Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣 编演
郭大钧　邵品琮 主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

(六)

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社
一九八三年·济南

目　录

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二 重 积 分

1°二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x,y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$，而其和为对所有 i，j 使 $(x_i,\ y_j)\in\Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

2°二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0,$$

则下之公式正确：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|I|\,du\,dv.$$

特别是，根据公式$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$变换为极坐标r和φ的情形有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3901．把积分$\iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<1}} xy\,dx\,dy$，当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\ (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算所论积分的值．

解 由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\longrightarrow\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<1}} xy\,dx\,dy=\frac{1}{4}.$$

3902．用直线

$$x=1+\frac{i}{n},\ y=1+\frac{2j}{n}\ (i,j=0,1,\cdots,n)$$

把域 $1\leqslant x\leqslant 2$， $1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形．作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在此域内的积分下和 $\underline{S}$ 与积分上和 $\bar{S}$．当 $n\to\infty$ 时，上和与下和的极限等于什么？

解 下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

而上和

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\underline{S}$ 与 $\bar{S}$ 的极限均等于 $\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$．

3903．用一系列内接正方形作为积分域的近似域，这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点，并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值．近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\doteq 0.196+0.371+0.343+0.312+0.177$$

$$+0.329+0.302+0.154+0.286$$

$$\doteq 2.470,$$

即

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq 9.880.$$

下面计算积分的精确值：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=4\int_0^5\ln\left(y+\sqrt{24+x^2+y^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^5\ln\left(\sqrt{25-x^2}+7\right)dx-2\int_0^5\ln(24+x^2)\,dx.$$

由于

$$\int \ln(24+x^2)dx = x\ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2}dx$$

$$= x\ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \text{arc tg} \frac{x}{\sqrt{24}} + C,$$

从而

$$2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx$$

$$= \left[2x\ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \text{arc tg} \frac{x}{\sqrt{24}}\right]\Bigg|_0^5$$

$$= 20\ln 7 - 20 + 8\sqrt{6} \text{arc tg} \frac{5}{\sqrt{24}};$$

又

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 4[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)]\Big|_0^5$$

$$+ 4\int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$$

$$= 20\ln 7 + 4\int_0^5 \frac{x^2\,dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令 $x=5\sin t$，有

$$\int_0^5 \frac{x^2\,dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25\cos^2 t + 25}{5\cos t + 7} dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos t - 7)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5\cos t + 7} dt$$

$$= (7t - 5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24\left[\frac{1}{\sqrt{6}} \text{arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \text{tg} \frac{t}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{7\pi}{2}-5-4\sqrt{6}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$=20\ln 7+14\pi-20-16\sqrt{6}\,\mathrm{arc\ \ tg}\frac{2}{\sqrt{24}}.$$

注意到

$$2\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\mathrm{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=14\pi-4\sqrt{24}\left(2\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\mathrm{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\doteq 13.201.$$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略，因而产生较大的绝对误差3.321及较大的相对误差$\frac{3.321}{13.201}\doteq 25.16\%$.

注意，求$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5\frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在3937题以后才开始使用

极坐标，故本题仍用直角坐标进行计算.

3904. 用直线x=常数，y=常数，$x+y$=常数把域S分为四个相等的三角形，并取被积函数在每个三角形的中线交点之值. 近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y}\, dS,$$

其中S表由直线$x=0$，$y=0$及$x+y=1$所围成的三角形.

解 我们只须以$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$及$x+y=\frac{1}{2}$分域S,即得四个相等的三角形,它们的面积均为$\frac{1}{8}$,重心为$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$. 于是，得此积分的近似值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\, dS \doteq \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\doteq \frac{1}{8}\,(0.577+0.816+1.826) \doteq 0.402,$$

其精确值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\, dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}})\, dx = \frac{2}{5} = 0.4.$$

3905. 把域$S\{x^2+y^2 \leqslant 1\}$分为有限个直径小于δ的可求积的子域$\Delta S_i (i=1, 2, \cdots, n)$. 对于什么样的值$\delta$能保证不等式：

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立？其中 $(x_i, y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i，则

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^n \iint\limits_{\Delta S_i} [\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n \iint\limits_{\Delta S_i} |\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|dS$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n \iint\limits_{\Delta S_i} \omega_i\, dS=\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta S_i.$$

由于域 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的面积等于 π，故只要

$$\omega_i<\frac{0.001}{\pi},$$

便能满足原不等式的要求．但因为

$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|\sin(x'_i+y'_i)-\sin(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|(x'_i+y'_i)-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}[|x'_i-x_i|+|y'_i-y_i|]$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}\sqrt{2[(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2]}^{*)}$$

$$=\sqrt{2}\,\delta_i,$$

故只要取

$$\delta<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times 0.001\doteq 0.00023,$$

则有

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001.$$

*）对于任意非负实数a，b有

$$2ab\leqslant a^2+b^2 \text{或} (a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2),$$

从而

$$a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

计算积分：

3906. $\int_0^1 dx\int_0^1(x+y)dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=1$.

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy=\int_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx=\frac{1}{40}$.

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr$.

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi a^3}{3}.$$

3909. 设R为矩形

$$a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B,$$

证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dxdy=\int_a^A X(x)\,dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法，不妨先对y后对x积分，即得

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dxdy=\int_a^A dx\int_b^B X(x)Y(y)dy$$

$$=\int_a^A X(x)\,dx\int_b^B Y(y)dy.$$

3910. 设：

$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y),$$

计算

$$I=\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy.$$

解 不妨按先对y后对x积分的顺序计算，即得

$$I=\int_a^A [F'_x(x,B)-F'_x(x,b)]dx$$

$$=F(x,B)\Big|_a^A-F(x,b)\Big|_a^A$$

$$=F(A,B)-F(a,B)-F(A,b)+F(a,b).$$

3911. 设$f(x)$为在闭区间$a\leqslant x\leqslant b$内的连续函数，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

此处仅当$f(x)=$常数时等号成立。

证 因为

$$0 \leqslant \int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2(\int_a^b f(x)dx)^2$$

$$+(b-a)\int_a^b f^2(y)dy,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

当$f(x)=$常数时，显然上式中等号成立. 反之，设上式中等号成立，则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$是$a\leqslant x\leqslant b$上的非负连续函数，故$F(x)\equiv 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. 特别$F(a)=0$，即$\int_a^b [f(a)-f(y)]^2 dy=0$. 又由于函数

$$G(y)=[f(a)-f(y)]^2$$

是$a\leqslant y\leqslant b$上的非负连续函数，故$G(y)\equiv 0$ $(a\leqslant y\leqslant b)$. 因此，$f(y)\equiv f(a)$ $(a\leqslant y\leqslant b)$，即$f(x)=$常数. 证毕.

3912. 下列积分有什么样的符号：

(a) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$;

(б) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$;

(в) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy$?

解 (a) 由于 $0<x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant \ln 1=0$，且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$，故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy<0.$$

(б) 我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy=I_1-I_2-I_3,$$

其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dx\,dy,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dx\,dy.$$

显然

$$0<I_1<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy=\pi,$$

$$I_2>0,$$

$$I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} dx\,dy=4\pi-2\pi=2\pi,$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy<0.$$

(B) 我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)dxdy$$

$$+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零，第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数，因而积分值是正的。于是，原积分是正的。

3913．求函数

$$f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$$

在正方形：$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$内的平均值。

解 平均值

$$I_0=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}} \sin^2 x\sin^2 y\,dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^\pi \sin^2 x\,dx\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}.$$

3914．利用中值定理，估计积分

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|<10}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}$$

之值.

解 由于积分域的面积为200,故由积分中值定理知

$$I=\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot 200$$

$$=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\qquad (1)$$

其中 (ξ,η)为域$|x|+|y|\leqslant 10$中的某点。

显然

$$0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2,$$

我们证明必有

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2.\qquad (2)$$

由于函数 $\cos^2x+\cos^2y$ 在有界闭域$|x|+|y|\leqslant 10$上的最大值为 2，最小值为 0 . 从而连续函数

$\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}$在有界闭域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 上 的

最小值为$\frac{1}{102}$，最大值为$\frac{1}{100}$. 如果$\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$,

则由(1)式知

$$\iint\limits_{|x|+|y|<10}\left(\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}\right)dxdy$$

$$=I-I=0.$$

但$f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}$是非负连续函数，从而必有$f(x,y)\equiv 0$ （在域$|x|+|y|\leqslant 10$上），即$\cos^2x+\cos^2y\equiv 2$ （在域$|x|+|y|\leqslant 10$上）.这显然