

实用工程数学

线性代数及其应用

陈 凯 麦学贤

水利电力出版社

实用工程数学
线性代数及其应用

陈 凯 麦学贤

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 15.5印张 409千字

1985年10月第一版 1985年10月北京第一次印刷

印数00001—11890册 定价3.25元

书号 15143·5686

前 言

近年来，我国电力工业迅速发展，工程实践不断向我们提出新课题，要求我们采用新技术、新方法。因此，过去不用或用得很少的数学分支，诸如：

- (1) 线性代数
- (2) 概率论
- (3) 数理统计
- (4) 图论

等在电力科技书刊和文献上已有了广泛的应用。

我国五十年代和六十年代由大专院校毕业，多年来从事电业工作的工程技术人员，在校学习期间多数没有接触上述数学内容，为了实现四个现代化，工程技术人员急需知识更新，迫切地需要有一套通俗易懂、便于自学的实用工程数学。本书就是为了满足读者这一要求而编写的，本书也可作为有关专业在校学生的数学参考书。

本书的特点是：

- 1) 内容取舍以实际工作需要为依据，在保持数学体系的基础上，以应用广的内容为重点，可要可不要的内容则予以删减。
- 2) 突出基本概念和基本定理，附有较多例题，并尽可能地结合工程实际。
- 3) 尽量作到深入浅出，通俗易懂。
- 4) 每章有小结，借以帮助读者消化本章内容，也给专学某些章节的读者查阅有关内容提供方便。
- 5) 每章均有习题并附解答或提示，便于读者自学解题。
- 6) 辟有专节或专章讨论有关数学在电力及自动控制工程中的应用，以便于读者了解如何应用所学数学理论来解决工程实际

问题。

本书在编写过程中得到水利电力部电力科学研究所、原水利电力部干校和水利电力部工程数学及电子计算机应用学习班全体学员的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中难免存在缺点错误，热诚地希望读者批评指正。

编者

1984年10月

目 录

前 言

绪 论	1
第一章 行列式及其应用	6
第一节 n 阶行列式	6
一、线性方程组与行列式	6
二、排列和排列的奇偶性	7
三、 n 阶行列式概念	9
第二节 行列式的基本性质	12
第三节 行列式按一行(列)展开、行列式的计算	22
一、余子式和代数余子式	22
二、行列式按一行(列)展开	24
第四节 克莱姆法则	28
第五节 应用举例	33
一、节点方程	33
二、回路方程	37
小结	39
习题	43
第二章 线性方程组	49
第一节 线性方程组的直接解法	51
一、高斯消去法	51
二、矩阵初等变换法	61
三、高斯主元素消去法	70
第二节 线性方程组解的判断理论	72
一、矩阵的秩	72
二、线性方程组解的判断定理	77
第三节 齐次线性方程组和非齐次线性方程组	79

一、齐次线性方程组	79
二、非齐次线性方程组解的结构	83
小结	84
习题	87
第三章 矩阵	91
第一节 矩阵的运算	91
一、矩阵相等、相加、数乘	91
二、矩阵的乘法	93
三、矩阵的转置	99
第二节 逆矩阵	101
一、逆矩阵概念	101
二、求逆矩阵的公式法	102
三、用初等变换方法求逆矩阵	106
第三节 n阶矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩	115
一、 n 阶矩阵乘积的行列式	115
二、矩阵乘积的秩	120
第四节 分块矩阵	121
一、概念	121
二、分块矩阵的运算	123
第五节 矩阵应用举例	132
一、基本矩阵网络方程	132
二、电力网三相短路计算	137
三、简化的电力系统静态稳定数学模型	143
小结	156
习题	162
第四章 向量空间	168
第一节 向量	168
一、向量的表示法	168
二、向量的相等	169
三、向量的加法	169
四、数乘向量	169

五、向量的减法	170
第二节 n 元向量	171
一、 n 元向量概念	171
二、 n 元向量	172
第三节 n 元向量的线性相关性	174
一、2元、3元向量之间的线性关系	174
二、 n 元向量的线性相关性	176
第四节 向量空间	189
一、向量空间的定义	189
二、几个重要而又常见的向量空间	190
三、子空间	192
四、向量空间的简单性质	193
五、向量空间的维数、基及坐标	193
六、基的变换	200
第五节 线性变换	203
一、线性变换的定义及例	203
二、线性变换的性质	204
三、 n 维向量空间的线性变换与矩阵	205
四、 $\sigma(x)$ 的坐标向量等于 σ 的矩阵左乘 x 的坐标向量	209
五、线性变换在不同的基下的矩阵	211
小结	215
习题	220
第五章 特征值与特征向量	227
第一节 特征值与特征向量	227
一、概念	227
二、特征值的求法	233
第二节 相似矩阵的标准形	238
一、基本概念	238
二、 n 阶矩阵与对角矩阵相似的充要条件	242
第三节 约当标准形	247
一、定义	247
二、定理	249

三、求矩阵 A 的约当标准形	249
四、求过渡矩阵	258
第四节 欧氏空间与 U 空间	263
一、欧氏空间	263
二、欧氏空间的标准正交基	267
三、 U 空间	275
第五节 正交矩阵与 U 矩阵	277
一、正交矩阵与 U 矩阵的定义	277
二、正交矩阵与 U 矩阵的性质	278
第六节 对称矩阵与厄米特矩阵	279
一、对称矩阵与厄米特矩阵的定义	280
二、对称矩阵与厄米特矩阵的性质	281
第七节 判断电力系统静态稳定的 ρ 法	288
一、预备知识	288
二、判断电力系统静态稳定的 ρ 法	292
小结	301
习题	309
第六章 二次型	314
第一节 二次型的基本知识	314
一、二次型的定义	314
二、二次型的表示法	315
三、化二次型为平方和	316
第二节 正定二次型	339
一、正定二次型概念	339
二、正定二次型的判别	340
第三节 负定、正半定、负半定二次型	344
一、定义及简单性质	344
二、判别法	345
三、正半定矩阵分解定理	349
第四节 厄米特二次型	351
一、定义	351
二、表示法	351

三、化厄米特二次型为平方和	352
四、正定、正半定、负定、负半定厄米特二次型	352
第五节 应用举例	353
一、电阻器功率损耗	353
二、用二次型研究系统的稳定性	355
小结	358
习题	362
第七章 向量和矩阵的微积分	365
第一节 函数矩阵的纯量微分	365
一、函数矩阵、函数向量对纯量的微分	366
二、函数矩阵对纯量的导数的几个公式	367
第二节 纯量函数和向量函数对向量的微分	369
一、纯量函数对向量的微分	369
二、向量函数对向量的微分	370
三、基本公式	372
第三节 函数矩阵的积分	377
一、定义	377
二、性质	378
小结	380
习题	381
第八章 矩阵函数	383
第一节 矩阵函数概念	383
一、预备知识	383
二、矩阵函数的定义	392
第二节 矩阵函数的计算公式及其性质	393
一、求表示矩阵函数的矩阵多项式	393
二、矩阵函数的性质	395
第三节 矩阵函数的幂级数表示	396
一、初等函数的矩阵幂级数表示式	397
二、矩阵函数之间的恒等式	398
第四节 矩阵指数函数	399

一、矩阵指数函数的性质	399
二、矩阵指数函数 e^{At} 的求法	402
第五节 矩阵函数在解微分方程组中的应用	411
一、解 $\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$	411
二、解一阶线性常系数非齐次微分方程组	412
第六节 应用举例——线性系统的状态空间分析	415
一、引言	415
二、基本概念	415
三、列状态方程的方法介绍	422
四、解线性系统的状态方程	427
五、定常线性系统的能控性和能观性	439
小结	442
习题	448
附录I 把A约当化的过渡矩阵C的实用求法	451
附录II 拉普拉斯变换表	462
附录III 基本符号表	464
习题答案	468
参考书目	484

绪 论

线性代数是一门应用非常广泛的基础数学，当前它已成为很多工程技术领域的技术人员必须掌握的一种工具。在电业部门，电力系统的基本计算、自动控制理论等都把线性代数作为重要基础。机和电在物理意义上虽然不同，但是它们的某些数学描述却有相似之处。以电路而论，直流电路和交流电路稳态解的讨论往往归结为对线性方程组的讨论，而交流电路的一般讨论往往归结为用线性代数的方法来讨论一阶线性微分方程组。

例1 已给直流电路如图0-1所示，求回路电流 I_1 ， I_2 ， I_3 。

下边给出本例的解法。详细的推导将放在有关部分讨论。后边的例题也这样处理。

1. I_1 ， I_2 ， I_3 满足的方程组为

$$\begin{cases} 4I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ -2I_1 + 11I_2 - 8I_3 = 8 \\ -I_1 - 4I_2 + 10I_3 = 0 \end{cases}$$

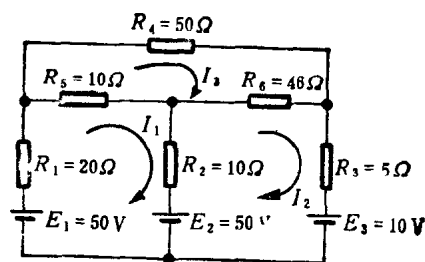


图 0-1

2. 线性代数对这类问题给出的解法

(1) 克莱姆法则

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 8 & 11 & -8 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 11 & -8 \\ -1 & -4 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{112}{265} = 0.423\text{A}$$

同理, $I_2 = 1.18\text{A}$, $I_3 = 0.512\text{A}$

(2) 高斯消去法 结果为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.423 \\ 0 & 1 & 0 & 1.18 \\ 0 & 0 & 1 & 0.512 \end{pmatrix}$$

由此得 $I_1 = 0.423\text{A}$, $I_2 = 1.18\text{A}$, $I_3 = 0.512\text{A}$ 。

(3) 求逆矩阵法 首先把线性方程组用矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 11 & -8 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解之, 得

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 11 & -8 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0.423 \\ 1.18 \\ 0.512 \end{pmatrix}$$

结果得 $I_1 = 0.423\text{A}$, $I_2 = 1.18\text{A}$, $I_3 = 0.512\text{A}$ 。

例2 已给交流电路如图0-2所示, 求回路电流 \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 。

其中 $e = 10\sqrt{2}\sin(2t + 30^\circ)$ 。

下边给出本例的解法:

1. \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 满足的方程组为

$$\begin{cases} (2+j4)\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - j4\dot{I}_3 = \dot{E} \\ -\dot{I}_1 + \left(2 + \frac{1}{j4}\right)\dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ -j4\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + (3+j4)\dot{I}_3 = 0 \end{cases}$$

其中 $\dot{E} = 5 + j5$ 。

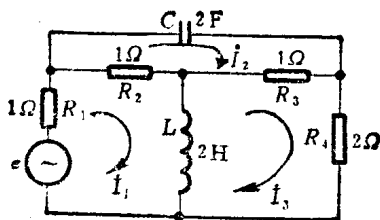


图 0-2

2. 线性代数对这类问题给出的解法

(1) 克莱姆法则

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{E} & -1 & -j4 \\ 0 & \left(2 + \frac{1}{j4}\right) & -1 \\ 0 & -1 & (3+j4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2+j4) & -1 & -j4 \\ -1 & \left(2 + \frac{1}{j4}\right) & -1 \\ -j4 & -1 & (3+j4) \end{vmatrix}} = \frac{94.1e^{j80.39^\circ}}{12 + j22.5}$$

$$= 3.69e^{j18.48^\circ}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{bmatrix} (2+j4) & \dot{E} & -j4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -j4 & 0 & (3+j4) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (2+j4) & -1 & -j4 \\ -1 & \left(2+\frac{1}{j4}\right) & -1 \\ -j4 & -1 & (3+j4) \end{bmatrix}} = 3.35e^{j37.514^\circ}$$

同理 $\dot{I}_3 = 0.32334e^{j14.0338^\circ}$ 。

(2) 高斯消去法 最后结果为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.69e^{j18.46^\circ} \\ 0 & 1 & 0 & 3.35e^{j37.514^\circ} \\ 0 & 0 & 1 & 0.3234e^{j14.0338^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \dot{I}_1 = 3.69e^{j18.46^\circ}, \quad \dot{I}_2 = 3.35e^{j37.514^\circ},$$

$$\dot{I}_3 = 0.3233e^{j14.0338^\circ}。$$

(3) 求逆矩阵法

$$\begin{bmatrix} (2+j4) & -1 & -j4 \\ -1 & \left(2+\frac{1}{j4}\right) & -1 \\ -j4 & -1 & (3+j4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ -\dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{3}+j5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+j4) & -1 & -j4 \\ -1 & \left(2+\frac{1}{j4}\right) & -1 \\ -j4 & -1 & (3+j4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5\sqrt{3}+j5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.69e^{j18.46^\circ} \\ 3.35e^{j37.514^\circ} \\ 0.3233e^{j14.0338^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \dot{I}_1 = 3.69e^{j18.46^\circ}, \quad \dot{I}_2 = 3.35e^{j37.514^\circ},$$

$$\dot{I}_3 = 0.3233e^{j14.0338^\circ}。$$

例3 已给电路如图 0-3 所示, 外加电压是一个 $\delta(t)$ 函数, 求 $t \geq 0$ 以后, 电感 L 上的瞬时电流 $i(t)$ 和电容上的瞬时电压 $u(t)$ 。初始状态均为 0。

下边给出本例的解法:

1. i 和 u 满足下列状态方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$i(0) = u(0) = 0$$

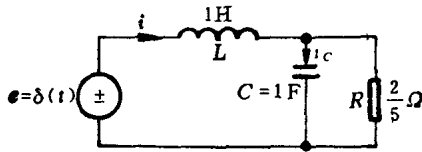


图 0-3

2. 线性代数给出的解法

(1) 拉氏变换法 结果得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I(s) \\ u(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{5}{2}}{(s+0.5)(s+2)} & -\frac{1}{(s+0.5)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+0.5)(s+2)} & \frac{s}{(s+0.5)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+5/2}{(s+0.5)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+0.5)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-0.5t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \\ \frac{2}{3}e^{-0.5t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore i(t) = \frac{4}{3} e^{-0.5t} - \frac{1}{3} e^{-2t},$$

$$u(t) = \frac{2}{3} e^{-0.5t} - \frac{2}{3} e^{-2t}.$$

(2) 矩阵函数法 可得同样结果。

本书将根据电力工业的要求,讲解线性代数的有关内容,并在适当的地方举例说明线性代数在电力系统的潮流计算、短路电流计算、稳定性计算等方面的应用以及研究网络的状态空间法。

第一章 行列式及其应用

第一节 n 阶行列式

一、线性方程组与行列式

行列式是研究线性方程组、线性代数和其他数学的重要工具，也是科技中常用的有力工具。2阶、3阶行列式是大家所熟悉的，但在实践中常用到 n 阶行列式。为了给出 n 阶行列式的概念，下面对2阶、3阶行列式作进一步考察，以便由此概括推广出 n 阶行列式。

在解二元、三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时，遇到了2阶、3阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2)$$

由此可以看出，2阶、3阶行列式都是一些项的代数和。2阶行列式的每一项都是2个数的乘积，3阶行列式的每一项都是3个数的乘积，其中的数都是方程组的系数。如何确定每一项和它的符号以及总项数，是行列式研究的重要方面。为此要先引入排列

和排列的奇偶性的概念。

二、排列和排列的奇偶性

1. 排列和排列的逆序

定义1 由1, 2, ..., n 这 n 个数组成的一个有序数组, 叫做一个 n 级排列。

例如: 3241 是一个 4 级排列, 12543 是一个 5 级排列。由排列的概念可知 n 级排列的总数是: $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 。

n 级排列 $12\cdots n$ 是合乎自然顺序的, 而其它的 n 级排列都破坏了自然顺序。

定义2 在一个排列中, 若两个数的前后位置与大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 那么就这两个数构成了一个“逆序”。一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数。

例如排列 3241 中 31, 21, 41, 32 都是逆序, 而且这个排列只有这 4 个逆序, 所以这个排列的逆序数是 4; 排列 12543 中的所有逆序是 53, 43, 54 所以它的逆序数是 3。

一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$, 因此 $\tau(3241) = 4$, $\tau(12543) = 3$ 。

2. 逆序数的计算

计算一个排列逆序数的方法有许多种, 这里先介绍一个简便的方法。

看一个排列的逆序数, 先看这个排列中数 1 前面有几个数。设有 r_1 个, 则这个排列对于数 1 来说有 r_1 个逆序。然后在这个排列中把 1 划去, 再看数 2 前面有几个数。设有 r_2 个, 则这个排列对于数 2 来说有 r_2 个逆序。然后又把数 2 划去。以后对数 3, 数 4, 等等都按同样方法计算逆序数, 直到把数 n 的逆序数 r_n 算出为止。于是, 这个排列的逆序数为 $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ 。例如, 排列 3241 中 $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $r_3 = r_4 = 0$, 故 $\tau(3241) = 3 + 1 = 4$ 。

3. 排列的奇偶性

定义3 逆序数是奇数的排列称为奇排列, 逆序数是偶数的排列称为偶排列。