拓扑学导论

[苏] Ю.Г.鲍里索维奇
Н.М.勃利兹尼亚科夫
Я.А.伊兹拉依列维奇
Т.Н.福缅科

盛立人　金成桴　吴利生
徐定宥　许依群　罗嵩龄　译

高等教育出版社

拓扑学导论

[苏] Ю. Г. 鲍里索维奇
Н. М. 勃利兹尼亚科夫
Я. А. 伊兹拉依列维奇
Т. Н. 福缅科

盛立人　金成桴　吴利生
徐定宥　许依群　罗嵩龄　译

高等教育出版社

(京)112号 DU97/04

本书是根据 Ю. Г. Борисович 等著《Введение В Топологию》(Москва《Высшая школа》, 1980)译出，并按照英文版《*Introduction to Topology*》(*Mir Publishers*, 1985) 校订而成. 原书经苏联高等和中等技术教育部审定为数学专业大学生的教学参考书. 主要内容有：一般拓扑，流形与丛的理论，同伦论及同调论基础等，涉及拓扑学的所有基本理论. 叙述由浅入深，处理经典问题不落俗套，并尽量涉及对于其他分支的应用.

与其他同类型的国外教本相比较，本书更适宜于作为我国大学数学系各专业拓扑学课程的教学用书，或供我国数学系高年级、研究生作参考用书.

本书共分五章，前三章由安徽师范大学徐定宥，解放军汽车管理学院许依群、罗嵩龄三同志翻译，后两章由苏州大学吴利生，南京师范大学金成桴，安徽大学盛立人三同志翻译，最后由盛立人同志进行校订和协调.

拓扑学导论

［苏］ Ю. Г. 鲍里索维奇
H. M. 勃利兹尼亚科夫
Я. A. 伊兹拉依列维奇
T. H. 福缅科

盛立人 金成桴 吴利生
徐定宥 许依群 罗嵩龄 译

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 12.875 字数 310 000
1992 年 9 月第 1 版 1992 年 月第 1 次印刷
印数 0001— 2 225
ISBN 7-04-003611-8/O·1080
定价 9.60 元

序　言

拓扑学，这门不久前才被列入数学系教学计划的课程，在大学的整个数学教学中的作用，照我们的看法，是十分重要的. 要是不吸收一些拓扑学概念，未必能编写出诸如数学分析，微分方程，微分几何，力学以及泛函分析等学科的适应于它们现代发展状况的课本来. 同时，让大学生在低年级就熟悉一点拓扑学的研究方法也已经是必要的了.

对大学低年级学生讲授拓扑学的经验表明，需要有这样一本书，它既要让只具备起码的数学预备知识（集合论一般知识，一般代数学教程，线性代数与数学分析初步）的大学生易于接受；又应能使读者了解现代拓扑学的基本概念；同时，它还应包含有一定份量的拓扑学的内容和方法.

本书作为拓扑学初等教程可供选择的课本之一，在选材上无疑地将反映出作者们的个人爱好和教学、科研工作的经验. 本书所叙述的拓扑学各篇章，都是与基本的普通数学课程及应用最密切联系的. 书中的材料能使教师选择不同的方案来组织拓扑学教学和确定选学内容.

我们提醒读者注意，为了尽快介绍一般拓扑，本书已略作安排. 我们介绍与商空间概念有关的构造性概念比起一般拓扑的其它概念来得早，这样做可以使学生尽早地研究一些作为拓扑空间重要例子的流形（二维曲面，射影空间，轨道空间等），而在这些流形上的光滑结构则要到很晚（第四章）才定义. 二维曲面的理论不只是在一处叙述，而是配合一般拓扑学基本概念的发展，分散在第一、二、三章中加以讨论. 在同伦论中，较早地引进了范畴和

函子概念，并解释了拓扑问题代数化的思想．采用函子观点，既能保证统一地叙述同伦论和同调论，而且也能自然地依 Steenrod-Eilenberg 公理来描述各种同调论．这在一定程度上弥补了本书中未能给出单纯同调不变性证明这一缺陷．然而，对于同伦论的计算方法（第三章），则仅限于计算圆周与闭曲面的基本群．等式 $\pi_n(S^n;Z)\simeq Z, n\geqslant 2$，则并未给出证明，只是为了引入球面映射度和向量场的示性数（并推导出 Brouwer 定理与代数学基本定理）提供基础．同调群的讨论（第五章）则一直推进到正合序列．特别，计算了群 $H_n(S^n;Z)$，并证明了 Brouwer 和 Lefschetz 的不动点定理．尽管我们对于计算技巧的进一步发展已经作好了准备，但就本书的目的和任务而言，我们的讨论也只能到此为止．

有关流形的光滑结构和切空间的概念（第四章），我们作了尽可能详细的研究，术语也作了合理的修改，并注意了与力学，动力系统以及 Morse 理论的联系．我们认为，在研究同伦论的开始阶段，就应当介绍它的各种不同模型（奇异的，单纯的，胞腔的），因为即使在最简单的应用中，读者都可能会遇到它们之中的任何一种．在第五章里我们将说明以上各种模型．

正文各节中的练习往往用以代替简单的推演，其目的在于促进读者积极思考．我们约定．定理证完时用符号▮表示，有必要把例子与下文区分开时，就用符号◆．

需要指出的是，本书虽然是以 Ю. Г. 鲍里索维奇为伏龙芝大学数学系学生讲课用的讲义为基础，但由作者们作了重大的修订．所有正文中的插图是由T. H. 福缅科绘制的，封面以及各章开头的图案则是由A. T. 福缅科教授（莫斯科大学）画的．对他们，作者们深表谢意．

最后，我们向曾为改善本书而出过力的人们表示诚挚的感谢：A. B. 切尔纳夫斯基提了许多建议和有益的批评；M. M. 波

斯特尼科夫曾经和我们讨论了为大学低年级学生讲授拓扑学的一般教学方法问题，并且他还提出了一系列有益的意见；A.C. 米辛科也提过不少有益的建议.

还应感谢国立伏龙芝大学代数教研室和分析的拓扑方法教研室的全体青年同事与研究生，他们对本书进行了讨论，并提出有益的意见. Ю.Е. 格利克里赫，В.Г. 兹维亚金，М.Н. 克列因和Н.М. 麦列尔校阅了许多章节，出于他们的帮助改正了不少印刷错误.

我们还收到许多对本书俄文版的评论，以及他们作的许多有益的注释，对这许多建议，在这次修订本中我们都已予考虑. 在此，作者们也深表感谢.

作　者

本书采用记号

(详情请见所列各章、节、段)

$\bar{A}$	集 A 的闭包;II,6.1.
A'	集 A 的导集;II.6.1.
C_n	n 维复 Euclid 空间;II.2.2.
CP^n	复射影空间;II.5.2.
C^r	光滑性的阶数;IV.1.1.
$C(X,Y)$	X 到 Y 的连续映射空间;III.1.1.
C_*	链复形;V.2.2.
$C_k(K;G)$	单纯复形 K 的(系数群 G)k 维链群;V.3.2.
$D_r(x_0)$	中心为 x_0,半径为 r 的开球;I.3.2.
$D_r^n(x_0)$	中心为 x_0,半径为 r 的开 n 圆盘(R^n 中球);II.2.2.
$\deg f$	映射 f 的映射度;III.4.8;IV.6.6;V.6.2.
∂A	集 A 的边界;II6.3.
∂_k	边缘同态,或微分;V.2.
$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big\vert_{x_0}$	映射 f 在点 x_0 处的 Jacobi 矩阵;IV.1.1.
δ_k	同调序列的连结同态;V.2.
(E,B,F,p)	局部平凡纤维空间;IV.9.2.
e^n	n 维胞腔;IV.10.2.
$\mathrm{ext}A$	集 A 的外部;II.6.2.
$G_k(R^n)$	R^n 中 k 维子空间的 Grassmann 流形;IV.3.5.
$GL(n,R)$	一般线性群;IV.3.4.
$\mathrm{grad}f(x)$	函数 f 的梯度;IV.11.3.
$H_k(X;G)$	多面体 X 的 k 维同调群;V.3.2;
$H_k^s(X;G)$	(系数群 G 的)空间 X 的 k 维奇同调群;V.4.1.
$\mathrm{Int}A$	集 A 的内部;II.6.2.
I^r	Tihonov 方体;II.14.1.
$\mathrm{ind}(x^0,\Phi)$	向量场 Φ 在奇点 x^0 的指数;V.6.2.

$\|K\|$	复形K的多面体;V.3.1.
$L(k_1,\cdots,k_n)$	广义透镜空间;II.5.3.
Λ_f	映射 f 的 Lefschetz 数;V.8.1.
$M(m,n)$	$m\times n$ 矩阵的流形;IV.3.4.
$M(m,n;k)$	秩 k 的 $m\times n$ 矩阵的流形;IV.3.4.
M_p	亏格为 p 的可定向曲面;II.4.4.
N_q	亏格为 q 的不可定向曲面;II.4.4.
$\mathscr{O}(M^n)$	流形 M^n 上 C^r 函数的代数;IV.4.3.
$\pi(X,Y)$	X 到 Y 映射同伦类的商集;III.1.2.
$\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$	空间的直积;II.9.1.
$\pi_1(X)$	道路连通空间X的基本群;IV.3.2.
$\pi_n(X,x_0)$	n 维同伦群;IV.3.1.
R^n	实 n 维 Euclid 空间;II.2.2.
RP^n	实 n 维射影空间;II.5.2.
$\mathrm{rank}_{x_0}f$	映射 f 在点 x_0 处的秩;III.1.2.
$\rho(x,y)$	距离,或度量;I.2.1.
$S_r^{n-1}(x_0)$	R^n 内中心 x_0 半径 r 的球面;II.2.2.
$\mathrm{supp}\varphi$	函数 φ 的支集;III.4.2.
σ^k	k 维标准单形;V.3.1.
$T(f)$	f 的切映射;IV.6.5.
TM^n	流形 M^n 的切丛;IV.6.3.
T_xM^n	流形 M^n 在 x 点的切空间;IV.6.2.
(X,A)	空间偶 $A\subset X$;III.2.1.
X/R	空间X关于等价关系R的商空间;II.3.1.
$X\times Y$	空间X与Y的直积;II.9.1.
$X\cup_f Y$	空间X与Y的缝合;III.1.5.
$X_{x_0}\vee_{y_0}Y$	空间X及Y的楔形;III.1.5.
$[X,Y]$	向量场X及Y的交换子;IV.8.4.
$\chi(X)$	曲面X的 Euler 示性数;I.4.4.
	多面体X的 Euler 示性数;V.8.1.
Z_f	映射 f 的柱面;III.1.5.

目　录

第一章

拓扑学的原始概念

本章是为读者系统学习下面几章拓扑学内容作准备的. 在这一章里，我们通俗扼要地叙述了一些问题，这些问题的解决不仅导致了作为数学一个分支的拓扑学的形成，而且也促进了它在现阶段的迅猛发展. 此外，本章还讨论了拓扑空间概念及流形概念的起源.

§1 什么是拓扑学?

就我而言,真可谓是条条道路通拓扑[①].

H. Poincaré.

按照一般的说法,拓扑学作为一门科学形成于十九世纪末法国大数学家 H. Poincaré 的著作中. 但是,拓扑学研究的起源可追溯到十九世纪中叶 Riemann 的工作. 他在函数论的研究中,发展了一些建立在几何观念基础上的新方法. 正是他,试图叙述多维流形的概念,并引入高阶连通性. 这些概念后来由意大利数学家 Betti (1871年)予以精确阐述. 但是,只有 Poincaré 从函数论及微分方程的需要出发,引进了一系列极为重要的拓扑概念,发展了内容丰富的理论,并将它应用于数学及力学的上述各分支的研究之中. 他的思想以及他所提出的问题至今还在深刻地影响着拓扑学的发展和应用.

Poincaré 曾经这样来确定拓扑学的内容:"拓扑学是一门科学,它不仅能使我们认识通常空间中几何图形的定性性质,而且也能使我们去认识高于三维空间几何图形的定性性质. 在三维空间中,拓扑学是近乎直观的. 反之,对于高于三维的空间,拓扑学就显得难以捉摸了. 为了克服这一点,需要对这门科学的极端重要性确立坚定的信念. 如果这种重要性尚未为人所认识,那实在是因为人们对此还没有仔细想过."[62,63]

---

① 拓扑学的外文现在多用 topology,但 Poincaré 当时用较早的名称, Analysis situs——来的拉丁文,直译为"位置分析". 我们下面一概译为"拓扑学".

(遵照习惯,以下将 Analysis situs 通译为拓扑学——译者).

为了说明几何图形的定性性质的含义，我们把球面设想成由橡皮膜做成，可以用任意方式压缩或拉伸，只是不能使它断裂，也不能把不同的点“粘合”成一点. 球面的这种变换称为**同胚变换**. 在同胚变换之下得出的两个不同的图形称为是**互相同胚**的. 这样，球面的定性性质就是所有与它同胚的图形所共有的性质，或者说，在同胚变换之下保持不变的性质.

自然，我们也可以讨论其它图形的同胚变换和定性性质. 通常，定性性质又叫做**拓扑性质**. 显然，上例中球面的整体性(连通性)就是它的一个拓扑性质. 比如说，在设法建立球面和球体的同胚变换时，发现了一些更深刻的性质. 不难断言，这样的同胚变换是不存在的，可是要证明这一点就必须找出球面和球体之间的不同的拓扑性质. 这些性质之一就是球体的“可缩性”——可以让(球体“连续”地改变，也即沿着半径向中心方向收缩，而最终缩成它的一个点；以及球面的“不可缩性”——不能将它在它自身内缩成它的任何一点. 此外，注意到排球内胆和自行车内胎之间在拓扑学上的差异也是有益的. 当然，上面这些直观的叙述都要有严格的证明.

练习 1° 试证明，几何图形上的“洞”的个数是一个拓扑性质；证明，圆环面和二维圆盘不同胚.

Poincaré 的研究开创了拓扑学的方向之一，即组合拓扑学或代数拓扑学. 其方法就是按照某一个对所有图形都适用的规则，赋予每个几何图形以一个代数对象(群、环等)，使得图形之间的固定关系对应于对象之间的代数关系. 这样，研究代数对象的性质就阐明了几何图形的性质. Poincaré所构造的代数对象就是同调群及基本群.

代数拓扑学的方法的发展不可避免地要与点集拓扑学的思想(G. Cantor, 1874—1895; F. Hausdorff, 1901—1910)相结合。实