数理逻辑入门

知识出版社

数理逻辑入门

李锡胤 编译

知识出版社

内 容 提 要

本书第一部分论述命题逻辑和谓词逻辑。文中介绍了目前颇受逻辑学界重视的波兰学派体系。第二部分是美国《哲学百科全书·现代逻辑》条的译文，作为本书附录，它反映了美国现代初等逻辑的一些成果，在美国哲学社会科学界很有影响。第一部分的手稿承黑龙江大学数学系许心正同志提供宝贵意见，全书并经中国人民大学哲学系黄顺基副教授校订。

两部分都先用非公理化方法把基本概念交代清楚，然后讨论公理系统，便于读者理解。

本书可供大学文科学生及中等文化程度的读者阅读。

数理逻辑入门

李锡胤 编译

知 识 出 版 社 出 版

（北京安定门外 外馆东街甲1号）

新华书店北京发行所发行 张家口地区印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 51/字数10千字,

1984年5月第1版 1984年5月第1次印刷

书号：2214·6 定价：0.43元

目　　录

命题逻辑和谓词逻辑

二、谓词逻辑

附录：〔美〕《哲学百科全书·现代逻辑》

命题逻辑和谓词逻辑

一、命题逻辑

§1 逻辑研究什么？

人们知识的获得和加深不外通过以下几种途径：

（1）观察和实验；

（2）利用看书或听讲等方式学习别人的经验；

（3）在原有知识的基础上，进行推理，得出新知识。

逻辑学研究这第三种途径如何正确实现。也就是说：如何在原有正确知识的基础上，通过正确的推理，得出正确的新知识？在逻辑学中，原有知识叫做**前提**，由它推演出来的新知识叫做**结论**。

观察和实验也好，看书和听讲也好，首先注意的是事实的内容。例如，我们用炭极来电解淡食盐溶液，可以在负极得出氢，在正极得出氧。在日常直觉推理的时候，我们也多注意从什么前提得出什么结论，例如看见乌云就断定要下雨。逻辑学却把这些内容都推给各门具体科学（如化学、气象学等）去研究；它不研究前提和结论的内容本身，而只研究从前提到结论的**推理形式**，或称**推理规则**。

有名的三段论式就是一种推理的形式，这种推理形式远在古希腊哲学家亚里斯多德的著作中就有了系统的阐述。但是现代逻辑只是到了19世纪末和20世纪，经过弗雷格、希耳伯特、罗素等人的努力，才得以创立。现代逻辑广泛地采

用数学方法来研究推理形式，而且其研究成果又广泛地被应用于数学领域，因此又叫做**数理逻辑**。

§2 逻辑与自然语言

推理过程是一种思维活动。人类的思维活动主要是和自然语言密切联系在一起的。然而，自然语言往往不够明确，表现在：

（1）一词多义（这里只说具有联结作用的词的多义现象，且不提表示个体的词的多义现象）：

玫瑰**是**红色的。（属性）

上海市**是**比哈尔滨市大。（比较）

史记的作者**是**历史学家。（归类）

史记的作者**是**司马迁。（同一）

（2）被联结的方面往往不够清楚：

我和三个哥哥打桥牌。（我|和…打桥牌|三个哥哥）

我和三个哥哥下象棋。（我|和…下象棋|大哥；我|和…下象棋|二哥；我|和…下象棋|三哥）

沈阳在天津和哈尔滨之间。（沈阳|在…和…之间|天津，哈尔滨）

天津在沈阳和哈尔滨之南。（天津|在…之南|沈阳；天津|在…之南|哈尔滨）

（3）数个命题复合成一个命题：

张三不听母亲的话。（张三|不听…的话；…|是张三的母亲）

和自然语言相对，形式化的逻辑表达要求**明显**和**精确**。所谓“明显”就是不容许把逻辑关系隐蔽起来，所谓“精

确”就是不容许含糊其辞、模棱两可。

§3 命题

思维活动的基本单位是和语言中句子相当的一个“思想”，例如：

（1）今天是个好天气。

（2）嘿，多好的天气！

（3）外边冷吗？

逻辑所注意的只是与（1）类句子（语法上叫做陈述句）相应的“思想”，并且把它们叫做**命题**，用 p，q，r，s…等表示。

命题和句子相应，但不完全相同，试看下表：

	句子	命题
性质	语言结构单位	思维结构单位
构成	主语、谓语、宾语、定语…	个体词、谓词
范围	（1）、（2）、（3）类句子	与（1）类句子相应

还有一个最重要的区别是：句子报导事实内容；而命题不注意事实内容，它只具有**真**或**假**两种意义。研究这类命题的逻辑也叫**二值逻辑**（多值逻辑不在本书讨论范围之内）。

命题逻辑不分析简单命题的结构，它只讨论：

如何把几个简单命题联接成复合命题？

如何从一个命题推演出另一个命题而真假值不变？等等。

§4 联接符号

语言的基本句子是单句，两个或更多的单句可以用连接

词连接起来，成为复句。逻辑的单命题由一个或几个名词和一个谓词构成，两个或更多的单命题可以用联接号连接起来，成为复合命题。

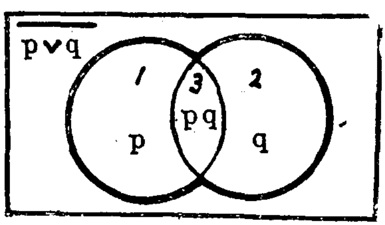
语言的连接词有："…和…"，"…或（者）…"，"如果…，则…"，"虽然…，但是…"，"当…的时候，…"，"在…场合下，…"，"因为…，所以…"等等。

逻辑的联接号却大有限制。正如上面说过那样，逻辑命题只能，也必须在真、假两值中取一值。单命题如此，复合命题也如此。单命题的**值**（也叫**真值**；即或为真，或为假）可以是任意赋予的。复合命题的值完全取决于各单命题的值以及各单命题之间的联接号的意义。换句话说：复合命题的值是处于联接号空位上的各单命题的值的函项。正因为如此，逻辑联接号必须保证：由它联接而成的复合命题的真值完全取决于它所连接的几个单命题的真值。这种联接号也叫**真值联接号**。

逻辑中基本的真值联接号有：

$\vee$——析取号。它的意义是：复合命题 $p\vee q$ 为真，如果 p 为真，或者 q 为真，或者 p 和 q 都为真；复合命题 $p\vee q$ 为假，如果 p 和 q 都为假。

可以用图表示（这种图叫做维因图）：

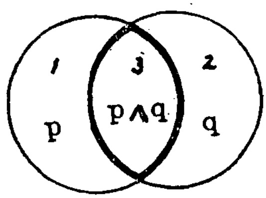


这连环形所包含的区域就是 $p\vee q$，其中1表示 p 为真，2表示 q 为真，3表示 p 与 q 都真；而连环形外边的区域就是 $\overline{p\vee q}$，即既非

p，又非 q。

$\wedge$——合取号。它的意义是：复合命题 $p\wedge q$ 为真，如果 p 和 q 都真；复合命题 $p\wedge q$ 为假，如果 p 为假，或者 q 为假，或者 p 和 q 都假。

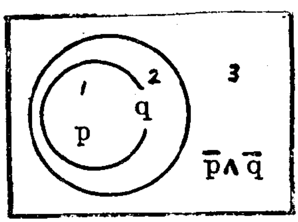
用图表示：



中间第 3 个区域就表示 $p\wedge q$。

$\rightarrow$——蕴涵号。它的意义是：复合命题 $p\rightarrow q$ 为真，如果 p 和 q 都真，或者 p 和 q 都假，或者 p 为假而 q 为真；$p\rightarrow q$ 为假，如果 p 真而 q 假。

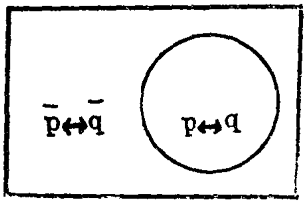
用图表示：



这里区域 1 代表 p 真，q 亦真；区域 2 代表 q 真 p 假；区域 3 代表 p 假 q 亦假。从图可看出：如果 p 真，则 q 一定亦真（区域 1）；如果 p 假，则 q 可以真（区域 2），也可以假（区域 3）。另一方面，如果 q 真，则 p 可以真（区域 1），也可以假（区域 2）；如果 q 假，则 p 一定假（区域 3）。

$\longleftrightarrow$——等值号。它的意义是：复合命题 $p\longleftrightarrow q$ 为真，如果 p 和 q 都真，或者 p 和 q 都假；$p\longleftrightarrow q$ 为假，如果 p 真而 q 假，或者 q 真而 p 假。

用图表示：



这里要注意等值号（←→）与一般等号（=）之间的区别。一般的等号表示左件与右件实质上相同，而等值号表示左件与右件的真假值相等。举例说：

$$2\times2=4$$

表示左件和右件实质上是同一个数。

茅盾 = 《子夜》的作者

表示左件和右件实质上是同一个人。

但是：

我起床 $\xrightarrow{\text{(则)}}$ 时间是早上六点钟

早上六点钟 $\xrightarrow{\text{(则)}}$ 我起床

我起床 $\xleftrightarrow{\text{(当且仅当)}}$ 时间是早上六点钟

可以明显看出：结论中的"当且仅当"（←→）表示左件和右件互为充要条件，而并不是说两者实质上相等同。

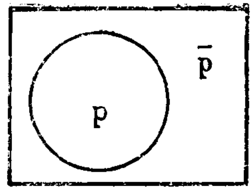
用等值号来表示上述第二个例子，就是：

x 是茅盾←→x 是《子夜》的作者

左件和右件或者同为真，或者同为假。某人不可能同时是茅盾而不是《子夜》的作者，也不可能相反。

一——否定号。它与其它联接号不同之处在于它的作用不是把两个命题连接成一个复合命题。它与其他联接号相同之处在于它加到某命题（单命题或复合命题）之上便得出一个新命题。它的意义是：$\bar{p}$ 为真，则 p 为假；p 为真，则 $\bar{p}$ 为假。

用图表示：



p 和 $\bar{p}$ 没有共同的区域，它们不可能同时共真或共假。

以上列举五种逻辑联接号，它们的联接能力强弱不一样。正如数学运算时，我们遵守先乘除后加减的次序。逻辑命题中如果五个联接号同时出现，我们先取否定号的值，然后取合取号的值，然后取析取号的值，然后取蕴涵号的值，最后取等值号的值。如果复合命题中出现括号，则先取括号内复合命题的值；解括号的次序也和数学中一样，先内后外。

这五种联接号（否定号外情况特殊），彼此之间可以互相定义，例如：

$$p \vee q \underset{def}{=} \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$$

$$p \wedge q \underset{def}{=} \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$$

$$p \rightarrow q \underset{def}{=} \bar{p} \vee q$$

$$p \longleftrightarrow q \underset{def}{=} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\bar{\bar{p}} \underset{def}{=} p$$

因此，严格说来，逻辑推演中不必运用五种联接号。一般认为只要有否定号和蕴涵号两者，便足能推演出各种命题关系来了。例如

$p \vee q$　可改写为　$\bar{p} \rightarrow q$

$p \wedge q$ 可改写为 $\overline{\overline{p} \to \overline{q}}$

$p \longleftrightarrow q$ 可改写为 $\overline{(p \to q) \to \overline{(q \to p)}}$

但为方便起见，本书中五个联接号都用，其中∨，∧和←→，实际上是作为简略号出现的。

必须注意，逻辑联接号具有两类意义：一类是**结构意义**，是由逻辑系统所决定的；另一类是**语义意义**，是逻辑系统投射于某个客体域之上而赋予的，也就是说：是逻辑系统经过**解释**而取得的。前面讲的五种联接号的意义，都是它们的结构意义。

从前面叙述不难看出：逻辑联接号的意义与语言中连接词的意义不完全相同。前者决定于逻辑系统，后者决定于语言系统。所以虽然习惯上把"∨"译作"或"，"∧"译作"与"，"→"译作"如果…，则…"，"－"译作"非"——而这译法也是有道理的，但我们尽量避免语言学名称和逻辑名称的混乱，使读者习惯于从联接号的结构功能去把握它们的（结构）意义。

这些联接号在数理逻辑文献中各家的写法很不一致，下表作一对照，以便读者阅读资料时触类旁通：

	希耳伯特	罗素-怀德海	波兰文献	其　他
析取号	$p \vee q$	$p \vee q$	A_{pq}	$p \cup q$
合取号	$p \& q$	$p \cdot q$	K_{pq}	$p \wedge q, p \urcorner q$
蕴涵号	$p \to q$	$p \supset q$	C_{pq}	$p \to q$
等值号	$p \sim q$	$p \equiv q$	E_{pq}	$p \longleftrightarrow q$
否定号	$\overline{p}$	$\sim p$	N_p	$\neg p$

§5　命题符号

说明了联结号的（结构）意义之后，我们再来讨论命题符号。我们用 $p, q, r, s \cdots$ 等代表任何一个命题。两值逻辑中，它们只能取真值或者假值，这也是命题符号的结构意义。至于它们的语义意义，要等经过解释之后才能确定。

在逻辑表达式中，出现在不同位置上的相同字母代表同一个命题（实际上就是代表相同的真假值）；而不相同的字母可以代表不同的命题，也可以代表相同命题在不同位置上的复现（实际上就是说：不同的字母可以代表互不相同的真假值，也可以代表相同的真假值）。带否定号的字母 $\overline{p}$，则只能代表与 p 相区别的命题，绝不能代表 p 命题（实际上，$\overline{p}$ 的取值必须与 p 的取值相反）。

字母 $p, q, r, s \cdots$ 等可以代表单命题，也可代表复合命题。假如我们拿 p 和 q 代表单命题，则 $p \vee q$，$p \wedge q$，$p \rightarrow q$，$p \longleftrightarrow q$ 等都是复合命题。再设 r 和 s 代表复合命题，则 $r \vee s$，$r \wedge s$ 等又是复合命题。如此类推开去，可以产生无限多的命题。而这无限多的命题都只能取值为真或为假，而且高一级的复合命题的取值完全决定于低一级复合命题的值，最后决定于单命题的值。

§6　真值表

如果有一个复合命题 $p \vee q$ 是由两个不同的单命题 p 和 q 构成的，那末这个复合命题的值完全取决于 p 的取值和 q 的取值。我们知道，在两值逻辑中 p 可真可假，q 也可真可假，因此 p 和 q 联接在一起，共有四种取值可能，即：

（1）p 真，q 真，

（2）p 真，q 假，

（3）p 假，q 真，

（4）p 假，q 假。

而且，根据组合理论，两个两值元素就有 $2^2=4$ 种组合可能，三个两值元素就有 $2^3=8$ 种组合可能…。n 个两值元素就有 2^n 种组合可能。

现在我们根据上述四种可能，可以分别得出 p∨q 的四种值，即：

① 1∨1　得值 1，

② 1∨0　得值 1，

③ 0∨1　得值 1，

④ 0∨0　得值 0。

（这里 1 代表取值为真，0 代表取值为假。）

通过其他联接号构成的复合命题，也可以用同样方法求出全部的取值可能。下面我们把五种联接号的情况列成总表，叫做真值表：

p		p∨q	p∧q	p→q	p←→q	$\overline{p}$	$\overline{q}$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1

遇到更复杂的合命题，如 $(p\vee q)\overline{\wedge}q\to p$ 等，我们可以利用同样的方法，先穷尽地列出 p 和 q 的取值可能，然后按照联接号强弱的次序（见 §4），逐步取得各层复合命题的值，

直到最后得出整个复合命题的值。

§7 永真命题和永假命题

我们举三个例子，利用真值表求出复合命题的取值可能。我们把各个层级上复合命题的取值情况写在同一层级的联接号的下面（因为每一层级上的任何复命题，有一个也只能有一个联接号）。

例 1：$(p\vee q)\wedge(\bar{q}\vee p)$

利用真值表，先求第一层级上 $p\vee q$ 和 $\bar{q}\vee p$ 两个复合命题的取值可能：

p	q	$p\vee q$	$\bar{q}\vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

再求第二层级上 $(p\vee q)\wedge(\bar{q}\vee p)$ 这个复合命题的取值可能：

$p\vee q$	$\bar{q}\vee p$	$(p\vee q)\wedge(\bar{q}\vee p)$
1	1	1
1	1	1
1	0	0
0	1	0

为简便计，第一例的两步手续可以在一张表上反映出来：

(p	∨	q)	∧	($\bar{p}$	∨	p)
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0

（最后一行里，＿表示第一层次，＝表示第二层次。）

从第一例的真值表可以看出：p 和 q 的前两种取值法使整个复命题的值为真；p 和 q 的后两种取值法使整个复合命题的值为假。这种复合命题叫做**可真命题**。

例 2：$(p\vee q)\wedge\bar{q}\rightarrow p$

作成真值表如下：

(p	∨	q)	∧	$\bar{q}$	→	p
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0

第二例不论基本单命题取何值，整个复合命题的值永远为真。这类命题叫做**永真命题**，永真命题在逻辑证明中有重要作用。

例 3：$p\vee\bar{p}\rightarrow q\wedge\bar{q}$

作成真值表如下：