

論運動朗布

原著者 飛田武幸
譯著者 蔡聰明



曉園出版社 印行
世界圖書出版公司

論運動朗布

原著者 飛田武幸
譯著者 蔡聰明

國立編譯館 主編
曉園出版社 印行
世界圖書出版公司

70934

92 10 15

布朗运动论

蔡聪明 译著

晓园出版社 印行

世界图书出版公司 北京分公司重印

(北京朝内大街 137 号)

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1982年2月重印 850 × 1168 1/32

1982年2月第1次印刷 印张: 13.5

印数: 0,001—1,000

ISBN-5062-1152. 1/0.11

定价: 9.00 元

世界图书出版公司通过中华版权代理公司

购得重印权限国内发行

08126

中文版序

我的書“ブラウン運動”(Brown運動論)被翻譯成中文，這是我甚感高興的事。有此譯本，我將會得到更多在 Brown 泛函的解析這個領域中工作的朋友。

近年來數學的趨勢與風尚迫使需要對隨機分析學作新的發展；因此希望本書的出版能夠在這方面有拋磚引玉之效。

我很感謝蔡聰明教授的優秀翻譯工作，並且也要謝謝楊維哲教授對此工作的推動與鼓勵。

名古屋，1986年10月

飛田武幸

英 文 版 序

自從本書的日文版發行以來（1975, 岩波）,在這個領域中又有了一些有趣的新發展。作者趁此機會稍作補述,並且對一些尚待研究的問題提出建議,希望因而能夠激發在這個領域中工作的讀者。由於這些理由,我們多加了第八章的材料。

在本版中,作者除了多加一章以及作一些微小的更動之外,其餘都是根據原日文版忠實地翻譯成英文。

J. L. Doob教授給予英文版許多有益的批評,在此我們要特別感謝他。

飛田武幸

T. P. Speed

原 序

Robert Brown (在 1827 年) 觀察到懸浮在溶液中的花粉微粒不斷地作複雜與不規則的運動。經過許多年之後, Brown 運動變成了純數學及應用數學熱烈研究的對象。甚至一直到今天, Brown 運動的許多重要性質還在陸續被發現, 並且無疑地還有新的而有用的層面等待着我們去發掘。今日, 對於 Brown 運動我們已逐漸有了更多且更深刻的了解。

要對 Brown 運動作數學上的研究必須包括下面幾個方面:

1. 將 Brown 運動看作是最基本的一個隨機過程來研究, 這是 Brown 運動的機率層面;
2. 透過 Brown 運動引出函數空間上一個最有趣的 Wiener 測度, 進一步探討這個空間上的分析學;
3. 發展一套工具以便描述在自然環境中出現的隨機事件, 例如生物器官的功能;
4. 對於牽涉到 Brown 運動的隨機現象, 提出從基礎到廣泛應用的理論架構。

作者希望, 本書能夠作為研究這些論題的入門。

專就論題(1)而言, 目前已有許多好書可參看。這些書探討 Brown 運動時, 多半是將它看作 Gauss 過程或 Markov 過程來研究。因此本書不再從這個觀點作詳細解說, 但我們還是作了簡要的討論。關於論題(2), 這是我們最着力的主題, 構成了本書的主要部分。本書與其說是研究作為隨機過程的 Brown 運動本身, 不如說是研究由 Brown 運動引起的分析學要來得恰當。當這套分析學建立起來後, 我們就轉到一些應用上去, 這些應用都牽涉到有關 Brown 運動的非線性泛函 (通常叫做 Brown 泛函)。至於論題(3)與(4), 由於它們近年來的快速與成功的發展, 使得我們無法等待到系統地建立後, 才加以研究。我們僅從這些領域中選出一些問題來討論,

必要時也連帶地解說隱藏在處理過程背後的觀念，在此我們預期這兩個領域的未來將有一個豐碩的收穫。

現在該從 Brown 運動論的簡史說起。我們不預備講種種發展的完備史，而只就特定的觀點粗略勾劃一下 Brown 運動的歷史。我們要追尋理論的起源，並且探討 Brown 運動是如何進入數學領域的。

故事由 1820 年代開始。在 1827 年的六月，七月，八月，Robert Brown (F.R.S) 使用一個簡單的顯微鏡，其中一個鏡片之焦距約為 1 毫米，觀察含在植物花粉中的微小粒子。他看到這些粒子作着高度不規則的運動，今日稱之為“Brown 運動”。他把觀察結果寫出來，發表了 1828 年的報告。後來又經過更進一步的觀察，包括對不同種類的物質的觀察，使他相信他在有機體與無機體中發現了活的分子。據此，許多科學家嘗試解釋這個怪異現象，建立了下面的結論：越細小的粒子運動得越快；運動會受熱的激發而變快；當溶液的黏度減低時，運動會變得更活躍。但是一直要等到上世紀末，人們才明白 Brown 運動的真正原因。事實上，這種不規則運動是由於懸浮在液體中的花粉微粒與溶液的分子經過非常大量的碰撞而產生的。

根據這些顯然是獨立作的觀察與實驗，A. Einstein 在 1905 年首次從理論與定量的角度來處理 Brown 運動。在同一年，Einstein 也發表了著名的狹義相對論及光量子論。

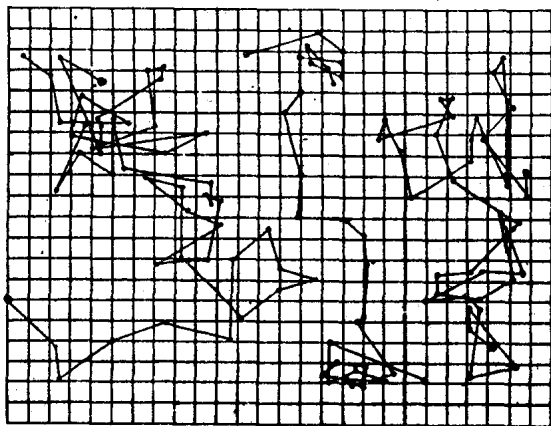


圖 1

讓我們說明一下 Einstein 對 Brown 運動所建立的有趣的數學模型。爲了簡明起見，我們只考慮投影到直線的運動情形。在時刻 t 及 x 點處花粉微粒的密度記爲 $u(x, t)$ ， $x \in \mathbb{R}$ 。換言之， $u(x, t)$ 表示在 t 時刻及 x 點每單位長度花粉微粒的個數。我們要假設運動對時間與空間都具有齊性，故經過時間 τ 後花粉微粒從 x 點運動到 $x + y$ 點的比例，可記爲 $\varphi(\tau, y)$ 。今考慮時間從 t 走到 $t + \tau$ ($\tau > 0$)，就得到下式

$$u(x, t + \tau) dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t) \varphi(\tau, y) dy. \quad (0.1)$$

其中可設 u 與 φ 都是勻滑函數。復次，函數 φ 在空間中對稱於原點，並且具有正比於 τ 的方差：

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \varphi(\tau, y) dy = D\tau, \quad D \text{ 爲常數}$$

當 τ 很小時，對 (0.1) 式作 Taylor 展開，得到

$$\begin{aligned} u(x, t) + \tau u_t(x, t) + o(\tau) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u(x, t) - y u_x(x, t) + \frac{1}{2} y^2 u_{xx}(x, t) - \cdots \right\} \varphi(\tau, y) dy. \end{aligned}$$

由此式及上述的假設，就得到熱傳導方程

$$u_t = \frac{1}{2} D u_{xx}. \quad (0.2)$$

如果微粒的初期狀態爲某一點 y (比如說)，亦即 $u(x, 0) = \delta(x - y)$ ，則由 (0.2) 式解得

$$u(x, t) = (2\pi Dt)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - y)^2}{2Dt} \right]. \quad (0.3)$$

這樣得到的 $u(x, t)$ 事實上就是將 Brown 運動看作是一個 Markov 過程時的遷移機率函數 (參見第 2.4 節)。

我們要指出，公式(0.2)與(0.3)純是由理論推演得到的。同理也可證明常數 D 為

$$D = \frac{RT}{Nf}. \quad (0.4)$$

其中 R 為一普遍常數，只跟懸浮物質有關， T 為絕對溫度， N 為 Avogadro 常數， f 為摩擦係數。值得注意的是，在 1926 年 Jean Perrin 利用 (0.4) 式加上一系列的實驗，相當準確地決定了 Avogadro 常數。這些工作使我們看到理論與實驗之間的美妙平衡。

另外，我們不應忘記，其實在 1900 年左右 L. Bachelier 已經嘗試要去建立 Brown 運動的數學理論。這我們點到為止，不再作任何介紹。

接着介紹 P. Lévy 著名的工作。只要在數學中看到 Brown 運動的名字，Lévy 1948 年的書（1956 年出第二版）就會浮現。然而，我們由 Lévy 更早期有關泛函分析的工作開始說起，這可參考 P. Lévy (1951) 的書。在這本書中，Lévy 把他的工作沿着一些母線貫串起來。這些工作在時間上可追溯到 1910 年。Lévy 早在 1910 年左右，就開始對 Hilbert 空間 $L^2([0, 1])$ 上的泛函作分析工作，由此導致要對一個泛函 $\varphi(x)$ ， $x \in L^2([0, 1])$ ，計算平均值或積分。不幸的是，如衆所週知，在 $L^2([0, 1])$ 上並不存在一個類似於有限維歐氏空間上的 Lebesgue 測度。因此 Lévy 對一個泛函引進了平均值的概念，定義如下：給一個泛函 φ ，我們要計算 φ 在半徑 R 圓心為 0（原點）的球 $S(R)$ 上之平均值。為此，令 $\varphi_n(x^{(n)})$ ， $x^{(n)} \in S_n$ ，表示 φ 局限到 $S(R)$ 的 n 維截形球 S_n ，並且令 m_n 為 φ_n 在 S_n 上的平均值。當 $n \rightarrow \infty$ 時，如果數列 $\{m_n\}$ 收斂到極限 μ ，則自然地就定義 φ 在 $S(R)$ 上的平均值為 μ 。更明確地說，讓我們用一系列階梯函數 $\{x^{(n)}(t)\}$ 在 L^2 意味下逼近 $x(t)$ ，其中 $x^{(n)}(t)$ 在區間 $[k/n, (k+1)/n]$ 上取常數值 x_k ， $0 \leq k \leq n-1$ 。於是原假設“ $x(t)$ 的 L^2 範數小於 R ”引渡為對第 n 個逼近函數要求 $\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq nR^2$ 。如果我們將階梯函數 $x^{(n)}(t)$ 看作是 n 維向量，則這個不等式定義出半徑為 $n^{1/2}R$ 的 n 維球 S_n 。因此 m_n 就等於 $\varphi_n(x^{(n)})$ 對 S_n 上的均勻機率測度取平均值，並且若數列 $\{m_n\}$ 的極限存在的話，極限值就應該解釋成 $\varphi(x)$ 在

$S(R)$ 上的平均值。

下面是取自 P. Lévy (1951) 的簡單例子，可用來說明上述求平均值的步驟，也可用來顯示 Gauss 分佈如何由古典泛函分析中浮現。任取一點 $\tau \in [0, 1]$ 並且固定它，再取 R 上的一個函數 f ，令 $\varphi(x) = f(x(\tau))$ ， $x \in L^2([0, 1])$ ，可看出 $\varphi_n(x^{(n)})$ 只是 $x^{(n)}$ 的一個分量的函數，因此平均值 m_n 就等於 $\varphi_n(x^{(n)})$ 對 S_n 上的均勻機率測度取期望值。由此得知（見第 1.2 節例 3），當 n 很大時，球面上一點的一個坐標會介乎 aR 與 bR 之間的機率約為

$$(2\pi)^{-1/2} \int_a^b \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy. \quad (0.5)$$

如此這般，Gauss 分佈出現了，而泛函的平均值為

$$m = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(Ry) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy. \quad (0.6)$$

這種直觀處理法，對於更廣泛一類本質上是有窮維的泛函，仍然行得通，這使我們認識到，一般平均值就是對白噪聲的測度（第三章介紹）之積分。[這個事實的一個解釋可在 T. Hida 與 H. Nomoto (1964) 的文章中找到]，P. Lévy (1951) 也討論了 Laplace 算子與 Hilbert 空間 $L^2([0, 1])$ 上的調和泛函。有趣的是，無窮維旋轉群（見第五章）的概念，其胚芽也可以在 Lévy 的這本書中找到。

當 Lévy 建立了獨立隨機變數和的理論後，他就開始研究獨立無窮小隨機變數的連續求和問題，得到了加法過程的正準分解。Brown 運動恰好就是具有 Gauss 分佈的加法過程。更精確地說，Brown 運動記為 $\{W(t) : t \geq 0\}$ 或簡記為 $\{W(t)\}$ 就是滿足下面兩個條件的一個隨機過程（見定義 2.1）：

- (a) $W(0) = 0$
- (b) $\{W(t) : t \geq 0\}$ 為 Gauss 過程，並且對任意 t, h ，具有 $t+h > 0$ 時， $W(t+h) - W(t)$ 的期望值為 0，方差為 $|h|$ 。

由這個定義得知， $\{W(t)\}$ 為一個加法過程。

P. Lévy 利用內插法（第 2.3 節，(i) 講述）得到 Brown 運動的一個解析表現式，並且這個方法也變成要洞察 Brown 運動的奧妙和複雜性的一個非常有力工具。從 1930 年代的論文開始到他 1948 年的書，Lévy 對 Brown 運動所作的一系列偉大工作是舉世無匹的。在第二章裡我們要講述他的一部分工作，讀者將會對 Lévy 在機率論中的重要性，獲得一深刻印象。循著 Lévy 的工作，我們將討論作為 Markov 過程的 Brown 運動，其樣本路徑的行為及其更精細的構造，並且簡略解釋一下為什麼我們必須對具有 Brown 運動為根基的一般 Gauss 過程作線性表現。接着，我們很快地看一下多維參數的 Brown 運動，這也是 Lévy 引進的，用來展示其內在的、有趣的機率構造。

作為隨機過程的 Brown 運動之研究以及 Lévy 有關泛函分析的工作，表面上看起來似乎沒有什麼關係，但事實上它們是一體的兩面，這由我們對 Brown 泛函的解析過程中可看出。理由我們粗略的解說於下：Brown 運動 $\{W(t) : t \geq 0\}$ 的任意泛函可看作是 $\{\dot{W}(t) : t \geq 0\}$ 的泛函（其中 $\dot{W}(t) = dW(t)/dt$ ）；並且後者較容易對付。這種泛函正好是一個隨機變數，具有期望值，並且期望值跟上面剛介紹過的〔(0.6) 式之後〕P. Lévy 之平均值一致。同理，我們發現到，對於 $\{W(t) : t \geq 0\}$ 的泛函作其它方面的討論，在 Lévy 的泛函分析中總是可以找到對應。在本書第三章與第四章，我們要對這些作有系統的研究，其中也包括了上述的解說。

現在讓我們回溯到 N. Wiener 出版他的論文“Differential space (1923)”（今日叫做“Wiener 空間”）之時日。Wiener 這篇論文是研究 Brown 運動的一個里程碑，在序言中他承認受到 R. Gâteaux 與 P. Lévy 的工作很大的啟發。Wiener 似乎跟 Lévy 私下打過交道，討論有關無窮維向量空間上的積分，獲致這篇著名論文。因為 Brown 運動幾乎所有的樣本路徑都是連續的，所以 $\{W(t)\}$ 的機率分佈定義在連續函數空間上面。這樣得到的測度空間無他，恰好就是 Wiener 空間。此後由 Wiener（及其它許多人）進一步加以發展，並且應用到更一般的自然科學領域。

Wiener 的偉大工作，在他提出“模控學”（Cybernetics）的觀念時（1948）達於頂點。在他著名的“Cybernetics”一書中，Wiener 加了

一個副標題——“動物和機器的控制與通訊”用以表示交互研究的重要性。

實際上，用這種辦法 Wiener 發現了其它領域中許多有趣的問題。我們要來了解他的想法並且照着去做。事實上，如果我們考察 Wiener 工作的數學層面，會認識到，由於對腦波的研究導致他將他的結果應用到 Brown 運動的非線性泛函上去，甚至導致他討論它們的分析工作。在 Wiener 有關工程與通訊理論的工作上，也可發現類似的作法，其中由於噪聲 (noise) 所產生的擾動，因而導致隨機過程的預測理論之產生。復次，由於討論 Brown 運動的流 (flow)，使他對遍歷論也做出偉大的貢獻。總之，他創始了一支新的數學——無窮維函數空間上的分析學。對這支新數學的進一步研究啓迪了近代分析學的發展。

Wiener 在 1958 年出版的書，包括有演講筆記，其中也討論了“Cybernetics”一書中所引起的理論上之進展，包括 Wiener 空間上的非線性泛函的解析及其應用。我們受到這些書很深刻的影響，從其中我們看到了由實際問題出發以 Brown 運動爲主角所建立起來的機率論，這一美妙的過程。我們要強調的是，這樣得到的理論可以自然地應用到原問題，並且如人們所能期望的，進一步也可應用到新問題上去。這種回饋過程必會一再重覆地發生。

此地再注意一件事情。在 Wiener 的作法中，Fourier 變換扮演一個很重要角色。令人驚奇的是，雖然 Fourier 變換本身跟 Brown 運動具有密切關連，但是這個關連却深藏不露。在本書中我們要隨時隨地加以留意。

總而言之，我們可以說，Brown 運動的數學研究由 Einstein 首開其端，再經過 Lévy 與 Wiener 作高度的發展，一直到今日仍有許多科學家繼續接棒下去。從一開始，Brown 運動論除了跟數學外也跟科學具有很密切的關係。作者相信這些關係將持續到未來。

作爲本書主題的選擇，我們的着眼點主要是拓展 Lévy 與 Wiener 的工作，但是等到完稿後，現在作者才深深感覺到這是多麼難以實現的工作，因而有無能爲力的挫折感。然而，伊藤清 (1951b, 1953a, 及其它著作) 美麗的工作鼓舞了作者，書稿終於完成了。在寫作過程中，我們也注意到了 H. Yoshizawa (1969) 與 Y. Umemura (1965) 的工作，他們引進無窮維旋轉群的概念，並且證明了它在研究白噪聲上的重要性。作者受惠

於這些工作很多。

第六章與第七章專注於白噪聲與旋轉群的複化問題。如果這兩者是“無窮維空間的調性分析”的基本概念，那麼它們的複化就顯得很自然了。

由前述可看出，除了第一章之外，其它每一章都可以說是沿着我們的主線目標寫就的。某些章裡，在未討論一個主題之前就先介紹其動機與一般觀念，這樣做希望對讀者有所助益，另一方面也可顯示出章與章之間的關連。一些不在本書發展主流中的材料與基本公式，蒐集在附錄裡。

我非常感謝在初稿與校稿階段H. Nomoto, M. Hitsuda 及 S. Tanaka 諸位教授所給予的許多寶貴批評。我也要感謝岩波書店的N. Urabe 先生，這本書是他建議作者寫的，另外在寫作期間及校稿階段他一直幫忙我，如果沒有他的幫忙，本書是無法完成的。現在本書已完工大吉，我要跟他共享這份喜悅。

我要把本書奉獻給我的兩位老師——吉田耕作教授與伊藤清教授，他們鼓勵我從事這件工作。

1974年5月

名古屋

飛田武幸

目 錄

第一章 基礎知識 1

1.1	機率空間，隨機變數及期望值.....	1
1.2	例 子.....	4
1.3	機率分佈.....	8
1.4	條件期望.....	23
1.5	極限定理.....	29
1.6	Gauss 型的系統	39
1.7	Gauss 型分佈的刻劃	46

第二章 Brown 運動 55

2.1	Brown 運動，Wiener 測度.....	55
2.2	樣本路徑的性質.....	64
2.3	Brown 運動的建構.....	79
2.4	Brown 運動的Markov 性	94
2.5	Hille-Yosida 定理的應用	108
2.6	跟Brown運動有關的過程	124

第三章 隨機荷佈及其分佈 143

3.1	Fourier 特徵泛函.....	143
3.2	Bochner-Minlos 定理	146
3.3	隨機荷佈及其分佈的例子.....	153
3.4	白噪聲.....	159

第四章 Wiener 運動的泛函 165

4.1	基本的泛函	165
4.2	(L^2) 空間的Wiener-Itô 分解	167
4.3	多重Wiener 積分的表現	171
4.4	隨機過程	177
4.5	隨機積分	188
4.6	應用例子	206
4.7	Fourier-Wiener 變換	224

第五章 旋轉群 231

5.1	白噪聲的變換(I): 旋轉	231
5.2	旋轉群的子群	234
5.3	投影變換群	239
5.4	Brown運動的投影不變性	244
5.5	一參數子群的值譜類型	247
5.6	利用旋轉群來推導白噪聲的性質	258
5.7	白噪聲的變換: 平移	264
5.8	量子力學的正準交換關係	277

第六章 複的白噪聲 289

6.1	複的Gauss 系統	289
6.2	白噪聲的複化	295
6.3	複的多重Wiener 積分	299
6.4	(L^2_c) 中的特殊泛函	307

第七章 單直群及其應用 315

7.1	無窮維單直群	315
-----	--------	-----

7.2	單直群 $U(T_c)$	318
7.3	$U(T_c)$ 的子群	320
7.4	子群的母算子	329
7.5	熱傳導方程的對稱群	332
7.6	對 Schrodinger 方程的應用	342

第八章 Brown 運動的微積算法 349

8.1	一些已知結果的摘要	350
8.2	(T^*, μ) 中的坐標系	352
8.3	廣義的 Brown 泛函	356
8.4	廣義的隨機測度	358
8.5	Brown 微積算法	360

附 錄 365

A.1	平賭過程	365
A.2	具有多維參數之 Wiener 過程	372
A.3	核式空間的例子	375
A.4	Wiener 的非線性網路理論	383
A.5	Hermite 多項式的公式	387

參考文獻 393

索 引 399

第一章

基礎知識

本章我們複習本書必須用到的機率論的一些基本概念。我們不作廣泛的或完備的複習。對於引起我們的動機或有關本書基本路向的概念，我們講述得詳細一點，至於其它的概念則只簡要點到為止。例如，有關無窮維間上的機率測度（第 1.3，(iii)）的某些特性及一族 Gauss 型的隨機變數的某些刻劃，我們討論得相當詳細。有許多定理與命題，若其證明可以在標準機率書上找得到，我們就只敘述而不給證明，或只給出簡略的證明。至於詳細的證明及相關的論題，讀者可參看一些標準的書，比如說 K. Itô (1953c)，W. Feller (1968, 1971) 及 J. L. Doob (1953)。

1.1 機率空間，隨機變數，及期望值

機率論建立在機率空間的概念上面。首先，我們有一個非空集 Ω 。在許多實際情形下，可以將每一元素 $\omega \in \Omega$ 看作是一個參數，用來標示所討論的隨機現象的一個現實 (realization)。其次，我們取 $\mathcal{B}$ 為 Ω 的一族子集，滿足下面三個條件：

1. $\Omega \in \mathcal{B}$ ；
2. 若 $B_n \in \mathcal{B}$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，則 $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$ ；
3. 若 $B \in \mathcal{B}$ ，則 $B^c \in \mathcal{B}$ ，其中 $B^c \equiv \Omega \setminus B$ 。

換言之， $\mathcal{B}$ 為由 Ω 的子集所成的 σ 體或 σ 環 (σ -algebra)。最後，我們有一個定義在 $\mathcal{B}$ 上具有可列加性的集函數 P ，滿足：

1. $0 \leq P(B) \leq 1$ ， $\forall B \in \mathcal{B}$ ；
2. 若 $B_n \in \mathcal{B}$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，且當 $i \neq j$ 時， $B_i \cap B_j = \emptyset$ ，則

$$P\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n P(B_n);$$