实变函数

江 澤 坚 編

人民教育出版社

本講义是按照前高等教育部1956年审定的綜合大學数学專业(四年制)实变函数教学大綱編写的，曾在东北人民大学試教过几次。本書內容包括集合，欧氏空間，点集的測度，可測函数，积分，平方可积函数以及泛函分析介紹等六章，講义每节末附有習題，可供課堂練習或課外作业采用。

本書可作为綜合大学数学系教学參考書。

簡装本說明

目前850×1168毫米規格紙張較少，本书暫以787×1092毫米規格紙張印刷，定价相应減少20%。希鉴諒。

实 变 函 数

江澤堅編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

人民教育印刷厂印装　新华书店发行

統一書号13010·545　開本787×1092 1/32　印張5

字數120,000　印數6001—24,500　定價(8)¥0.55

1959年3月第1版　1962年2月北京第3次印刷

序

这本講义的絕大部分是在1952年以前写成的，以后又稍加更动，試敎过几次。最近按照我国高等敎育部1956年4月审定的敎学大綱，加以整理，使之包括大綱中所有項目。根据过去經驗，按照这个講义，是可以在規定时数內講完这个課程的。

本書中凡附有星号的各节和定理、例題等都是可以不講的。所用名詞大体与中国科学院最近出版的数学名詞相同。

最后，我应該感謝王湘浩敎授的鼓励。本書中有些章节的处理和定理的証明，因为吳智泉同志的很有价値的建議得到改善。書中所有習題都是他編拟的。王振鵬同志帮助我整理原稿而且提出有益的意見，他为本書付出不少劳动。对于以上各位同志，作者謹于此致其謝意。

一九五六年十二月江澤坚序于長春
东北人民大学永昌胡同宿舍

目 录

第一章　集合，欧氏空間

自从十九世紀末年，集合与点集的概念产生以后，关于它們的理論就在不長的时間內很快地發展起来，滲入数学的各部門。其本身也蔚然成为数学的一大分支。根据教学大綱，大学实变函数論的課程的目的，主要是讓学生掌握度量性实变函数論的基本知識。因此我們不可能也不必在这样一个短的課程中，来对集合論与点集論作全面的介紹。我們之所以要写下这一章，就是要为以下各章服务。它不过是将来測度理論的預备知識。

§1. 集合与集合的运算

每談集合，常先有条件 $p(x)$，所有合于 $p(x)$的东西(元素)构成一堆事物，習慣上称之为集合，以下用符号 $\underset{x}{E}[p(x)]$ 表之。当然，对于特殊簡單的集合，例如由 1, 2, 3 这三个数构成的集合，我們干脆可以用符号{1, 2, 3}来表示它。但是对于許多集合，我們是不能用这种列举的办法来說明它的，所以需要前述的說法。

例　$\underset{x}{E}[x^2-1=0]$就是 1 和 -1 組成的集合。$\underset{(x,y)}{E}[x^2+y^2=1]$就是單位圓周。

为方便計，我們引进下面的符号。$x\in A$ 即 x 是 A的元素，讀为 x 屬于 A。例如 $1\in\underset{x}{E}[x^2-1=0]$. 而 $x\notin A$ 即 x 非 A 的元素。例如$\sqrt{2}\notin\underset{x}{E}[x^2-1=0]$.

定义　假如凡 B 的元素皆 A 的元素；則称 $\boldsymbol{A}$ **包含** $\boldsymbol{B}$ (或 B 被 A 包含)。習慣上用符号 $A\supseteq B$ (或 $B\subseteq A$)来表示。此时人們也称

B 为 A 的子集。

定义　我們說 $A=B$, 当且只当 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$ 时。

定义　$A+B=\underset{x}{E}[x\in A$ 或 $x\in B]$, $\sum_{1}^{n} A_i=\underset{x}{E}[$有$\leqslant n$ 的自然数 i, 使 $x\in A_i]$. $\sum_{1}^{\infty} A_i=\underset{x}{E}[$有自然数 i, 使 $x\in A_i]$。我們称 $A+B$ 为 A 与 B 之幷集。

定义　$AB=\underset{x}{E}[x\in A$ 且 $x\in B]$. $\prod_{1}^{n} A_i=\underset{x}{E}[$于任一$\leqslant n$ 的自然数 i, 皆有 $x\in A_i]$, $\prod_{1}^{\infty} A_i=\underset{x}{E}[$于任一自然数 i, 皆有 $x\in A_i]$, 我們称 AB 为 A 与 B 之交集。

定义　$A-B=\underset{x}{E}[x\in A$ 而 $x\notin B]$.

例　設 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$; 則

$$A+B=\{1,2,3,4,5,6\},\qquad AB=\{3,4\}.$$

例　設 $A_i=E[i-1<x\leqslant i]$, 則 $\sum_{1}^{\infty} A_i$ 即全体正数。

例　設 $A_i=E\left\{-\frac{1}{i}<x<\frac{1}{i}\right\}$, 則 $\prod_{1}^{\infty} A_i=\{0\}$.

定理 1

1) $A\subseteq A$.

2) 若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$; 則 $A\subseteq C$.

3) $A+(B+C)=(A+B)+C$.

4) $(AB)C=A(BC)$.

5) $A+B=B+A$, $AB=BA$.

6) $A(B+C)=AB+AC$.

7) $A+A=A$, $A\cdot A=A$.

8) $A\subseteq A+B$, $AB\subseteq A$.

9) 若 $A\subseteq C$; $B\subseteq C$; 則 $A+B\subseteq C$.

10) 若 $A\supseteq C$, $B\supseteq C$; 則 $AB\supseteq C$.

11) 若 $A_i\subseteq C$, $i=1,2,3\cdots$; 則 $\sum_{1}^{\infty} A_i\subseteq C$.

12) 若 $A_i\supseteq C$, $i=1,2,3,\cdots$; 則 $\prod_{1}^{\infty} A_i\supseteq C$.

13) 若 $A_i\supseteq B_i$, $i=1, 2, 3, \cdots$; 則 $\sum_{1}^{\infty} A_i\supseteq \sum_{1}^{\infty} B_i$, $\prod_{1}^{\infty} A_i\supseteq \prod_{1}^{\infty} B_i$.

14) $\sum_{1}^{\infty}(A_i+B_i)=\sum_{1}^{\infty}A_i+\sum_{1}^{\infty}B_i$.

15) $\sum_{1}^{\infty}AB_i=A\sum_{1}^{\infty}B_i$.

定理 115)的証明

設 $x\in \sum_{1}^{\infty}AB_i$; 則有自然数 k, 使 $x\in AB_k$. 于是 $x\in A$ 且 $x\in B_k$. 而 $B_k\subseteq \sum_{1}^{\infty}B_i$, 故 $x\in A\sum_{1}^{\infty}B_i$, 卽 $\sum_{1}^{\infty}AB_i\subseteq A\sum_{1}^{\infty}B_i$. 另一方面，若 $x\in A\sum_{1}^{\infty}B_i$, 則 $x\in A$, $x\in \sum_{1}^{\infty}B_i$. 从后者，有自然数 k

使 $x \in B_k$，于是 $x \in AB_k \subseteq \sum_1^\infty AB_i$。即 $\sum_1^\infty AB_i \supseteq A\sum_1^\infty B_i$. 于是由集合相等的定义，欲証之等式成立。

定义 永远不能成立的命題所定义的集合叫做**空集**，我們用 O 表示它。

例 $\underset{x}{E}[0<x<-1]=O$.

定义 对于某一固定集合(空間) S 来說，若 $A\subseteq S$，我們定义 $\mathscr{C}A=\underset{x}{E}[x\in S \text{ 而 } x\notin A]$，称之为 A 的**余集**。

定理 2

1) $\mathscr{C}S=0$, $\mathscr{C}O=S$.

2) $A+\mathscr{C}A=S$, $A\mathscr{C}A=O$.

3) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$.

4) 若 $A\subseteq B$；則 $\mathscr{C}A\supseteq\mathscr{C}B$.

5) $\mathscr{C}(A+B)=\mathscr{C}A\cdot\mathscr{C}B$, $\mathscr{C}(AB)=\mathscr{C}A+\mathscr{C}B$.

6) $\mathscr{C}\left(\sum_1^\infty A_i\right)=\prod_1^\infty\mathscr{C}A_i$.

7) $\mathscr{C}\left(\prod_1^\infty A_i\right)=\sum_1^\infty\mathscr{C}A_i$.

定理 2 7) 的**証明** 若 $x\in\mathscr{C}\left(\prod_1^\infty A_i\right)$；則 $x\notin\prod_1^\infty A_i$，即有自然数 k 使 $x\notin A_k$，于是 $x\in\sum_1^\infty\mathscr{C}A_i$，故 $\mathscr{C}\left(\prod_1^\infty A_i\right)\subseteq\sum_1^\infty\mathscr{C}A_i$.

另一方面，設 $x\in\sum_1^\infty\mathscr{C}A_i$，則有自然数 k，使 $x\in\mathscr{C}A_k$. 从 4)，

$x \in \mathscr{C}\left(\prod_1^\infty A_i\right)$，故 $\sum_1^\infty \mathscr{C} A_i \subseteq \mathscr{C}\left(\prod_1^\infty A_i\right)$。于是由集合相等之定义，欲証之等式成立。

上面所說的集合运算規律，在以后是常要用的。学生不只要懂，而且要熟。建議大家，把所有未証各条，都自己加以証明。然后不妨把自己覺得不很明显的各条，机械地背誦。

習　題

1. 証明 $A-B=A\mathscr{C}B$，此处 A，B 均为 S 的子集。

2. 証明 $(A-B)+B=A$ 的充要条件是 $B\subseteq A$。

3. 設 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一串集合，用 $\bar{A}$ 表屬于无穷多个 A_n 的元素的集合，$\underline{A}$ 表只不屬于有限多个 A_n 的元素的集合，証明

$$\bar{A}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{A}=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty}A_k.$$

§2. Bernstein 定理，可数集合与不可数集合

若于 A 中任一点 x，恰有一 B 中之点 y 与之对应，而于 B 中任一点 y，它恰是 A 中某点 x 之对应点，我們就說 A 与 B 一一对应。此后用符号 $A\sim B$ 来表达这个意思。

以下先来証明一个在实际上很有用的結果。

定理 1（**Bernstein 定理**）　若 $A\supseteq A_1\supseteq A_2$，$A\sim A_2$；則

$$A\sim A_1\sim A_2.$$

証明　从假設 $A\sim A_2$，而 $A_1\subseteq A$，因此由一一对应的定义，有 $A_3\subseteq A_2$ 使 $A_1\sim A_3$. 現在

$$A_1\supseteq A_2\supseteq A_3,\quad 且\ A_1\sim A_3,$$

和前面一样的理由，应該有 $A_4\subseteq A_3$，使 $A_2\sim A_4$. 于是有

$$A_2\supseteq A_3\supseteq A_4,\quad 且\ A_2\sim A_4,$$

如此繼續下去，根据数学归納法，一般有

$$A\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq A_4\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq A_{n+1}\supseteq\cdots,$$

$$A\sim A_2,\ A_1\sim A_3,\ A_2\sim A_4,\ A_3\sim A_5,\ \cdots,\ A_n\sim A_{n+2},\ \cdots$$

显然，

$$A-A_1\sim A_2-A_3,\ A_1-A_2\sim A_3-A_4,\ A_2-A_3\sim A_4-A_5,\ \cdots \quad (1)$$

令 $D=AA_1A_2A_3\cdots$，则

$$A=(A-A_1)+(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+(A_3-A_4)+\cdots+D,$$

$$A_1=(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+(A_3-A_4)+(A_4-A_5)+\cdots+D.$$

在上面两个式子的右端，有些項是共同的。例如 A_1-A_2, A_3-A_4, $\cdots$, D 既在第一式右端出現，也在第二式的右端出現。我們知道任何集合 E 通过恒等关系，$E\sim E$。至于上面两个式子的其他各項，則由(1)式，知道它們恰好是成对的一一对应。于是 $A\sim A_1$. 定理証畢。

定义 假如 A 与 B 的某个子集一一对应，而 B 不与 A 一一对应；我們就說 **A 的基数 α 小于 B 的基数 β**(或者說 β 大于 α)。假如 A 与 B 一一对应，則称 **A 的基数等于 B 的基数**。

定理 2 設 A 与 B 的基数依次为 α 与 β；則

$$\alpha=\beta,\quad \alpha<\beta,\quad \alpha>\beta$$

这三个关系中不能有两个同时成立。

証明 $\alpha=\beta$ 显然不能与 $\alpha<\beta$ 或 $\alpha>\beta$ 同时成立。

假如 $\alpha<\beta$ 与 $\alpha>\beta$ 同时成立，則有

$$A^*\subseteq A,\ B^*\subseteq B \text{ 使 } A\sim B^*,\ B\sim A^* \quad (2)$$

特别从

$$B^*\subseteq B,\ B\sim A^*$$

应有 $A^{**}\subseteq A^*$ 使 $B^*\sim A^{**}$. 由(2)式則 $A\sim A^{**}$. 但 $A\supseteq A^*\supseteq A^{**}$. 于是由定理 1, $A\sim A^*$. 从(2)式，将有 $A\sim B$. 引出矛盾。

定义 設 N 为全体自然数組成的集合，即

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\};$$

若 $A\sim N$，則 A 称为**可数集合**。

定理 3 若 A 与 B 皆可数集合，$AB=0$；則 $A+B$ 也是可数集合。

証明 設

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\},\ B=\{b_1, b_2, b_3, \cdots\},$$

則

$$A+B=\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots\}.$$

注意上式右端的写法，已經給出 $A+B$ 与 N 之間的一一对应法則，故定理为眞。

定理 4 对于可数多个可数集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$，若 $A_iA_j=0(i\neq j)$；則 $\sum\limits_1^\infty A_i$ 亦为可数集合。

証明 設

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\},$$
$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\},$$
$$A_3=\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

則

$$\sum_1^\infty A_i=\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\},$$

上式右端的写法很明显的給出 $\sum\limits_1^\infty A_i$ 与 N 之間的一一对应法則。

定理 5 所有正有理数組成一个可数集合 R^+。

証明 設

$$A_1=\{1, 2, 3, 4, \cdots\},$$
$$A_2=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \cdots\right\},$$
$$A_3=\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \cdots\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

假如我們規定 $\frac{p}{q}$ 与 $\frac{p^*}{q^*}$ 为相异的元素，只要 $p\neq p^*$ 或 $q\neq q^*$，則由定理 4，$\sum\limits_1^\infty A_i$ 为可数集合，而

$$\sum_1^\infty A_i\supseteq R^+\supseteq N,$$

故由定理 1，$R^+\sim\sum\limits_1^\infty A_i\sim N$.

定理 6　全体有理数組成一个可数集合。

証明　显然，所有負有理数組成的集合 R^- 也是可数的。据定理 3，R^++R^- 也是可数集合，設

$$R^++R^-=\{r_1, r_2, r_3, \cdots\},$$

从而全体有理数的集合是

$$\{0, r_1, r_2, r_3, \cdots\}.$$

定理 7　隔間$[0, 1]$是一个不可数的集合。

証明　若有限小数都改写成循环小数，如 0.07 的数皆改写为 $0.06999\cdots$，則十进位小数法具有唯一性。若$[0, 1]$是可数的，則$[0, 1]$之所有的数便可写成$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$，若

$$a_1=0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots,$$

$$a_2=0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots,$$

$$a_3=0.\,a_{31}a_{32}a_{33}\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

取
$$x=0.\,x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots,$$

$x_1, x_2, x_3, \cdots$非 1 即 2，而

$$x_1\neq a_{11},\ x_2\neq a_{22},\ x_3\neq a_{33},\ \cdots,\ x_n\neq a_{nn},\ \cdots$$

显然 $x=0.\,x_1x_2x_3\cdots\in[0, 1]$，但是 x 和任何 a_n 都至少有一位小数

不同，根据我們对十进位小数法的修正，它已具有唯一性。于是存在[0, 1]中的数 x 异于任何 a_n，与假設冲突。

習 題

1. 作出一个 [0, 1] 与 (0, 1) 之間的一一对应来，进而証明 $[0, 1] \sim R$，此处 R 是全体实数的集合。

2. [0, 1] 上的无理数的全体作成一不可数的集合。

3. 証明平面上所有两个坐标都是有理数的点作成一可数集合。

4. 由直綫上互不相交的开区間所作成的任何集合或为有限或为可数。

5. 單調函数的不連續点或是有限多个或是可数多个。

6. 証明有理系数多项式的全体构成一可数集合，进而証明超越数存在。

7. 証明可数集合的有限子集作成的集合也是一可数集合。

*8. 設 $S = \underset{(x,y)}{E}\,[0<x<1, 0<y<1]$，証明 $S \sim (0, 1)$。

*9. 設 $\mathscr{F}$ 是 (0, 1) 上的全体实函数所作成的集合，而 $\mathscr{R}$ 是 [0, 1] 的全体子集合所作成的集合，則 $\mathscr{F} \sim \mathscr{R}$。

*10. 若 $A+B \sim (0, 1)$，則或者 $A \sim (0, 1)$，或者 $B \sim (0, 1)$。

§ 3. 欧氏空間

比照着我們所熟悉的直綫，平面以及三度空間，如平面解析几何之意，于固定的自然数 n，設想任何有次序的 n 个实数 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 为一个点 x。設 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，若 $\xi_1 = \eta_1$，$\xi_2 = \eta_2$，$\cdots$，$\xi_n = \eta_n$，我們說 $x = y$，亦如平面解析几何而定义 x 与 y 之間的距离

$$\rho(x, y) = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}.$$

如此賦有距离意义的空間習慣上称之为 **n 維欧氏空間** R^n.

定理 1 $\rho(x, y)$ 具有下列三条基本性質:

1° $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

2° $\rho(x, y) = 0$ 当且只当 $x = y$ 时。

3° $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

証明 1°, 2° 是明显的，今只証 3°。令 $z=(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$，所欲証者不过是

$$\left[\sum_1^n (\xi_i-\zeta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_1^n (\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_1^n (\eta_i-\zeta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

两边平方之，便有

$$\sum_1^n (\xi_i-\zeta_i)^2 \leqslant \sum_1^n (\xi_i-\eta_i)^2 + $$
$$+2\left[\sum_1^n (\xi_i-\eta_i)^2 \sum_1^n (\eta_i-\zeta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_1^n (\eta_i-\zeta_i)^2, \quad (2)$$

从著名的不等式 $\sum\limits_1^n a_i b_i \leqslant \left(\sum\limits_1^n a_i^2 \cdot \sum\limits_1^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，便有

$$\sum_1^n (\xi_i-\zeta_i)^2 = \sum_1^n (\xi_i-\eta_i)^2 + $$
$$+2\sum_1^n (\xi_i-\eta_i)(\eta_i-\zeta_i) + \sum_1^n (\eta_i-\zeta_i)^2.$$
$$\leqslant (2)\text{式右端}.$$

从(2)逆推之，便有(1)式。

定义 于 $x_k=(\xi_{k1}, \xi_{k2}, \cdots, \xi_{kn})$ $(k=1, 2, \cdots)$ 及 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，假如 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x)=0$；則称 x_k 趋于 x，或以符号 $x_k\to x$ 表之。

定理 2 $x_k\to x$ 之充要条件为 $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{ki}=\xi_i (i=1, 2, \cdots, n)$。

証明 注意于任何 $1\leqslant i\leqslant n$，

$$|\xi_{ki}-\xi_i| \leqslant \rho(x_k, x),$$

故当 $k\to\infty$ 时右端趋于零，則左端亦然，足見条件是必要的。

至于充分性，于任何 $\varepsilon>0$ 及固定的 $1\leqslant i\leqslant n$，显然有自然数 K_i 使

$$|\xi_{ki}-\xi_i|<\varepsilon/\sqrt{n},\text{ 当 } k\geqslant K_i \text{ 时，}$$

令 $K=\max(K_1, K_2, \cdots, K_n)$，則

$$\rho(x_k, x)=\left(\sum_1^n |\xi_{ki}-\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon, \qquad \text{当 } k\geqslant K \text{ 时，}$$

于是 $x_k\to x$，定理証畢。

習　題

1. 設 $x_n\to x$，且 $y_n\to y$；求証 $\rho(x_n, y_n)\to\rho(x, y)$。

§4. 开集与閉集

于 n 維欧氏空間中之定点 x_0，于任何 $r>0$，点集 $U=\underset{x}{E}[\rho(x, x_0)<r]$ 便称为 x_0 **之鄰域**。我們应該把它想做是以 x_0 为心，以 r 为半徑的球。

定义 于点集 E 中之点 x_0，假如有 x_0 之邻域 U 使

$$x_0\in U\subseteq E,$$

則 x_0 便称为 E 的**內点**。

定义 若点集 E 之所有点皆 E 之內点；則 E 便称为**开集**。

定理 1 若 G_i 是开集($i=1, 2, 3, \cdots$)；則 $S=\sum_{i=1}^{\infty} G_i$ 也是开集。

証明 設 $x_0\in S$，則有自然数 k 使 $x_0\in G_k$，而 G_k 是开集，故有 x_0 之邻域 U 使

$$x_0\in U\subseteq G_k\subseteq S.$$

故凡 S 之点皆为 S 之內点，从而 S 是开集。

定理 2 对于有限个开集 $G_1, G_2, \cdots, G_m$；則 $G=\prod_{k=1}^{m} G_k$ 也是开集。

証明 設 $x_0\in G$；則 $x_0\in G_k(k=1,2,\cdots,m)$。每个 G_k 皆开集，故有 x_0 之邻域 $U_k=\underset{x}{E}[\rho(x,x_0)<r_k]$ 使 $x_0\in U_k\subseteq G_k$ 令 $r=\min(r_1, r_2,\cdots,r_m)$，取 x_0 之邻域 $U=\underset{x}{E}[\rho(x,x_0)<r]$；則

$$x_0\in U\subseteq U_k\quad(k=1,2,\cdots,m).$$

从而 $x_0\in U\subseteq\prod_1^m U_k\subseteq\prod_1^m G_k=G$. 这說明任何 $x_0\in G$ 皆是 G 之內点，于是 G 为开集。

例 虽然 $G_k(k=1,2,3,\cdots)$ 都是开集，$\prod_{k=1}^{\infty}G_k$ 却未必是开集。例如取

$$G_k=\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right),$$

則 $\prod_{k=1}^{\infty}G_k=\{0\}$，并非开集。

定义 假如 x_0 点之任何邻域皆含有屬于点集 E 而异于 x_0 的点；則 x_0 称为 E 之**聚点**。

注意：(i) x_0 不一定屬于 E。例如 $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 之聚点 $0\notin E$。

(ii) 事实上，x_0 的任何邻域 U 中皆含有无穷个 E 的点。否則，設 U 只包含有限个在 E 中且异于 x_0 的点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$. 取正数 r 使小于下列諸数：

$$\rho(x_0,\xi_1),\ \rho(x_0,\xi_2),\ \cdots,\ \rho(x_0,\xi_n).$$

則在邻域 $\underset{x}{E}[\rho(x,x_0)<r]$ 中就沒有 E 的点了。

定理 3 x_0 是 E 的聚点的充要条件是，存在一串[①] 互异的点 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

① 从此約定所謂一串就是一个可数叙列。