}'(t_0)$仍然是一个矢量，故又常称$\boldsymbol{a}'(t_0)$为$\boldsymbol{a}(t)$在t_0的**导数矢量**，或简称为**导矢**。

跟数性函数一样，若$\boldsymbol{a}(t)$对于区间$(t_1,\ t_2)$内每个值t都是可导的，则称它在该区间上是可导的，而$\boldsymbol{a}'(t)$称为$\boldsymbol{a}(t)$的**导函数**。导函数的导数如若存在，记为$\boldsymbol{a}''(t)$，它就叫做$\boldsymbol{a}(t)$的二阶导函数。如此类推，可知$\boldsymbol{a}(t)$的n阶导函数的涵义。

〔**例 1**〕 设$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ ct\}$，其中$a$和$c$都是常数，求$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$和$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$。

解
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left\{\frac{d(a\cos t)}{dt},\quad \frac{d(a\sin t)}{dt},\quad \frac{d(ct)}{dt}\right\}$$
$$=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ c\}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\left\{\frac{d(-a\sin t)}{dt},\quad \frac{d(a\cos t)}{dt},\quad \frac{dc}{dt}\right\}$$
$$=\{-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0\}$$
$$=-a\{\cos t,\ \sin t,\ 0\}$$

二、导矢的几何意义

由假设矢函数$\boldsymbol{a}(t)$在区间$(t_1,\ t_2)$上连续，可知对于该区间内每一个t值有一个确定的矢量$\boldsymbol{a}(t)$。现将它们的始点放到一起，于是当t从t_1变到t_2时，其终点就描绘出一条有向的连续曲线l（图 1-2）。设M_0是曲线上对应于参数值t_0的一点，M是曲线上对应于$t_0+\Delta t$的一点，于是

$\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)$为弦$\overline{M_0M}$上的一个矢量，用$\Delta t$除两端所得矢量

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$$

仍然位于弦$\overrightarrow{M_0M}$上，且指向曲线 l 的正向那一方。令$\Delta t\to 0$ 取极限，这矢量以曲线 l 在点M_0的切线为其极限位置，且指向曲线上对应于参数值 t 增加的一方，即曲线正向的那一方。因此，我们得到：导矢$\boldsymbol{a}'(t_0)$ 位于曲线 l 在点M_0处的切线上，且指向曲线的正向那一方，其中M_0是 l 上对应于t_0的点（图 1-2)。

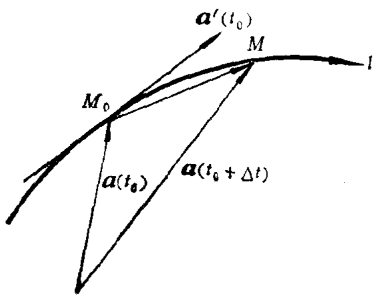


图 1-2

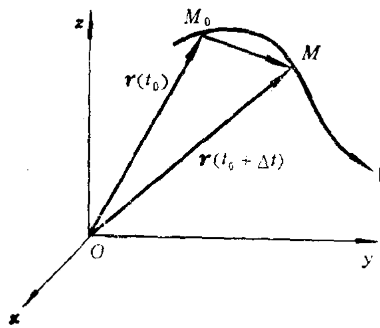


图 1-3

三、$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的物理意义

设质点沿着曲线 l：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 运动，在时刻 $t=t_0$时，它位于点M_0处，而在$t_0+\Delta t$时，它位于点M处（图 1-3)。于是

$$\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$$

表示质点在Δt时间内的位移，而

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

表示在这时间间隔内质点位移的平均速度。令$\Delta t\to 0$ 而取极限，所得极限值$\boldsymbol{r}'(t_0)$ 就表示质点在点M_0处的速度，或者说表示质点在t_0时刻的速度。

容易看出：矢径函数$\boldsymbol{r}(t)$ 对时间 t 的二阶导数$\boldsymbol{r}''(t)$表示加速度。

四、微分的定义

跟数性函数一样，矢函数的微分定义如下：

$$d\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}'(t)dt$$

矢函数的微分也可通过它的三个分量的微分表示出来。由式(1.3.1)，显然有

$$d\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}'(t)dt=\{da_x, da_y, da_z\} \tag{1.3.2}$$

特别地，对于矢径函数$\boldsymbol{r}(t)$〔今后，除有特别声明者外，我们总以$\boldsymbol{r}$表示矢径，用r表示它的模，即$r=|\boldsymbol{r}|$〕有

$$d\boldsymbol{r}=\{dx, dy, dz\} \tag{1.3.2$'$}$$

显然，矢函数的微分$d\boldsymbol{a}$仍然是一个矢量。

〔例 2〕 设$\boldsymbol{r}=a\{t-\sin t, \cos t\}$，求$d\boldsymbol{r}$，$|d\boldsymbol{r}|$

解

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r}&=a\{d(t-\sin t), d\cos t\}\\ &=a\{(1-\cos t)dt, -\sin t dt\}\\ &=a\{1-\cos t, -\sin t\}dt \\ |d\boldsymbol{r}|&=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt\\ &=\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}\,dt \end{aligned}$$

五、运算法则

若$\varphi(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{a}_1(t)$、$\boldsymbol{a}_2(t)$都可导，则不难验证，下列微分法则成立。

$$[\boldsymbol{a}_1(t)+\boldsymbol{a}_2(t)]'=\boldsymbol{a}_1'(t)+\boldsymbol{a}_2'(t) \tag{1.3.3}$$

$$[\varphi(t)\boldsymbol{a}(t)]'=\varphi'(t)\boldsymbol{a}(t)+\varphi(t)\boldsymbol{a}'(t) \tag{1.3.4}$$

$$[\boldsymbol{a}_1(t)\cdot\boldsymbol{a}_2(t)]'=\boldsymbol{a}_1'(t)\cdot\boldsymbol{a}_2(t)+\boldsymbol{a}_1(t)\cdot\boldsymbol{a}_2'(t) \tag{1.3.5}$$

$$[\boldsymbol{a}_1(t)\times\boldsymbol{a}_2(t)]'=\boldsymbol{a}_1'(t)\times\boldsymbol{a}_2(t)+\boldsymbol{a}_1(t)\times\boldsymbol{a}_2'(t) \tag{1.3.6}$$

我们来验证式(1.3.4)。

因为$\varphi(t)\boldsymbol{a}(t)=\{\varphi(t)a_x(t), \varphi(t)a_y(t), \varphi(t)a_z(t)\}$，故由式(1.3.1)有

$$\begin{aligned}[\varphi(t)\boldsymbol{a}(t)]'=\{&\varphi'(t)a_x(t)+\varphi(t)a'_x(t),\\ &\varphi'(t)a_y(t)+\varphi(t)a'_y(t),\end{aligned}$$