实 用 工 程 数 学

线性代数及其应用

陈 凯　麦学贤

水 利 电 力 出 版 社

实用工程数学
线性代数及其应用
陈 凯 麦学贤
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 15.5印张 409千字
1985年10月第一版 1985年10月北京第一次印刷
印数00001—11890册 定价3.25元
书号 15143·5686

前　言

近年来，我国电力工业迅速发展，工程实践不断向我们提出新课题，要求我们采用新技术、新方法。因此，过去不用或用得很少的数学分支，诸如：

（1）线性代数

（2）概率论

（3）数理统计

（4）图论

等在电力科技书刊和文献上已有了广泛的应用。

我国五十年代和六十年代由大专院校毕业，多年来从事电业工作的工程技术人员，在校学习期间多数没有接触上述数学内容，为了实现四个现代化，工程技术人员急需知识更新，迫切地需要有一套通俗易懂、便于自学的实用工程数学。本书就是为了满足读者这一要求而编写的，本书也可作为有关专业在校学生的数学参考书。

本书的特点是：

1）内容取舍以实际工作需要为依据，在保持数学体系的基础上，以应用广的内容为重点，可要可不要的内容则予以删减。

2）突出基本概念和基本定理，附有较多例题，并尽可能地结合工程实际。

3）尽量作到深入浅出，通俗易懂。

4）每章有小结，借以帮助读者消化本章内容，也给专学某些章节的读者查阅有关内容提供方便。

5）每章均有习题并附解答或提示，便于读者自学解题。

6）辟有专节或专章讨论有关数学在电力及自动控制工程中的应用，以便于读者了解如何应用所学数学理论来解决工程实际

问题。

本书在编写过程中得到水利电力部电力科学研究院、原水利电力部干校和水利电力部工程数学及电子计算机应用学习班全体学员的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中难免存在缺点错误，热诚地希望读者批评指正。

编　者

1984年10月

目　录

绪　论

线性代数是一门应用非常广泛的基础数学，当前它已成为很多工程技术领域的技术人员必须掌握的一种工具。在电业部门，电力系统的基本计算、自动控制理论等都把线性代数作为重要基础。机和电在物理意义上虽然不同，但是它们的某些数学描述却有相似之处。以电路而论，直流电路和交流电路稳态解的讨论往往归结为对线性方程组的讨论，而交流电路的一般讨论往往归结为用线性代数的方法来讨论一阶线性微分方程组。

例1　已给直流电路如图0-1所示，求回路电流I_1，I_2，I_3。

下边给出本例的解法。详细的推导将放在有关部分讨论。后边的例题也这样处理。

1. I_1，I_2，I_3满足的方程组为

$$\begin{cases} 4I_1-I_2-I_3=0 \\ -2I_1+11I_2-8I_3=8 \\ -I_1-4I_2+10I_3=0 \end{cases}$$

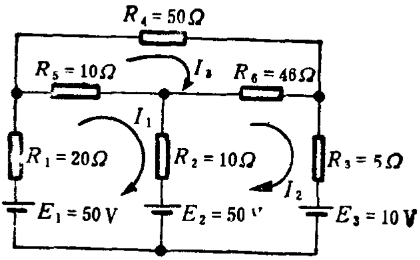

图　0-1

2. 线性代数对这类问题给出的解法

（1）克莱姆法则

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 8 & 11 & -8\\ 0 & -4 & 10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ -2 & 11 & -8\\ -1 & -4 & 10\end{vmatrix}}=\frac{112}{265}=0.423\text{A}$$

同理，$I_2=1.18\text{A}$，$I_3=0.512\text{A}$

（2）高斯消去法　结果为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0.423\\ 0 & 1 & 0 & 1.18\\ 0 & 0 & 1 & 0.512\end{pmatrix}$$

由此得$I_1=0.423\text{A}$，$I_2=1.18\text{A}$，$I_3=0.512\text{A}$。

（3）求逆矩阵法　首先把线性方程组用矩阵表示

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ -2 & 11 & -8\\ -1 & -4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 8\\ 0\end{pmatrix}$$

解之，得

$$\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ -2 & 11 & -8\\ -1 & -4 & 10\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 8\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.423\\ 1.18\\ 0.512\end{pmatrix}$$

结果得$I_1=0.423\text{A}$，$I_2=1.18\text{A}$，$I_3=0.512\text{A}$。

例2 已给交流电路如图0-2所示，求回路电流$\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$，$\dot{I}_3$。其中$e=10\sqrt{2}\sin(2t+30^\circ)$。

下边给出本例的解法：

1. $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$，$\dot{I}_3$满足的方程组为

$$\begin{cases}(2+j4)\dot{I}_1-\dot{I}_2-j4\dot{I}_3=\dot{E}\\ -\dot{I}_1+\left(2+\dfrac{1}{j4}\right)\dot{I}_2-\dot{I}_3=0\\ -j4\dot{I}_1-\dot{I}_2+(3+j4)\dot{I}_3=0\end{cases}$$

其中$\dot{E}=5+j5$。

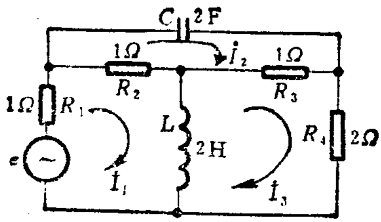

图 0-2

2.线性代数对这类问题给出的解法

（1）克莱姆法则

$$\dot{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}\dot{E} & -1 & -j4\\ 0 & \left(2+\dfrac{1}{j4}\right) & -1\\ 0 & -1 & (3+j4)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(2+j4) & -1 & -j4\\ -1 & \left(2+\dfrac{1}{j4}\right) & -1\\ -j4 & -1 & (3+j4)\end{vmatrix}}=\frac{94.1e^{j80.39^\circ}}{12+j22.5}$$

$$=3.69e^{j18.46^\circ}$$

$$\dot{I}_2=\frac{\begin{bmatrix}(2+j4) & \dot{E} & -j4\\ -1 & 0 & -1\\ -j4 & 0 & (3+j4)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}(2+j4) & -1 & -j4\\ -1 & \left(2+\frac{1}{j4}\right) & -1\\ -j4 & -1 & (3+j4)\end{bmatrix}}=3.35e^{j37.514^\circ}$$

同理$\dot{I}_3=0.32334e^{j14.0338^\circ}$。

（2）高斯消去法　最后结果为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3.69e^{j18.46^\circ}\\ 0 & 1 & 0 & 3.35e^{j37.514^\circ}\\ 0 & 0 & 1 & 0.3234e^{j14.0338^\circ}\end{bmatrix}$$

$\therefore$　$\dot{I}_1=3.69e^{j18.46^\circ}$，$\dot{I}_2=3.35e^{j37.514^\circ}$，

$\dot{I}_3=0.3233e^{j14.0338^\circ}$。

（3）求逆矩阵法

$$\begin{pmatrix}(2+j4) & -1 & -j4\\ -1 & \left(2+\frac{1}{j4}\right) & -1\\ -j4 & -1 & (3+j4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{I}_1\\ -\dot{I}_2\\ \dot{I}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\sqrt{3}+j5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\\ \dot{I}_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}(2+j4) & -1 & -j4\\ -1 & \left(2+\frac{1}{j4}\right) & -1\\ -j4 & -1 & (3+j4)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\sqrt{3}+j5\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3.69e^{j18.46^\circ}\\ 3.35e^{j37.514^\circ}\\ 0.3233e^{j14.0338^\circ}\end{bmatrix}$$

$\therefore$　$\dot{I}_1=3.69e^{j18.46^\circ}$，　　$\dot{I}_2=3.35e^{j37.514^\circ}$，

$\dot{I}_3=0.3233e^{j14.0338^\circ}$。

例3　已给电路如图 0-3 所示，外加电压是一个$\delta(t)$函数，求$t\geqslant0$以后，电感L上的瞬时电流$i(t)$和电容上的瞬时电压$u(t)$。初始状态均为 0。

下边给出本例的解法：

1. i和u满足下列状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di}{dt} \\ \dfrac{du}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\dfrac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$i(0)=u(0)=0$$

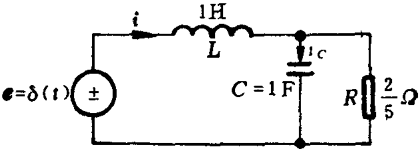

图 0-3

2. 线性代数给出的解法

（1）拉氏变换法　结果得

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+\dfrac{5}{2}}{(s+0.5)(s+2)} & -\dfrac{1}{(s+0.5)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+0.5)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+0.5)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+5/2}{(s+0.5)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+0.5)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{3}e^{-0.5t} & -\dfrac{1}{3}e^{-2t} \\ \dfrac{2}{3}e^{-0.5t} & -\dfrac{2}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad i(t)=\frac{4}{3}e^{-0.5t}-\frac{1}{3}e^{-2t},$$

$$u(t)=\frac{2}{3}e^{-0.5t}-\frac{2}{3}e^{-2t}。$$

（2）矩阵函数法　可得同样结果。

本书将根据电力工业的要求，讲解线性代数的有关内容，并在适当的地方举例说明线性代数在电力系统的潮流计算、短路电流计算、稳定性计算等方面的应用以及研究网络的状态空间法。

第一章　行列式及其应用

第一节　n 阶行列式

一、线性方程组与行列式

行列式是研究线性方程组、线性代数和其他数学的重要工具，也是科技中常用的有力工具。2 阶、3 阶行列式是大家所熟悉的，但在实践中常用到 n 阶行列式。为了给出 n 阶行列式的概念，下面对 2 阶、3 阶行列式作进一步考察，以便由此概括推广出 n 阶行列式。

在解二元、三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时，遇到了 2 阶、3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

由此可以看出，2 阶、3 阶行列式都是一些项的代数和。2 阶行列式的每一项都是 2 个数的乘积，3 阶行列式的每一项都是 3 个数的乘积，其中的数都是方程组的系数。如何确定每一项和它的符号以及总项数，是行列式研究的重要方面。为此要先引入排列

和排列的奇偶性的概念。

二、排列和排列的奇偶性

1. 排列和排列的逆序

定义1 由1，2，…，n这n个数组成的一个有序数组，叫做一个n级排列。

例如：3241是一个4级排列，12543是一个5级排列。由排列的概念可知n级排列的总数是：$n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$。

n级排列$12\cdots n$是合乎自然顺序的，而其它的n级排列都破坏了自然顺序。

定义2 在一个排列中，若两个数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么就说这两个数构成了一个"逆序"。一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数。

例如排列3241中31，21，41，32都是逆序，而且这个排列只有这4个逆序，所以这个排列的逆序数是4；排列12543中的所有逆序是53，43，54所以它的逆序数是3。

一个排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数记作$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$，因此$\tau(3241)=4$，$\tau(12543)=3$。

2. 逆序数的计算

计算一个排列逆序数的方法有许多种，这里先介绍一个简便的方法。

看一个排列的逆序数，先看这个排列中数1前面有几个数。设有r_1个，则这个排列对于数1来说有r_1个逆序。然后在这个排列中把1划去，再看数2前面有几个数。设有r_2个，则这个排列对于数2来说有r_2个逆序。然后又把数2划去。以后对数3，数4，等等都按同样方法计算逆序数，直到把数n的逆序数r_n算出为止。于是，这个排列的逆序数为$r_1+r_2+\cdots+r_n$。例如，排列3241中$r_1=3$，$r_2=1$，$r_3=r_4=0$，故$\tau(3241)=3+1=4$。

3. 排列的奇偶性

定义3 逆序数是奇数的排列称为奇排列，逆序数是偶数的排列称为偶排列。