

内 容 提 要

本书由全国著名科学家钱伟长所著,全书共分十章,其中格林函数三章,变分法七章,除此之外,还有附录四章。本书为上海工业大学1987年所办辐射和天线研究班应用数学的讲义,参加该研究班的人员有研究生、大学教师和工厂的工程技术人员,内容为该研究班的专业课程的基础部分。

格林函数着重基础理论,也提出了在电磁场理论中的许多二维、三维空间的立用例子。变分法着重变分原理和广义变分原理的基础理论,同时也分别处理了电磁场的散射、波导管计算等变分原理和广义变分原理的广泛应用问题。

本书可以作为数学专业和无线电专业研究生的教材,也可供科研人员和技术人员的工作参考。

责任编辑 金志刚

格林函数和变分法 在电磁场和电磁波计算中的应用

钱伟长 著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 8.75 插页 4 字数 218 000

1989年1月第1版 1989年2月第1次印刷

印数: 1-1,400

ISBN 7-5322-0975-4/0·109

定价: 10.20元

目 录

序言

第一章 边界值问题和格林函数1

1.1 一维边界值问题和格林函数.....1

1.2 Sturm-Liouville 问题的格林函数.....11

1.3 广义格林函数14

1.4 线性算子和格林函数20

1.5 常系数线性微分算子的格林函数22

1.6 算子 $\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} - 1$ 在无穷域中的格林函数23

1.7 算子 $\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} - 1$ 在有限区域内的格林函数26

第二章 二维算子的格林函数29

2.1 算子 ∇^2 (二维)的格林函数.....29

2.2 源象法求格林函数40

2.3 狄利克雷(Dirichlet)问题的格林函数解41

2.4 圆外空间内狄利克雷问题的格林函数45

2.5 亥姆霍兹(Helmholtz)算子的狄利克雷问题48

第三章 高维算子的格林函数.....53

3.1 拉普拉斯算子的格林函数53

3.2 球坐标中算子 $-\alpha^2 \nabla^2 + 1$ 的格林函数	61
3.3 利用格林函数求解纯量波函数方程	64
3.4 球坐标中波动方程的格林函数	66
3.5 自由空间的格林函数	76
3.6 矢量波动方程	79
3.7 格林定理的矢量表达式和波导管问题的应用	79
3.8 矢量波动方程的一般解	81
3.9 并矢格林函数和纯格林函数的关系	83
第四章 变分原理的一般知识	84
4.1 变分命题和一般极值问题	84
4.2 泛函的极值问题和欧拉方程, 变分法的基本定理	91
4.3 自然边界条件	98
4.4 函数的极值和拉氏乘子法	101
4.5 变分约束条件, 拉氏乘子法, 广义变分原理	118
4.6 变分约束条件是另一函数时的变分泛函问题	121
4.7 具有高阶导数的泛函极值问题	125
4.8 具有重积分的变分原理	127
4.9 求解积分方程的变分法	131
第五章 特征值问题、共振频率和能级	137
5.1 Sturm-Liouville 方程的特征值	137
5.2 Sturm-Liouville 方程的变分形式和 Rayleigh-Ritz 近似变分法	139
5.3 Helmholtz 纯量波方程和共振频率	144
5.4 Dirichlet 或 Neumann 型边界条件下的广义变分原理	145
5.5 Schrödinger 方程的能级变分计算	148

第六章 衍射和辐射问题	151
6.1 衍射问题	151
6.2 平面波受半无限板阻挡的衍射效应	151
6.3 衍射体在 $r=a$ 的小球内的衍射问题	158
6.4 积分方程解	158
6.5 相变的积分计算	162
6.6 衍射波幅的变分计算	164
6.7 反射面引起的散射的变分计算	165
6.8 边界近似的积分方程变分原理	168
6.9 辐射问题的变分计算	169
第七章 导体表面对电磁波散射问题的变分原理	171
7.1 散射波幅的积分方程	171
7.2 散射波幅的变分原理	175
7.3 圆柱阻挡物的散射问题(一)	177
7.4 圆柱阻挡物的散射问题(二)	182
7.5 电磁场能量从边界面散射外流功率 U 的变分法	185
第八章 完全导体屏幕上微孔对电磁波的衍射	188
8.1 当有一对称面时 Maxwell 方程解的对称性	188
8.2 边界条件	190
8.3 积分方程的存在定理	193
8.4 衍射波幅的变分原理	196
第九章 和空腔及波导有关的一般变分原理	202
9.1 共振频率的变分原理	202
9.2 波导的传播常数 γ 的变分原理	204

第十章 任意截面的柱形波导管截止频率的近似计算	207
10.1 一般知识	207
10.2 波导管中电磁波传播的理论	208
10.3 计算截止频率的有关变分原理	213
10.4 一系列不等式	217
10.5 从近似场函数计算特征值	219
附录一 矢量代数和矢量分析	222
A1 矢量加法	222
A2 矢量乘法	222
A3 三矢乘积	225
A4 四矢乘积	225
A5 矢量分析	226
A6 各种积分定理	227
附录二 矢量空间、线性算子	231
B1 矢量空间	231
B2 线性算子	235
B3 特征矢量和特征值	236
B4 对偶空间的线性算子	236
B5 连续系统的线性算子	238
B6 狄喇克函数	241
附录三 并矢分析	244
C1 并矢的定义	244
C2 并矢和矢量的外积和内积	245
C3 两个并矢恒等的条件	246

C 4	单位并矢.....	247
C 5	两个并矢的内积.....	247
C 6	有关单位并矢的两个定理.....	247
C 7	倒并矢或倒易并矢.....	248
C 8	转置并矢.....	248
C 9	∇ 算子对并矢的运算.....	249
附录四 狄喇克记号		251
D 1	狄喇克记号介绍.....	251
D 2	基矢的改变.....	253
D 3	线性算子的狄喇克记号.....	254
D 4	特征矢量和特征值.....	255
D 5	一个算子的谱表示.....	256
D 6	厄密算子的诸定理.....	256

边界值问题和格林函数

§ 1.1 一维边界值问题和格林函数

格林 (Green) 函数既可以用来求解振动、波等动力问题, 也可以用来求解许多线性的边界值问题。用格林函数或影响函数, 我们可以把微分方程的解用积分来表示。让我们研究一维问题, 这类问题都是常微分(线性的) 方程。先让我们举三个例子来说明什么是格林函数, 以及格林函数的一些共同特点。

(1) 单弦受横载的形状

设有一拉紧的单弦 AB , 弦中拉力为 T , 受分布载荷 $q(x)$, 如图 1.1 所示。

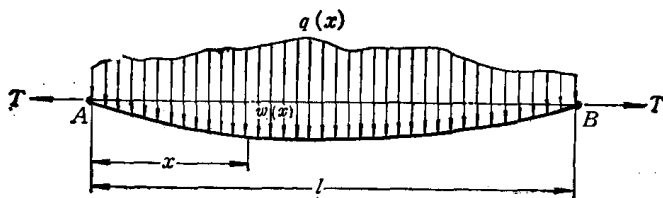


图 1.1 单弦的拉力及分布载荷

其平衡方程为

$$T \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x) \quad (1.1)$$

其端点条件为

$$w=0 \quad \text{在 } x=0 \text{ 和 } x=l \quad (1.2)$$

积分一次,得

$$\frac{dw}{dx} = - \int_0^x \frac{1}{T} q(\xi) d\xi + C \quad (1.3)$$

其中 C 为积分常数,再积分一次,得

$$w(x) = - \int_0^x d\xi \int_0^\xi \frac{1}{T} q(\xi_1) d\xi_1 + Cx + D \quad (1.4)$$

其中 D 为另一积分常数, C, D 可以用端点条件(1.2)决定,其结果为

$$C = \frac{1}{l} \int_0^l d\xi \int_0^\xi \frac{1}{T} q(\xi_1) d\xi_1, \quad D=0 \quad (1.5)$$

所以, (1.1) 式在端点条件(1.2)式下的解,可以写成

$$w(x) = \frac{x}{l} \int_0^l d\xi \int_0^\xi \frac{1}{T} q(\xi_1) d\xi_1 - \int_0^x d\xi \int_0^\xi \frac{1}{T} q(\xi_1) d\xi_1 \quad (1.6)$$

用分部积分的办法,上式可以简化为

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{x}{l} \int_0^l (l-\xi) \frac{1}{T} q(\xi) d\xi - \int_0^x (x-\xi) \frac{1}{T} q(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x \frac{\xi}{l} (l-x) \frac{1}{T} q(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{x}{l} (l-\xi) \frac{1}{T} q(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.7)$$

如果引进一阶导数不连续的函数 $G(x, \xi)$

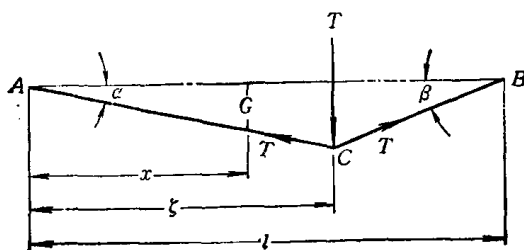
$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{l} (l-x) & 0 \leq \xi \leq x \\ \frac{x}{l} (l-\xi) & x \leq \xi \leq l \end{cases} \quad (1.8)$$

则(1.7)式可以简化为

$$w(x) = \int_0^l \frac{1}{T} q(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (1.9)$$

$G(x, \xi)$ 称为本题的格林函数(Green Function)。

从物理上讲, $G(x, \xi)$ 是当单弦在 ξ 点作用着一个集中力, 其值为 T , 使弦在 x 点所产生的挠度 (见图 1.2), 单弦在 C 点的平衡条件为

图 1.2 弦在 x 点所产生的挠度

$$T \sin \alpha + T \sin \beta = T \quad (1.10)$$

在小位移条件下, $\sin \alpha \doteq \tan \alpha$, $\sin \beta \doteq \tan \beta$, 这样的近似, 在导出平衡条件时, 业已使用。于是, (1.10) 式导出下列近似式:

$$\tan \alpha + \tan \beta = 1 \quad (1.11)$$

设 C 点的位移为 G_C , 则有几何条件

$$G_C = \xi \tan \alpha = (l - \xi) \tan \beta \quad (1.12)$$

从 (1.11)、(1.12) 式解出 $\tan \alpha$ 和 $\tan \beta$ 。其结果为

$$\tan \alpha = \frac{1}{l} (l - \xi), \quad \tan \beta = \frac{\xi}{l} \quad (1.13)$$

于是在 $0 \leq x \leq \xi$ 中 x 点上的位移或挠度 (图 1.2) 为

$$G(x, \xi) = x \tan \alpha = \frac{x}{l} (l - \xi) \quad 0 \leq x \leq \xi \quad (1.14)$$

在 $\xi \leq x \leq l$ 中的 x 点上的位移为

$$G(x, \xi) = (l - x) \tan \beta = \frac{\xi}{l} (l - x) \quad \xi \leq x \leq l \quad (1.15)$$

这和 (1.8) 式中的结果相同。

如果把分布载荷 $q(\xi)$ 在 $0 \leq \xi \leq l$ 中的作用, 看作为无穷个集中载荷 $q(\xi) d\xi$ 的作用的总和, 则图 1.1 的单弦在任意点 x 上的位移立刻可以用积分形式表示为 (1.9) 式。

我们也应该指出, G 是

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = -\delta(\xi - x) \quad (1.16)$$

在端点条件

$$G=0 \quad \text{在 } x=0 \text{ 和 } x=l \quad (1.17)$$

的解, 而 $0 \leq \xi \leq l$, $\delta(t)$ 是狄喇克 δ 函数, 它业已在附录二中详细论证, 这里再作简单介绍:

$\delta(t)$ 不是通常意义的函数. 它除了在 $t=0$ 处外, 到处都等于零; 在 $t=0$ 处, 并没有定义值. 但对于任意联连函数 $f(t)$ 而言, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (1.18)$$

特别当 $f(t)=1$ 时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.19)$$

它可以看作为下述函数在极限条件下的函数, 即在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $d(t) \rightarrow \delta(t)$, 其中

$$\left. \begin{aligned} d(t) &= \frac{1}{\epsilon}, \quad -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2} \\ d(t) &= 0 \quad \text{其它各点} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

而 $\delta(\xi-x)$ 即为 $d(\xi-x)$ 的极限值, 即在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $d(\xi-x) \rightarrow \delta(\xi-x)$, 其中

$$\left. \begin{aligned} d(\xi-x) &= \frac{1}{\epsilon} \quad \xi - \frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \xi + \frac{\epsilon}{2} \\ d(\xi-x) &= 0 \quad \text{其它各点} \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

用(1.1)式相同的积分过程, 积分(1.16)式, 在(1.17)式的条件下, 得

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{x}{l} \int_0^l (l-x_1) \delta(\xi-x_1) dx_1 \\ &\quad - \int_0^x (x-x_1) \delta(\xi-x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

在用了 $\delta(t)$ 的定义以后, 上式立刻化为 (1.8) 式. 这同样证明了 $G(x, \xi)$ 是(1.1)式的载荷密度 $\frac{1}{l} q(x)$ 改为在 ξ 点的单位集

中载荷时的解.

(2) 决定单弦受迫振动时振幅的方程解

单弦受迫振动时,对于外加频率的振幅方程可以写成

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi = -f(x) \quad 0 < x < l \quad (1.23)$$

其固定端点条件为

$$\phi(0) = \phi(l) = 0 \quad (1.24)$$

其中 $f(x)$ 和施加的强迫外力的振幅有关, 而 k^2 则和强迫外力的频率以及弹性常数有关.

我们可以用变参数法求解, 设其解取下列形式

$$\phi(x) = A(x)\sin kx + B(x)\cos kx \quad (1.25)$$

并假设

$$A'\sin kx + B'\cos kx = 0 \quad (1.26)$$

于是

$$\phi'(x) = kA \cos kx - kB \sin kx \quad (1.27)$$

再微分一次, 得

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= kA' \cos kx - kB' \sin kx \\ &\quad - k^2 A \sin kx - k^2 B \cos kx \end{aligned} \quad (1.28)$$

把(1.25)、(1.28)式代入(1.23)式, 得

$$kA' \cos kx - kB' \sin kx = -f(x) \quad (1.29)$$

于是, 我们有 A' 、 B' 的两个联立方程式(1.26) 和(1.29)式, 解 A' 、 B' , 得

$$\left. \begin{aligned} A'(x) &= -\frac{1}{k} f(x) \cos kx \\ B'(x) &= \frac{1}{k} f(x) \sin kx \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

其解为

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= -\frac{1}{k} \int_0^x f(x_1) \cos kx_1 dx_1 + A_1 \\ B(x) &= \frac{1}{k} \int_0^x f(x_1) \sin kx_1 dx_1 + B_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

其中 A_1, B_1 为待定积分常数, (1.23) 式的解 (1.25) 式可以写成

$$\phi(x) = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx + \int_0^x \frac{f(x_1) \sin k(x_1 - x)}{k} dx_1 \quad (1.32)$$

利用端点条件 $\phi(0) = 0$, 给出

$$B_1 = 0 \quad (1.33)$$

利用端点条件 $\phi(l) = 0$, 给出

$$A_1 = - \int_0^l f(x_1) \frac{\sin k(x_1 - l)}{k \sin kl} dx_1 \quad (1.34)$$

所以, (1.23) 式在 (1.24) 式条件下的解为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{k} \int_0^x f(x_1) \sin k(x_1 - x) dx_1 \\ &\quad - \frac{\sin kx}{k \sin kl} \int_0^l f(x_1) \sin k(x_1 - l) dx_1 \end{aligned} \quad (1.35)$$

上式可以简化为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^x f(\xi) \frac{\sin k\xi \sin k(l-x)}{k \sin kl} d\xi \\ &\quad + \int_x^l f(\xi) \frac{\sin kx \sin k(l-\xi)}{k \sin kl} d\xi \end{aligned} \quad (1.36)$$

或可以用格林函数的形式写成

$$\phi(x) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (1.37)$$

其中格林函数 $G(x, \xi)$ 为

$$\left. \begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{\sin k\xi \sin k(l-x)}{k \sin kl} & 0 \leq \xi \leq x \\ G(x, \xi) &= \frac{\sin kx \sin k(l-\xi)}{k \sin kl} & x \leq \xi \leq l \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

只要 $\sin kl \neq 0$, 上式的解成立. 如果 $\sin kl = 0$, 则 k^2 是本问

题的齐次解的特征值.

我们也可以把 $G(x, \xi)$ 看作为下列方程之解

$$\begin{cases} G'' + k^2 G = -\delta(\xi - x) \\ G(0) = G(l) = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

也可以把 $G(x, \xi)$ 看作是有一集中单位力(振动的)作用在 ξ 点时的单弦各点 x 的振幅解.

(3) 梁的横弯曲

梁在横向分布的载荷 $q(x)$ 下发生的位移为 $w(x)$, 其平衡方程为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{1}{EI} q(x) \quad (1.40)$$

其中 EI 为梁的抗弯刚度. 设梁的两端都是简支的, 其端点条件可以写成

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0 \quad (1.41)$$

(1.40)式的一般解可以写成

$$w''(x) = \frac{1}{6} \int_0^x \frac{1}{EI} q(\xi) (\xi - x)^3 d\xi + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (1.42)$$

积分常数 A, B, C, D 可以用(1.41)求得, 微分两次, 得

$$w(x) = \int_0^x \frac{1}{EI} q(\xi) (\xi - x) d\xi + 6Ax + 2B \quad (1.43)$$

端点条件(1.41)式给出

$$D=0, B=0 \quad (1.44a, b)$$

$$w(l) = \frac{1}{6} \int_0^l \frac{1}{EI} q(\xi) (\xi - l)^3 d\xi + Al^3 + Cl = 0 \quad (1.44c)$$

$$w''(l) = \int_0^l \frac{1}{EI} q(\xi) (\xi - l) d\xi + 6Al = 0 \quad (1.44d)$$

从(1.44c、d)式解出 A, C , 得

$$A = \frac{1}{6l} \int_0^l \frac{1}{EI} q(\xi) (l - \xi) d\xi \quad (1.45a)$$

$$C = -\frac{1}{6l} \int_0^l \frac{1}{EI} q(\xi) \xi(l-\xi)(2l-\xi) d\xi \quad (1.45b)$$

把(1.44a, b)式, (1.45a, b)式代入(1.42)式, 经整理后可以写成

$$w(x) = \frac{1}{6} \int_0^x \frac{1}{EI} q(\xi) (\xi-x)^3 d\xi + \frac{1}{6l} \int_0^l \frac{1}{EI} q(\xi) x(l-\xi) \{x^2 - \xi(2l-\xi)\} d\xi \quad (1.46)$$

也可以写成

$$w(x) = \int_0^l \frac{1}{EI} q(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (1.47)$$

其中格林函数 $G(x, \xi)$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{6l} \xi(l-x) \{\xi^2 - x(2l-x)\} & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{1}{6l} x(l-\xi) \{x^2 - \xi(2l-\xi)\} & \xi \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.48)$$

同样, 我们也可以证明, $G(x, \xi)$ 是下式的解

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 G}{dx^4} &= -\delta(\xi-x) \\ G(0) &= G''(0) = G(l) = G''(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

从上面三个一维的非齐次的常微分线性方程的边界值问题的求解中, 我们都找到了格林函数。实际上, 所有一维非齐次线性方程的边界值问题, 都能找到相应的格林函数, 而且这些格林函数, 都有下列五种特性:

特性一 如果我们用线性算子 $\mathcal{L}$ 来表示这类微分方程, 它们是

$$\mathcal{L}\phi(x) = -f(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.50)$$

其中 $f(x)$ 为非齐次项, 在各种齐次边界条件下, 其解用有关格林函数 $G(x, \xi)$ 表示

$$\phi(x) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (1.51)$$

则 $G(x, \xi)$ 一般是

$$\mathcal{L}G(x, \xi) = -\delta(\xi - x) \quad (1.52)$$

在相同边界条件下的解。

也即是说: $G(x, \xi)$ 在 $0 \leq x \leq \xi$, 和 $\xi < x \leq l$ 中都是齐次方程 $\mathcal{L}G = 0$ 的解, 但在 $x = \xi$ 处, $G(x, \xi)$ 则不是齐次方程的解。因此, 在 $x = \xi$ 这一点, 高阶导数一般是不连续的。例如, 单弦问题的解(1.8)式中, 一阶导数不连续。单弦受迫振动的振幅问题的 $G(x, \xi)$ (1.38) 式中, 一阶导数也不连续。梁的弯曲问题的解(1.48)中, 三阶导数是不连续的。

特性二 $G(x, \xi)$ 在 $x = \xi$ 上是连续的。

特性三 对二阶的 $\mathcal{L}$ 而言, $\frac{d}{dx} G(x, \xi)$ 在 $x = \xi$ 都不连续, 但如称

$$G'(\xi^-, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{d}{dx} G(x, \xi)$$

$$G'(\xi^+, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{d}{dx} G(x, \xi)$$

则很易证明

$$G'(\xi^+, \xi) - G'(\xi^-, \xi) = -1 \quad (1.53)$$

以弦的问题为例, 从(1.8)式, 有

$$G'(\xi^+, \xi) = -\frac{\xi}{l}, \quad G'(\xi^-, \xi) = 1 - \frac{\xi}{l} \quad (1.54)$$

即可证明(1.53)式。

又以弦的强迫振动的振幅问题为例, 从(1.38)式

$$\begin{aligned} G'(\xi^+, \xi) &= -\frac{\sin k\xi \cos k(l-\xi)}{\sin kl} \\ G'(\xi^-, \xi) &= \frac{\cos k\xi \sin k(l-\xi)}{\sin kl} \end{aligned} \quad (1.55)$$

也可以证明(1.53)式。

对四阶的 $\mathcal{L}$ 而言, $\frac{d^3}{dx^3} G(x, \xi)$ 在 $x = \xi$ 上不连续, 而且

$$\begin{aligned}
 G'''(\xi^-, \xi) &= \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{d^3}{dx^3} G(x, \xi) \\
 G'''(\xi^+, \xi) &= \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{d^3}{dx^3} G(x, \xi)
 \end{aligned}
 \quad (1.56)$$

则很易证明

$$G'''(\xi^+, \xi) - G'''(\xi^-, \xi) = -1 \quad (1.57)$$

这种结果同样很易用梁弯曲的 $G(x, \xi)$, 即(1.48) 式来证明的。

特性四 格林函数满足端点条件, 这点在上面都已证明了。

特性五 格林函数在两段中是对称的, 也即是说, 把第一段 ($0 \leq x \leq \xi$) 的 $G(x, \xi)$ 中的 x, ξ 对换, 即为第二段 ($\xi \leq x \leq l$) 的 $G(x, \xi)$ 表达式。这个特性有时也称“互易定理”(Reciprocal Theorem)。

互易定理 在 x_1 点上的单位集中载荷所产生的 x_2 点的位移 $G(x_2, x_1)$ 等于在 x_2 点上的单位集中载荷所产生的 x_1 点的位移 $G(x_1, x_2)$ 。

证明: 以单弦受横载的位移为例, $G(x, \xi)$ 见(1.8)式。在 x_1 点上的单位集中载荷所产生的 x_2 点的位移为 $G(x_2, x_1)$, 这里 $\xi = x_1, x = x_2$ 而且设 $0 < x_2 < x_1$, 于是 x_2 在第一段内。所以, 从(1.8)式

$$G(x_2, x_1) = \frac{x_1}{l} (l - x_2) \quad (1.58)$$

同样在 x_2 点上的单位集中载荷所产生的 x_1 点的位移为 $G(x_1, x_2)$, 这里的 $\xi = x_2, x = x_1$, 而且 $x_2 < x_1 < l$, 于是 x_1 在第二段内。所以, 从(1.8)式

$$G(x_1, x_2) = \frac{x_1}{l} (l - x_2) \quad (1.59)$$

这就证明了互易定理

$$G(x_2, x_1) = G(x_1, x_2) \quad (1.60)$$

这个证明主要依靠, $G(x_2, x_1)$ 和 $G(x_1, x_2)$ 在两段不同区域内,

而这两段中的 $G(x, \xi)$ 表达式是互易的, 其它例子亦然。

§ 1.2 Sturm-Liouville 问题的格林函数

非齐次 Sturm-Liouville 方程为

$$(p\phi')' - q\phi + \lambda\rho\phi = -f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (1.61)$$

让我们先研究有没有可能求得这类问题的格林函数, 式中 $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $\rho(x)$ 都是 x 的函数, λ 是常数。

让我们研究下列形式的解

$$\phi(x) = \int_a^b f(y) G(x, y) dy \quad (1.62)$$

利用(1.61)式, 上式可以改写为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= - \int_a^b [(p\phi')' - q\phi + \lambda\rho\phi] G dy \\ &= - \lim_{y \rightarrow \xi^-} \int_a^y [(p\phi')' - q\phi + \lambda\rho\phi] G dy \\ &\quad - \lim_{y \rightarrow \xi^+} \int_y^b [(p\phi')' - q\phi + \lambda\rho\phi] G dy \end{aligned} \quad (1.63)$$

分部积分给出

$$\begin{aligned} \int_a^y [(p\phi')' - q\phi + \lambda\rho\phi] G dy &= [p(\phi'G - G'\phi)]_a^y \\ &\quad + \int_a^y [(pG')' - qG + \lambda\rho G] \phi dy \end{aligned} \quad (1.64a)$$

$$\begin{aligned} \int_y^b [(p\phi')' - q\phi + \lambda\rho\phi] G dy &= [p(\phi'G - G'\phi)]_y^b \\ &\quad + \int_y^b [(pG')' - qG + \lambda\rho G] \phi dy \end{aligned} \quad (1.64b)$$

这里必须指出, G 满足齐次方程

$$(pG')' - qG + \lambda\rho G = 0 \quad a \leq x < \xi, \quad \xi < x \leq b \quad (1.65)$$

同时, 我们考虑 G 和 ϕ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处, 满足齐次边界条件, 使

$$p(\phi'G - G'\phi)|_a = 0 \quad p(\phi'G - G'\phi)|_b = 0 \quad (1.66)$$