高等专科学校教材

高等数学

下册

刘德有　夏茂辉　主编

机械工业出版社

高等专科学校教材

高等数学

下册

刘德有　夏茂辉　主编
金燕生　岳德权　副主编
姚文起　刘德有　夏茂辉
金燕生　岳德权　王知人　编
赵晓冬　主审

机械工业出版社

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》编写的。

本书分上、下两册出版。下册内容为矢量代数与空间解析几何简介；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数；微分方程。各章末附有部分习题和习题答案。

本书内容简洁，说理浅显，通俗易懂，例题类型较多，便于教学；同时注意贯彻理论联系实际的原则。

本书可作为三年制高等专科学校高等数学教材，也可供经济、工商、管理类本科、职工大学、函授大学等选作教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　下册/刘德有，夏茂辉主编. -北京：机械工业出版社，1998.3

高等专科学校教材

ISBN 7-111-05850-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘…②夏…　Ⅲ.高等数学-高等学校：专业学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（97）第16955号

出 版 人：马九荣（北京市百万庄南街1号　邮政编码100037）
责任编辑：张淑琴　版式设计：王　颖　责任校对：肖新民
封面设计：郭景云　责任印制：卢子祥
北京市密云县印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1998年1月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/32·8.125印张·177千字
0 001—7000　册
定价：12.00元

前　言

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》编写的。

本书分上、下两册出版。下册内容为：空间解析几何与矢量代数简介；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数；微分方程。各章中给出了习题、复习题及部分习题和复习题答案。

本书的特点是：深入浅出、通俗易懂、层次清楚、重点突出，叙述详略适当，例题较多，便于教学和自学。

全书基本内容按160学时（包括习题课）编写的。其中带“*”号的内容供不同专业的需要选用。本书可供三年制高等专科学校教学使用；也可作为经济、工商、管理、财会等类本科和职工大学、函授大学等的教材或参考书；亦可供工程技术人员或自学者选用。

本书下册由赵晓冬主审。在编写过程中得到燕山大学数学教研室田乃硕教授、唐宗贤教授和其他老师及成人教育学院有关领导帮助和指导，在此，我们一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不足之处或错误在所难免，敬请使用本书的教师、学生和读者批评指正。

编　者

目 录

第七章　矢量代数与空间解析几何简介

空间解析几何是通过空间直角坐标系，把空间的点与由三个有序实数组成的数组构成一一对应关系，把空间的曲面和曲线用三元方程来表示，即把几何图形与解析表达式联系起来，从而可用代数方法研究几何问题。

本章分为两部分，首先建立空间直角坐标系，并引进在工程技术上有广泛应用的矢量(这里主要介绍矢量的加法、减法及乘法等运算)概念，然后以矢量为工具来讨论空间中的平面和直线，最后讨论一些常见的简单曲面和曲线的方程及图形。

第一节　空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，使得平面上的点与一对有序的实数组对应起来，从而确定了平面上点的位置。为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间点与数组之间的联系。具体讨论如下：

一、空间点的直角坐标

从空间某一定点 O，作三条互相垂直的直线 Ox、Oy、Oz，它们都以 O 为原点且一般有相同的长度单位。这三条直线分别叫 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为坐标轴；每两个坐标轴所在的平面 xOy、yOz、zOx 叫做坐标平面，见图7-1。

坐标轴的正方向要符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大

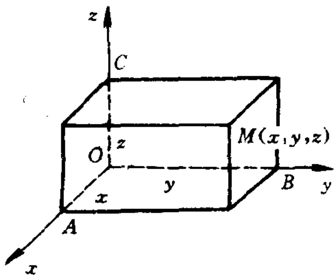

图 7-1

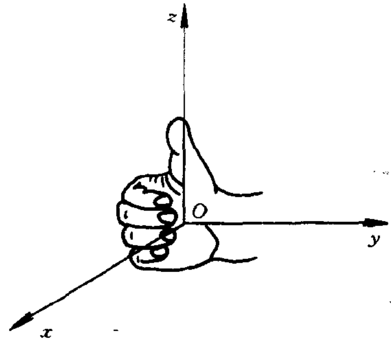

图 7-2

拇指的指向就是 z 轴的正向，见图 7-2。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系。

三个坐标面 xOy、yOz、zOx 把空间分成八个部分，每一部分称为卦限。我们把含有三个坐标轴正向的那个卦限称为第 Ⅰ 卦限。在 xOy 平面的上部按逆时针方向旋转，又依次得到第 Ⅱ、第 Ⅲ 和第 Ⅳ 卦限，在 xOy 平面下部与第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限相对的分别为第 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限。

取定了空间直角坐标系后，就可以建立空间点与有序数组之间的对应关系。

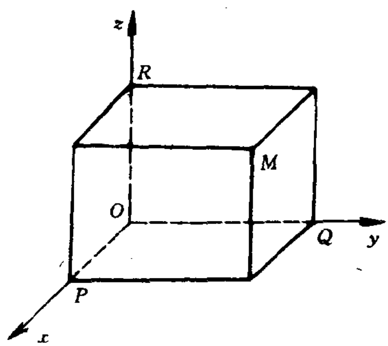

图 7-3

设 M 为空间中的一点，过 M 点作三个平面分别垂直三条坐标轴，它们与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的交点依次为 P、Q、R。设 P、Q、R 三点在三个坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，这样空间的点 M 就唯一地

确定了一组有序数组 x、、z，这个数组称为 M 点的坐标，记为 (x,y,z)。x、y、z 分别称为横坐标、纵坐标和竖坐标，见图 7-3。

二、两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M(x,y,z)$ 为空间两个已知点，为了用两点的坐标来表达它们之间的距离 d，我们过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，形成一个长方体，见图 7-4。

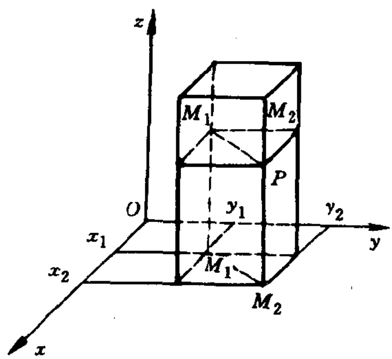

图 7-4

其中 M_1M_2 为长方体的一个对角线，由勾股定理知

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PM_2|^2$$
$$= |M_1'M_2|^2 + |PM_2|^2$$

由于 $$|M_1'M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$|PM_2|^2 = (z_2 - z_1)^2$$

所以

$$d = |M_1M| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间距离公式。

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

习　题　7-1

1. 在空间直角坐标系中描出下列各点：

$A(1,2,3)$、$B(-2,3,4)$、$C(2,-3,-4)$

$D(3,4,0)$、$E(0,4,3)$、$F(3,0,0)$

2. 求下列各对点之间的距离：

(1) $(0,0,0)$、$(2,3,4)$

(2) $(-2,3,-4)$、$(1,0,3)$

(3) $(4,-2,3)$、$(-2,1,3)$

3. 求点 $M(4,3,5)$ 到各坐标轴的距离。

4. 在 yOz 面上，求与三个已知点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点。

第二节　矢量及其运算

一、矢量概念

在工程技术中经常遇到一些物理量，如位移、速度、加速度、力、力矩等，它们不但有大小，而且有方向。这种既有大小又有方向的量叫矢量。

矢量常用黑体字母来表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{F}$，或用一个上面加箭头的字母来表示，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{V}$、$\vec{F}$，等等。

在数学上，往往可用一个有方向的线段来表示矢量，见图 7-5。有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向。起点为 A，终点为 B 的矢量记为 $\overrightarrow{AB}$。

图　7-5

矢量的大小叫做矢量的模，如矢量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$。模等于 1 的矢量叫做单位矢量。模等于零的矢量叫做零矢量，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向是任意的。与矢量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的矢量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，记为 $-\boldsymbol{a}$。

许多物理问题中所遇到的矢量常常与起点无关，所以我

们把方向相同、长度相等的矢量都看作是相等的。因此,一个矢量在保持长度和方向不变的条件下可以自由平移,这种矢量称为自由矢量。

二、矢量的加减法及数量与矢量的乘法

由于力、速度等相加时都是按照平行四边形法则进行的,所以两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的加法定义如下:

定义 1 将矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,则从起点到平行四边形的对角顶点的矢量就称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,见图 7-6。

这是两矢量加法的平行四边形法则。两矢量的加法还可以按三角形法则进行。即平移矢量 $\boldsymbol{b}$,将矢量 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点上去,则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的矢量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,见图 7-7。

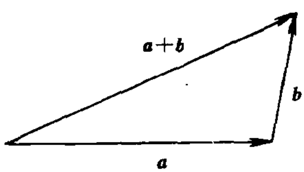

图 7-6

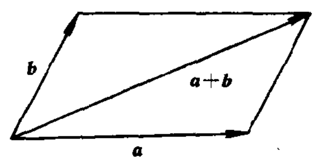

图 7-7

定义 2 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负矢量 $(-\boldsymbol{b})$ 的和:$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。

定义 3 设 λ 是一个实数,矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个矢量:它的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;当 $\lambda>0$ 时,它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同;当 $\lambda<0$ 时,它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反;当 $\lambda=0$ 时 λ 是一个零矢量。

矢量的加减法与矢量和数量的乘法满足:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \qquad \text{(交换律)}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \qquad \text{(结合律)}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \qquad \text{(结合律)}$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}&=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}\\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(分配律)}$$

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

由矢量与数量乘积的定义知：若$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行。反之，若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则存在实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

例 1 设$\boldsymbol{a}^0$为与$\boldsymbol{a}$同方向的单位矢量，验证

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \qquad (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$$

证 由矢量与数量乘积的定义知：由于$|\boldsymbol{a}|>0$，所以$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$与$\boldsymbol{a}^0$的方向相同，即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$与$\boldsymbol{a}$的方向相同；又因$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$的模是$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}^0|=|\boldsymbol{a}|$，即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$与$\boldsymbol{a}$的模也相同。因此，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$。由$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}>0$，得：

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

此式说明：一个非零矢量除以它的模是一个单位矢量。

三、两个矢量的数量积

设某一物体在一固定不变的力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从点M_1移动点M_2，用$\boldsymbol{r}$表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$，则力$\boldsymbol{F}$所做的功为

$$w=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$$

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{r}$的夹角，见图 7-8。

由此，我们看到两个矢量$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{r}$确定了一个数量

$|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$，为此我们引入如下定义：

定义 4　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（点积或内积）记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。且

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

其中 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之夹角。

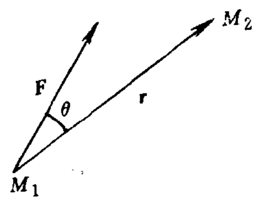

图　7-8

由数量积的定义可推得：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$。

这是因为夹角 $\theta = 0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2\cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2$$

(2) 对于不为零的两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，那末 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直；反之，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，那末 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\cos\theta = 0$，从而 $\theta = \frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直；反之，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，那末 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$\cos\theta = 0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = 0$。

(3) 当 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$。

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。

(5) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

四、两个矢量的矢量积

定义 5　两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积定义为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\boldsymbol{n}^0$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$\boldsymbol{n}^0$ 是同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的单位矢量，其方向按从 $\boldsymbol{a}$ 转到 $\boldsymbol{b}$ 的右手规则来确定，见图 7-9。

注意，两矢量的矢量积是一个矢量，并且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，在几何上表示以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向垂直于这个平行四边形所在的平面，见图 7-9。

矢量积在物理学中应用很广，可用来表示力矩及线速度与角速度的关系等。

从矢量积的定义可以推出下面的性质：

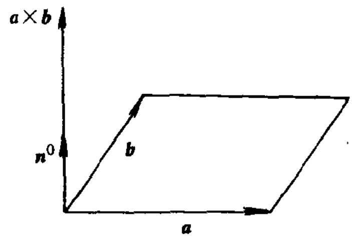

图 7-9

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。

(2) $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$。

这是因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的夹角为 0 或 π，所以有 $|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{a})|=|\lambda||\boldsymbol{a}|^2\sin\theta=0$。

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$。 （$\lambda$ 为常数）

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$。 （分配律）

证明略。

(5) 两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$。

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\sin\theta=0$，从而 $\theta=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行；反之，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行，那末 $\theta=0$ 或 π，即 $\sin\theta=0$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$。

五、矢量的混合积

定义 6 三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所构成的数量

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

称为这三个矢量的混合积，记作 $[\boldsymbol{abc}]$，如图 7-10 所示。

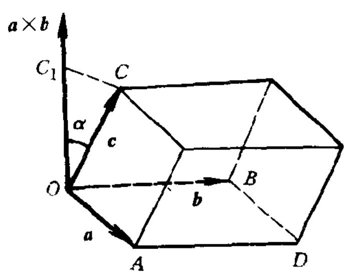

图 7-10

矢量的混合积有下述几何意义：混合积的绝对值

表示以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积。

习　题　7-2

1. 在平行四边形 $ABCD$ 内，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点。

2. 试证：三角形两边中点的联线平行于第三边且等于第三边的一半。

3. 已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{2}{3}\pi$，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；(3)$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

第三节　矢量的分解与矢量的坐标

一、矢量在轴上的投影

首先来确定空间两轴之间的夹角。

如果两轴相交，它们必在同一平面内，我们就把两轴正向之间不大于 π 的正角作为两轴的夹角。

如果两轴不相交，可在空间任取一点 P，过 P 作两条有向直线，分别与两轴平行且同向，我们就把这两条相交于 P 的有向直线的夹角作为两轴的夹角。

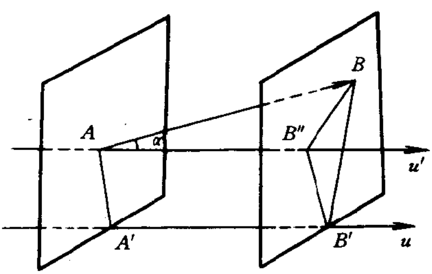

图　7-11

设已知空间一个矢量 $\overrightarrow{AB}$ 及一轴 $\boldsymbol{u}$，过点 A 与 B 各作平面垂直于轴 $\boldsymbol{u}$，分别交轴 $\boldsymbol{u}$ 于点 $A'B'$（图 7-11），则轴 $\boldsymbol{u}$ 上有向线段 $A'B'$ 的值称为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影，记为 $\boldsymbol{Prj_u}\,\overrightarrow{AB}=A'B'$，它是一

个数量。

关于矢量的投影有下面两个定理：

定理 1 矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影等于矢量$\overrightarrow{AB}$的模 $|\overrightarrow{AB}|$ 乘上轴 u 与矢量$\overrightarrow{AB}$间的夹角 α 的余弦：

$$Prj_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$$

定理 2 两个矢量的和在某一轴上的投影等于这两个矢量在该轴上的投影的和，即

$$Prj_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = Prj_u\boldsymbol{a}_1 + Prj_u\boldsymbol{a}_2$$

证明略。

二、矢量的分解与矢量的坐标

现在我们来确定矢量的坐标。任取一个直角坐标系 O_{xyz}，以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 轴正向的单位矢量，并称它们为这一坐标系的基本单位矢量。

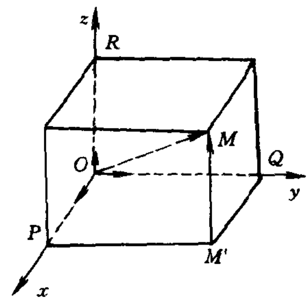

图 7-12

设矢径 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$，终点 M 的坐标为(x, y, z)。过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面，交于 P、Q、R（图 7-12）。根据矢量的加法

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M}$$

但 $$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OR}$$

所以 $$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

矢量$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$分别称为矢量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 在 x、y、z 轴上的分矢量。根据数与矢量的乘法得：

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k},$$

因此有 $$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

这个式子称为矢量 $\boldsymbol{r}$ 的分解式。其中 x、y、z 三个数是矢量 $\boldsymbol{r} =$