应用数学丛书

Z-变换与拉普拉斯变换

关肇直　王恩平　编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书采用从算子演算的观点出发的方法，介绍了z-变换与拉普拉斯变换的基本概念和性质，包括z-变换、z-变换的性质及其计算、离散定常线性系统、拉普拉斯变换及拉普拉斯变换的应用等。可供高等院校工科有关专业研究生、教师及从事科研工作的工程师参考。

应用数学丛书
z-变换与拉普拉斯变换
关肇直 王恩平 编著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
$850\times1168^{1}/_{32}$ 印张$5^{1}/_{4}$ 131千字
1983年11月第一版 1983年11月第一次印刷 印数：0,001—7,500册
统一书号：15034·2585 定价：0.69元

前 言

z-变换与拉普拉斯变换是一种应用广泛的数学工具，这本小册子就是为广大读者掌握并应用这种数学方法而写的。

在这本小册子中，我们介绍z-变换与拉普拉斯变换不同于许多常见的教科书中所采用的方法。这里我们从算子演算的观点出发，介绍了z-变换与拉普拉斯变换的基本概念和性质，从而避免了大量的分析技巧和运算，这对广大读者来说是很方便的。为了说明z-变换与拉普拉斯变换的应用，我们还写进了有关解差分方程、微分方程、积分方程、电路问题等方面的内容，以及关于定常线性系统理论中的某些基本概念和设计方法。

欢迎广大读者对这本小册子提出宝贵意见，以便在适当时候补充修改。

出 版 说 明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

目 录

应用数学丛书目录●

1. *z*-变换与拉普拉斯变换……………………关肇直，王恩平编著
2. 常微分方程及其应用 ……………………秦化淑，林正国编著
3. 实变函数论基础 ………………………………胡钦训编著
4. 正交函数及其应用 ……………………………柳重堪编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换 …………………关肇直，陈文德编著
6. 圆柱函数 ………………………………………刘　颖编著

● 这是第一批的目录，以后将陆续分批刊登。

第一章　z-变 换

§1　从数字滤波谈起

为了引进 z-变换的概念，我们先从数字滤波技术谈起。数字滤波方法是一种现代滤波技术。一个数字滤波器其实是一种计算过程，或者说是一种算法，这种算法是对一组采样数据的处理方法。如果视数字滤波器为一采样数据系统，那么它的作用就是把一串输入数据转换成所希望的输出数据。由于我们所关心的主要不是有关数字滤波器的设计问题，因此下面我们仅举几个简单的数字滤波器的例子，用以说明它们是怎样把一组输入数据转换成另一组输出数据的，从中引出带有规律性的处理方法，以便得到我们所关心的主要论题——z-变换的概念。

例 1　算术平均算法

假设我们用某种测量仪器测量出地面上 A、B 两点之间的距离，每次测量的结果记为 x_k，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。如果 A、B 两点之间的实际距离为 x，那么应该有

$$x_k = x + \delta x_k \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.1.1}$$

这里，δx_k 代表第 k 次测量误差，n 代表测量次数。为了尽量减少测量误差对测量精度的影响，我们可以用 n 次测量的算术平均值近似地代表 A、B 两点之间的实际距离，从统计的观点来看，平均的结果比每次单独测量的数据更接近于真值。现在令 y_n 表示这 n 次测量结果的算术平均值，则有

$$y_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1.1.2}$$

当测量次数不断增加时，则按式（1.1.2）可以算出一系列的测量结果的算术平均值。这样，我们就可以把算术平均算法(1.1.2)看成是将数列$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$转换成数列$\{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$的一个数字滤波器。在这个数字滤波器的输出数列$\{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$中，每一个数据都可以看作是对$A$、$B$两点之间距离的一个近似值，在一定条件下，有以概率为1的

$$x = \lim_{n \to \infty} y_n$$

这就是说，测量数据越多，算术平均的结果就越接近于真值x。因此，算术平均算法的确可以用做为一种数据处理方法，换句话说，数字滤波器（1.1.2）确实是一种有用的数字滤波技术。

例 2　滑动平均算法

上述算术平均算法的特点是，平等地看待每次测量结果。现在我们改写式（1.1.2）为

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k \tag{1.1.3}$$

从这里容易看出，在这种算法中，实际上我们是对每个测量结果进行加权求和，其权系数对每个数据都是一样的。如果我们在n次测量中对所得到的数据有所侧重，而不是同等看待的话，在数学上常对这类数据采用权系数不等的加权处理办法，对我们比较重视的那些测量数据的权系数适当取大一些，而对那些不太重视的测量数据的权系数就要尽量取小一些。这时，我们可以用

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} h_k x_k \tag{1.1.4}$$

代替算术平均算法（1.1.2)，其中h_k为加权系数，$k=1, 2, \cdots, n$，并且一般要求$h_k > 0$，$k=1, 2, \cdots, n$，并且

$$\sum_{k=1}^{n} h_k = 1 \tag{1.1.5}$$

由式（1.1.4）给出的算法叫做加权平均算法，它也是一个数字滤波器。

加权平均算法的缺点是，当数据不断增加时，要求权系数越来越多，同时还要保证满足条件（1.1.5），因此必须不断重新调整对历史数据所加的权。由此可见，这种算法用起来往往不太方便。为了弥补这一缺陷，一种合用的算法是所谓滑动平均算法。这种算法的基本思想是，假若我们要求至少用$N+1$次测量数据来做加权平均，而每当做一次试验增加一个测量数据时，就扔掉前面一个测量数据，同时按先后顺序对$N+1$个数据所加的权系数一经确定就不改变了，于是滑动平均算法可由下式确定

$$y_n=\sum_{k=0}^{N} h_k x_{n-k} \tag{1.1.6}$$

一般说来，这种滑动平均算法的权系数是根据物理意义事先决定好的。滑动平均算法式（1.1.6）也是一种数字滤波器，它同样把一组输入数据$\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$转换成输出数据$\{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$。

例 3 递推的数字滤波器

无论是做为数字滤波器的算术平均算法，还是滑动平均算法，都是非递推的，这种非递推形的算法需要保留大量测量数据。在使用数字电子计算机的情况下，一种合用的数字滤波器算法乃是递推形式的。例如，用一部雷达测量一架匀速直线飞行的飞机的瞬时位置时，假若已测得t_n时刻飞机的水平位置y_n和飞行速度V_n，那么可以预测t_{n+1}时刻的水平位置为

$$y_{n+1}=y_n+V_n\Delta t \tag{1.1.7}$$

这里Δt为采样周期。为了减少速度测量中的噪声影响，可用$N+1$次测量结果的滑动平均算法得到的值代替V_n，于是可取

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k V_{n-k}$$

作为V_n的近似值，诸α_k为加权系数，于是等式（1.1.7）可改写做

$$y_{n+1}=y_n+(\alpha_0 V_n+\alpha_1 V_{n-1}+\cdots+\alpha_N V_{n-N})\Delta t \qquad (1.1.8)$$

按照式（1.1.8），我们只要用在t_{n-N}到t_n时刻测得的飞机水平速度和t_n时刻的预测水平位置数据就可以预测出t_{n+1}时刻的水平位置。这种由算法式（1.1.8）确定的数字滤波器是一种递推形式的数字滤波器。更一般形式的递推数字滤波器是

$$y_n+b_1 y_{n-1}+\cdots+b_m y_{n-m}=a_0 u_n+a_1 u_{n-1}+\cdots+a_N u_{n-N} \qquad (1.1.9)$$

这种递推的数字滤波器也是把一组输入数据$\{u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$转换成输出数据$\{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$的一种算法。

以上三个简单例子的一个共同特点是，一个数字滤波器视数列为一整体，它把一个数列转换成另一个数列。从这个意义上来说，数字滤波器实际上体现了由一数列到另一数列的转换关系，而数字滤波器的运算也可看做是数列与数列之间的运算。

§2 数 列 环

曾经指出，数字滤波器的运算过程是数列之间的转换过程。如果我们视数列为一整体，给出数列之间的某种运算法则，对我们研究类似于数字滤波器这样的问题将会大有益处，这一节我们从建立数列之间的运算关系入手，然后引出数列环。我们这里所说的数列总是指实数列。

今后我们总是用英文小写字母a、b、c等表示数列$\{a_k;\ k=0, 1, \cdots, n, \cdots\}$、$\{b_k;\ k=0, 1, \cdots, n, \cdots\}$、$\{c_k;\ k=0, 1, \cdots, n, \cdots\}$，其中$a_k$、$b_k$、$c_k$等都是实数。为书写简单起见，我们记$a=\{a_k\}$、$b=\{b_k\}$、…而不再列写$k=0, 1, \cdots, n, \cdots$这种通用的约定。

定义 1 设$\mathscr{A}$表示实数数列的全体。如果$a\in\mathscr{A}$、$b\in\mathscr{A}$，我们规定

$$c = a + b \tag{1.2.1}$$

指

$$c_k = a_k + b_k \tag{1.2.2}$$

则 $c = \{c_k\}$ 也是一个数列，因而 $c \in \mathscr{A}$，叫做 a 与 b 之和，运算法则（1.2.1）～（1.2.2）称为数列的加法。定义

$$c = a * b \tag{1.2.3}$$

指

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \tag{1.2.4}$$

则 $c = \{c_k\}$ 也是一个数列，因而 $c \in \mathscr{A}$，叫做 a 与 b 的卷积，运算法则（1.2.3）～（1.2.4）称为数列的乘法。

定理 1 按照定义 1 所定义的加法和乘法，$\mathscr{A}$ 为一交换环。

证明 为了说明 $\mathscr{A}$ 是一交换环，只须证明对于加法 $\mathscr{A}$ 为交换加群，对于乘法 $\mathscr{A}$ 为交换半群，对于加法和乘法适合分配律。

首先，证明 $\mathscr{A}$ 对于加法为交换加群。显然依定义数列的加法满足交换律和结合律。容易看出，如果 $a \in \mathscr{A}$，$b \in \mathscr{A}$，则 $a + b \in \mathscr{A}$，并且

$$a + b = \{a_k + b_k\} = \{b_k + a_k\} = b + a \tag{1.2.5}$$

如果还有 $c \in \mathscr{A}$，则

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= \{a_k + (b_k + c_k)\} = \{(a_k + b_k) + c_k\} \\ &= (a + b) + c \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

这里我们只用到了实数加法的交换律和结合律。

取 $0 = \{0, 0, \cdots, 0, \cdots\}$ 为 $\mathscr{A}$ 中的零元，于是我们有

$$a + 0 = 0 + a = a \tag{1.2.7}$$

另外，记

$$-a = \{-a_k\} \in \mathscr{A}$$

显然有

$$-a + a = a - a = 0 \tag{1.2.8}$$

则 $-a$ 为 a 的负元。由式（1.2.5）～（1.2.8）可以断定，$\mathscr{A}$ 是一

个交换加群。

其次，证明$\mathscr{A}$对乘法为交换半群。

设$a\in\mathscr{A}$，$b\in\mathscr{A}$，则

$$c=a*b\in\mathscr{A}$$

并且

$$c_k=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}b_j \tag{1.2.9}$$

在式（1.2.9）中，令$j=k-i$，则$k-j=i$，而当$j=0$，1，…，k时，$i=k$，$k-1$，…，0，于是有

$$c_k=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}b_j=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=\sum_{i=0}^{k}b_{k-i}a_i$$

从而

$$c=a*b=b*a \tag{1.2.10}$$

等式（1.2.10）说明，数列乘法满足交换律。

现在证明数列乘法也满足结合律，即

$$a*(b*c)=(a*b)*c \tag{1.2.11}$$

依定义

$$a*(b*c)=\left\{\sum_{l=0}^{k}a_{k-l}\cdot\sum_{i=0}^{l}b_{l-i}c_i\right\} \tag{1.2.12}$$

我们规定，当j为负整数时，$b_j=0$，于是

$$\sum_{l=0}^{k}a_{k-l}\cdot\sum_{i=0}^{l}b_{l-i}c_i=\sum_{l=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}(a_{k-l}\cdot b_{l-i})\cdot c_i \tag{1.2.13}$$

再令$j=l-i$，则从式（1.2.13）得

$$\sum_{l=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}(a_{k-l}\cdot b_{l-i})c_i=\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=-i}^{k-i}(a_{k-i-j}\cdot b_j)c_i$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k-i}a_{k-i-j}b_j\right)c_i \tag{1.2.14}$$

于是，由式（1.2.12）～（1.2.14）得式（1.2.11）。而式（1.2.10）

和（1.2.11）表明，$\mathscr{A}$对乘法构成交换半群。

最后，我们证明，$\mathscr{A}$对加法和乘法适合分配律。为此，设 a，b，$c\in\mathscr{A}$，则

$$
\begin{aligned}
(a+b)*c &= \left\{\sum_{j=0}^{k}(a_{k-j}+b_{k-j})c_j\right\} \\
&= \left\{\sum_{j=0}^{k}(a_{k-j}c_j+b_{k-j}c_j)\right\} \\
&= \left\{\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}c_j+\sum_{j=0}^{k}b_{k-j}c_j\right\} \\
&= a*c+b*c \qquad (1.2.15)
\end{aligned}
$$

再由交换性有

$$c*(a+b)=c*a+c*b \qquad (1.2.16)$$

这说明数列加法和乘法适合分配律。

综上所述，我们得出结论，$\mathscr{A}$是一个交换环。

证毕

以上我们说明了数列的全体$\mathscr{A}$构成一个交换环，在这个环中，

$$0=\{0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\}$$

是它的零元，即对每个 $a\in\mathscr{A}$，都有

$$0+a=a$$

而数列

$$1=\{1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots\}$$

是它的主单位元，即对每个 $a\in\mathscr{A}$都有

$$1*a=a*1=a$$

事实上，如果我们用 $\delta_{i,k}$ 表示克隆尼克符号

$$\delta_{i,k}=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

那么

$$1=\{\delta_{0,k}\}$$

并且

$$a * 1 = \left\{ \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}\delta_{0,j} \right\} = \{a_k\} = a$$

特别，对任何实数α，我们记

$$\alpha = \{\alpha, \ 0, \ \cdots, \ 0, \ \cdots\} = \{\alpha\delta_{0,k}\}$$

于是，按照这种看法，实数全体均包含在数列环$\mathscr{A}$中，并且对$a \in \mathscr{A}$，有

$$\alpha * a = \left\{ \sum_{j=0}^{k} \alpha\delta_{0,k-j}a_j \right\} = \{\alpha a_k\}$$

这说明，实数与数列的乘法$\alpha * a$就是a的α倍。需要指出，环$\mathscr{A}$没有零因子，即在$\mathscr{A}$中没有这样的元$a \neq 0$，使得可以找到一个$b \in \mathscr{A}$，并且$b \neq 0$，而且满足

$$a * b = 0 \tag{1.2.17}$$

事实上，如果式（1.2.17）成立，那么，或者$a = 0$，或者$b = 0$。由式（1.2.17）知，对所有$k = 1, 2, \cdots$有

$$\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j = 0 \tag{1.2.18}$$

如果$a \neq 0$，至少有一个标号l，使得$a_l \neq 0$。设l_0是使$a_l \neq 0$的最小整数，那么对$j < l_0$皆有$a_j = 0$。在式（1.2.18）中，可特别取$k = l_0$，得

$$\sum_{j=0}^{l_0} a_{l_0-j}b_j = 0$$

利用a_j的性质有

$$\sum_{j=0}^{l_0} a_{l_0-j}b_0 = a_{l_0}b_0 = 0$$

由于a_{l_0}与b_0都是实数，而$a_{l_0} \neq 0$，必有$b_0 = 0$。然后，在式（1.2.18）中，再取$k = l_0 + 1$，那么

$$\sum_{j=0}^{l_0+1} a_{l_0+1-j}b_j = 0$$

由于已证 $b_0 = 0$，因此同样有

$$a_{l_0}b_1 = 0$$

所以 $b_1 = 0$。

现在假设已证 $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-1} = 0$，然后再在式（1.2.18）中取 $k = l_0 + m$，那么

$$\sum_{j=0}^{l_0+m} a_{l_0+m-j}b_j = 0$$

从而，$a_{l_0}b_m = 0$，于是 $b_m = 0$。

由数学归纳法得知，$b_j = 0$，$j = 0$，1，2，…，于是有 $b = 0$。

在结束这一节的讨论之前，我们指出，如果抛开交换环这个抽象概念，上述讨论其实告诉我们，在实数列的全体组成的集合$\mathscr{A}$中，以数列为元，可以进行加、减、乘三种运算，并且加法和乘法之间还满足分配律。在这个集合中，还有一个0元和主单位元，但它没有零因子。从数列集合$\mathscr{A}$的这些性质来看，就象所有整数形成的一个集合一样。因此说，数列环$\mathscr{A}$很象人们早就知道的整数环。

§3 延迟算子

在前一节，我们讨论了数列环$\mathscr{A}$，它很象整数环。从算术里我们已经知道，由整数出发可以构造分数，从而把整数扩充到有理数，在有理数范围内，加、减、乘、除四则运算都可以施行。类似地考虑，从环$\mathscr{A}$出发，用其中的元我们来构造“分式”，然后对这些“分式”定义加、减、乘、除运算。为简单起见，从现在起，我们把 a、$b \in \mathscr{A}$的乘法记做 $a \cdot b$ 或 ab。

任取$\mathscr{A}$中的两个元 a 和 b，并且 $b \neq 0$，我们按一定法则规

定$\frac{a}{b}$为一个“分式”。所有这样的分式的全体记做$\mathscr{F}$，于是

$$\mathscr{F}=\left\{\frac{a}{b};\ a、b\in\mathscr{A},\ b\neq 0\right\}$$

在$\mathscr{F}$中我们规定

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc \tag{1.3.1}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \tag{1.3.2}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \tag{1.3.3}$$

等式（1.3.1）～(1.3.3）分别定义了“分式”的相等，“分式”的加法和“分式”的乘法，即在$\mathscr{F}$中定义了加法和乘法运算。必须指出，按照式（1.3.2）和（1.3.3）定义的加法和乘法运算，恰好用到了环$\mathscr{A}$没有零因子的性质。因为“分式”只有在“分母”不为零的时候才有意义，而只要“分式”$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$都有意义，即$b\neq 0$、$d\neq 0$，那么$bd\neq 0$，从而式（1.3.2）和（1.3.3）确实有意义。

容易验证，在$\mathscr{F}$中定义的加法和乘法满足交换律、结合律和分配律。现以分配律为例说明。依定义，如果a、b、c、d、e、f都属于$\mathscr{A}$，则

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)&=\frac{a}{b}\cdot\frac{cf+de}{df}\\&=\frac{a(cf+de)}{b(df)}\\&=\frac{a(cf)+a(de)}{b(df)}\\&=\frac{a(cf)}{b(df)}+\frac{a(de)}{b(df)}\\&=\frac{(ac)f}{(bd)f}+\frac{(ae)d}{(bf)d}\end{aligned}$$

再由分式相等的定义有

$$\frac{(ac)\,f}{(bd)\,f}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{(ae)\,d}{(bf)\,d}=\frac{ae}{bf}$$

其实，也可以视$\frac{f}{f}$为单位元，再利用“分式”乘法的定义得上述等式。于是有

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

这就是“分式”加法与乘法运算之间的分配律。

既然在$\mathscr{F}$中可以施行加法运算，那么也可以施行减法 运 算。其实，如果有

$$\frac{x}{y}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

这里，$y\neq 0$，$d\neq 0$，$b\neq 0$，那么依加法定义有

$$\frac{yc+xd}{yd}=\frac{a}{b}$$

然后再由“分式”相等的意义有

$$b\,(xd+yc)=a\,(yd)$$

再由乘法的交换律和分配律有

$$bdx+bcy=ady$$

或者

$$(bd)\,x=(ad-bc)\,y$$

这就是说

$$\frac{x}{y}=\frac{ad-bc}{bd} \tag{1.3.4}$$

按照式（1.3.4）我们定义

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

为$\mathscr{F}$中的减法运算。