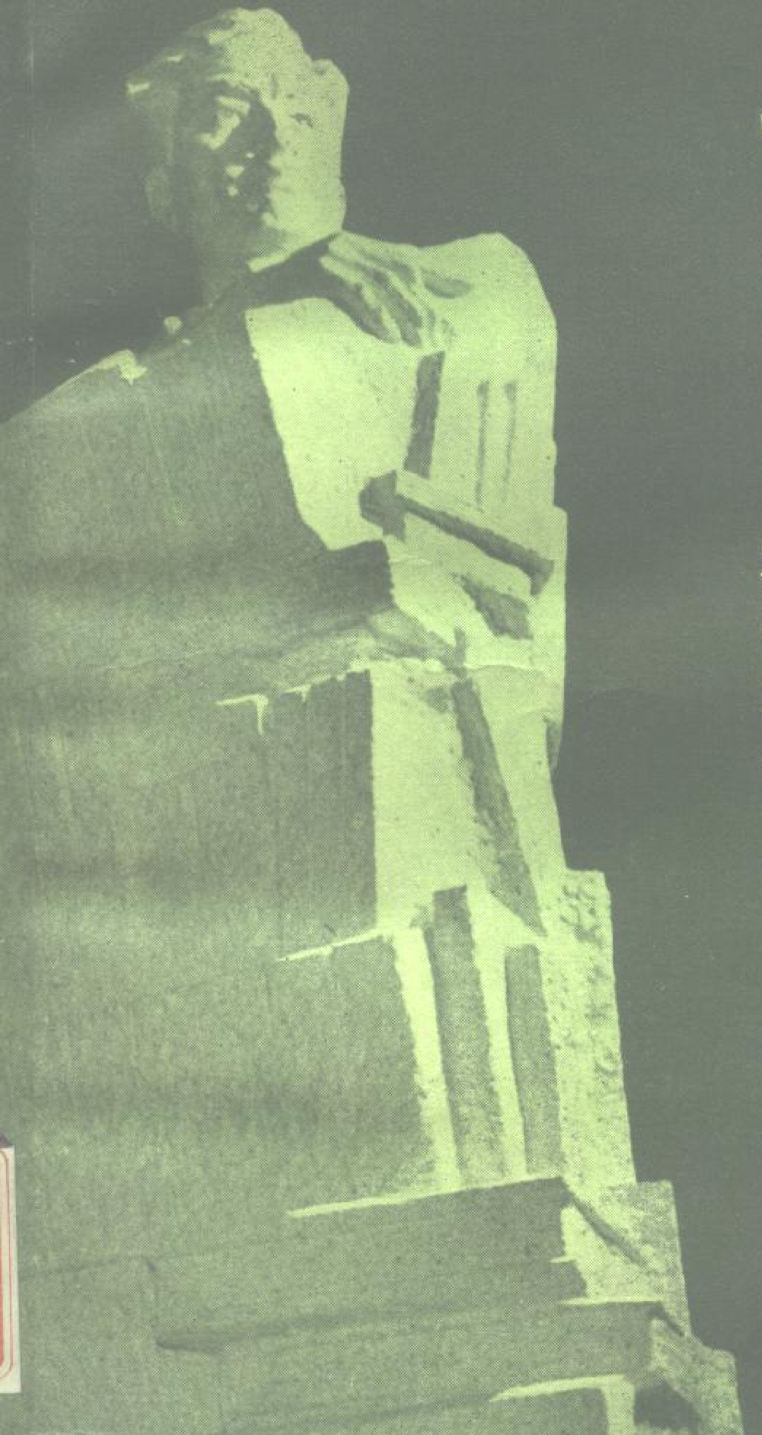
大学基础数学自学丛书

一元函数积分学



文丽

大学基础数学自学丛书

一元函数积分学

文　丽

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

一元函数积分学

文　丽

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　江西印刷公司印刷

开本787×1092 1/32　印张11　字数244,000

1980年7月第1版　1981年5月第2次印刷

印数：45,001—145,000

书号：13119·831　定价：（科四）1.05元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期新长征的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

本书包括不定积分与定积分两部分．不定积分是作为导数（或微商）的反问题引进的，它所讨论的是积分学的第一个基本问题．定积分是作为某种和式的极限引进的，它所讨论的是积分学的第二个基本问题．全书共分五章，第一、二章讲不定积分，第三、四章讲定积分，第五章讲定积分的一种推广——广义积分．

为了便于自学，本书选编了较多的例题与习题，书末附有答案或提示．初学者不一定全看、全做，可根据自己的情况，选学、选做其中的一部分．

本书力求既能由浅入深、通俗易懂，又有一定的严密性．但因编者水平有限，加以时间仓促，书中问题很多．希望广大读者随时提出宝贵意见．

在本书的编写过程中，曾得到北京大学地球物理系邓国祥同志，数学系方企勤、吴良大、王卫华等同志的支持和帮助，最后又由北京师范大学数学系赵慈庚教授审阅了全稿，在此表示衷心的感谢．

文丽

于北京大学数学系

1979年3月

目　　录

第四章　定积分的应用

第五章　广义积分

第一章

不定积分的概念与计算法则

第一节 原函数与不定积分的概念

1.1 原函数

微分学的基本问题是已知一个函数，要求它的变化率，这就是求导数的问题. 例如，已知作直线运动的质点的运动规律(即路程对时间的依赖关系)为

$$s=s(t),$$

要求质点在时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，就是这样一个问题. 我们只需将函数 $s=s(t)$ 对 t 求导数就可以了：

$$v(t)=s'(t)=\frac{ds}{dt}.$$

但是，在许多学科(例如力学、物理学、几何学等)以及各种实际问题里，往往遇到与此相反的问题：已知一个函数的变化率，要求原来的函数. 例如，已知作直线运动的质点在任一时刻 t 的瞬时速度 $v=v(t)$，要求质点的运动规律 $s=s(t)$. 在数学上，这种已知一个函数的导数，要求原来的函数(我们称它为原函数)的问题，就是积分学的第一个基本问题.

下面，我们给出原函数的定义.

定义 设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义. 如果对于 (a, b) 内任一点 x，都有

$$F'(x)=f(x),$$

或

$$dF(x)=f(x)dx,$$

那么，就称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的一个原函数．

【例 1】 设 $f(x)=3x^2$，则 $F(x)=x^3$ 是它的一个原函数．事实上，我们有

$$(x^3)'=3x^2.$$

【例 2】 设 $f(x)=\cos x$，则 $F(x)=\sin x$ 是它的一个原函数．

【例 3】 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，则 $F(x)=\arcsin x$ 是它的一个原函数．

思考题 $\arcsin x+3$，$\arcsin x-5$，$\arcsin x+\sqrt{2}$，$\arcsin x-2\ln\frac{\pi}{3}$ 等，是不是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的原函数？

1.2 不定积分

由于常数的导数是零，因此当 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数时，$F(x)+C$（C 是任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数．这就是说，如果 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$，那么，它就有无穷多个原函数：$F(x)+C$．

大家会问：这无穷多个原函数 $F(x)+C$ 是否包括了 $f(x)$ 的全体原函数呢？换句话说，$f(x)$ 的任何一个原函数是否都能表示成 $F(x)+C$ 的形式呢？回答是肯定的．我们有

定理 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$（C 是任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数，并且 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数．

【证】 第一个结论是明显的：

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=F'(x)+0=f(x).$$

下面证明第二个结论，即 $f(x)$ 的任何一个原函数 $G(x)$，

都可以用 $F(x)$ 加上一个常数来表示.

因为 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$,

所以 $[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$

由微分学中值定理,知

$$G(x)-F(x)=C \quad (C \text{ 是常数}),$$

即

$$G(x)=F(x)+C.$$

于是证明了 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数. ▌

定理告诉我们:同一函数的任何两个原函数之间最多相差一个常数.

为了以后讨论方便,我们引进如下的定义.

定义 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$(C 是任意常数)称为 $f(x)$ 的*不定积分*,记作

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

其中 $f(x)$ 称为*被积函数*,$f(x)dx$ 称为*被积表达式*,x 称为*积分变量*,C 称为*积分常数*,符号 $\int$ 称为*积分号*.

积分号 $\int$ 是一种运算符号,表示对已给函数求它的全体原函数.例如:

$$\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C,$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C.$$

我们看到,求原函数(或不定积分)与求导数是两种互逆的运算,这种互逆关系可以从下面几个式子很清楚地看出来:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]'=f(x), \quad 或 \quad d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx. \qquad (1)$$

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C, \quad 或 \quad \int dF(x)=F(x)+C. \qquad (2)$$

这就是说,对一个函数先积分再微分,结果是两者的作用互相抵消;若先微分再积分,则结果只差一常数.

求已给函数的原函数(或不定积分)的方法称为**积分法**.

1.3 不定积分的几何意义

在直角坐标系 xOy 中, $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**,其方程是 $y=F(x)$.

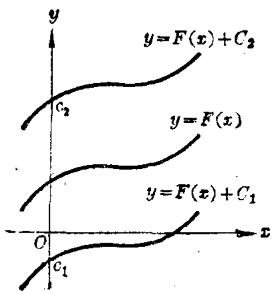


图 1-1

由上面的讨论知道:若 $f(x)$ 有一条积分曲线 $y=F(x)$, 则有无穷多条积分曲线,它们的方程是

$$y=F(x)+C.$$

这些积分曲线称为 $f(x)$ 的**积分曲线族**.

积分曲线族中的任何一条曲线都可以由 $y=F(x)$ 沿 Oy 轴平移一段 C 得到(图 1-1). 因此,所有积分曲线是彼此平行的. 这就是说,在横坐标相同(例如是 x)的点处,所有积分曲线的切线彼此平行,这些切线有相同的斜率,都是 $f(x)$:

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

因此,我们可以说:不定积分 $\int f(x)\,dx$ 在几何上表示 $f(x)$ 的积分曲线族

$$y=\int f(x)\,dx,$$

这族曲线的特点是在横坐标相同的点处，它们的切线有相同的斜率 $f(x)$，因而是彼此平行的.

如果要求一条通过定点 (x_0, y_0) 的积分曲线，那么，可以通过下式

$$y_0=F(x_0)+C,$$

解出常数

$$C=y_0-F(x_0),$$

这样就得到了所求的积分曲线

$$y=F(x)+[y_0-F(x_0)].$$

确定任意常数的条件称为初始条件，可写作

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,$$

或

$$y(x_0)=y_0.$$

【例 4】 在切线斜率为 $3x^2$ 的积分曲线族中，求一条通过定点 $(-1, 2)$ 的积分曲线.

解：设所求曲线为 $y=y(x)$. 已知

$$y'=3x^2,$$

因此，有

$$y=x^3+C.$$

为了确定出常数 C，我们将初始条件

$$y\big|_{x=-1}=2$$

代入，于是有

$$2=(-1)^3+C,$$

解出

$$C=3.$$

从而，所求的曲线(图 1-2)为

$$y=x^3+3.$$

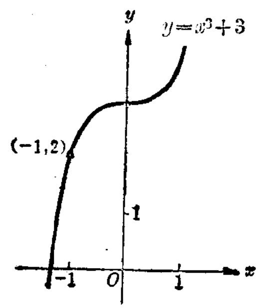


图 1-2

最后，我们提一个问题：什么样的函数才有原函数呢？也就是说，$f(x)$ 应具备什么条件，才能保证它的原函数一定存在呢？ 这个问题现在暂时还不能解决，我们到第三章第三

节再去讨论它．目前所讨论的函数，都假定它是有原函数的．换句话说，第一、二章主要讨论函数的积分法，暂不涉及原函数的存在问题．

习 题 一

1．求下列不定积分：

(1) $\int \sin x\,dx$;　　(2) $\int e^x dx$;

(3) $\int x^4 dx$;　　(4) $\int \sqrt{x}\,dx$;

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$;　　(6) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$;

(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$;　　(8) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

2．在积分曲线族 $y=\int 2x\,dx$ 中，求一条通过点$(0,\ -1)$的曲线，并画出它的图象．

第二节　不定积分的计算

为了有效地计算不定积分，必须掌握一张基本积分表和几个运算法则．这正象计算导数时，必须掌握基本导数表和“加、减、乘、除、复合”五个运算法则一样．我们将会看到，由于积分法是微分法的逆运算，因此这一节的内容，刚好是微分法中相应内容的逆转．也就是说，把过去的微分公式逆过来，就能得到许多积分公式；把过去的一些微分法则逆过来，就得到相应的积分法则．

2.1　基本积分表

(1) $\int 0\,dx=C$.

(2) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (\alpha = -1).$

(4) $\int e^x dx = e^x + C.$

(5) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C.$

(6) $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

(7) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C.$

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x \, dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

(11) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

为了证明这些积分公式，只须证明右端的导数等于左端的被积函数．我们以公式(3)为例．

【证】 当 $x>0$ 时，

$$[\ln|x|]' = [\ln x]' = \frac{1}{x};$$

当 $x<0$ 时，

$$[\ln|x|]' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

因此，不论 $x>0$ 或 $x<0$，都有

$$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}.$$

由不定积分的定义，知

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C. \quad \rbrack$$

说明

① 幂函数 x^α 的不定积分由公式(2)，(3)共同给出：当 $\alpha\neq-1$ 时，用公式(2)；当 $\alpha=-1$ 时，用公式(3)．即

$$\int x^\alpha dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, & 当\ \alpha\neq-1;\\ \ln|x|+C, & 当\ \alpha=-1.\end{cases}$$

② 公式(2)的几个特殊情形，今后常用，有必要单独记忆：

当 $\alpha=0$ 时，有 $\int 1\,dx=x+C$，

当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时，有 $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$，

当 $\alpha=-2$ 时，有 $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$．

2.2 积分法的两个简单法则

微分法有两个简单法则：

(1) $[k\cdot f(x)]'=k\cdot f'(x)$ （k 是常数）．

这就是："常数因子提出来"．

(2) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$．

这就是："一项一项分开微"．

与它们相对应，积分法也有两个简单的法则：

(1) $\int k\cdot f(x)dx=k\int f(x)dx$ （$k\neq0$ 是常数）．

即"常数因子提出来"．

(2) $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)dx.$

即"一项一项分开积"。

【证】 只须证明右端的导数等于左端的被积函数.

(1) $\left[k\int f(x)dx\right]'=k\left[\int f(x)dx\right]'=k\cdot f(x).$

(2) $$\left[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right]'=\left[\int f(x)dx\right]'\pm\left[\int g(x)dx\right]'$$
$$=f(x)\pm g(x).\quad ▌$$

法则(2)很容易推广到任意有限多个函数的代数和的情形:

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]dx$$
$$=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\cdots\pm\int f_n(x)dx.$$

利用基本积分表和两个简单法则，我们就可以求一些稍微复杂的不定积分了.

【例 1】 $$\int 3x^4\,dx=3\int x^4\,dx=3\left(\frac{1}{5}x^5+C_1\right)$$
$$=\frac{3}{5}x^5+3C_1=\frac{3}{5}x^5+C.$$

这里 $C=3C_1$ 是任意常数.

【例 2】 $$\int[e^x-2\cos x+\sqrt{2}x^3]dx$$
$$=\int e^x\,dx-\int 2\cos x\,dx+\int\sqrt{2}x^3\,dx$$
$$=e^x-2\int\cos x\,dx+\sqrt{2}\int x^3\,dx$$
$$=e^x-2\sin x+\frac{\sqrt{2}}{4}x^4+C.$$