

非 线 性 电 路

夏承铨 编著

人 民 邮 电 出 版 社

内 容 提 要

本书主要介绍非线性电路的分析方法。全书共八章，分别介绍电路概论、电阻电路、一阶电路的实用分析方法和稳定性概念、相平面法、常用近似解析法、数值求解法、电路的稳定性、电路问题研究举例。本书特别注意稳定性分析，对李雅普诺夫直接法作了较深入的讨论，还着重介绍了新近颇受重视的VOLTERRA级数法。为便于读者掌握，书中每当介绍了某一分析法或定理之后都列举了较多例题，每章后都附有适量习题。

本书可供电类各专业的高年级大学生和研究生阅读，也可供高等院校、科研单位的有关教师、研究人员以及工程技术人员参考。

非 线 性 电 路

夏承铨 编著

责任编辑：徐德霆

•

人 民 邮 电 出 版 社 出 版

北京东长安街27号

北京顺义兴华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

•

开本：787×1092 1/32 1986年11月第一版

印张：19 24/32 页数：316 1986年11月北京第一次印刷

字数：454 千字 印数：1—3,500册

统一书号：15045·总3123-无6352

定价：4.00 元

前 言

非线性电路理论对于从事通信技术、自动控制以及电力系统等专业的教学人员、科研人员和工程技术人员来说是一种十分重要的基础。因此，世界上有不少国家在大学里都开设非线性电路或非线性系统的课程。近来我国也有一些大学正在开设或准备开设非线性电路的课程。本书就是为了适应这种需要而编写的。

本书是通过对非线性电路的重要现象的研究，来阐明非线性电路的分析方法的。在第七章的稳定性分析中，对李雅普诺夫直接法作了较深入的讨论；第八章还着重介绍了新近颇受重视的VOLTERRA级数法。

作者从1979年第二学期开始，曾先后四次对西安交通大学信控系和电气系的大学生以及理论电工专业的研究生讲授非线性电路课程。本书基于教学实践编写而成，供电类各专业的高年级大学生和研究生阅读，也可供高等院校的有关教师、科研单位的科研人员以及工程技术人员参考。

虽然本书几经试用和修改，但错误和不妥之处在所难免，希望读者批评指正。

编著者

1984年10月

于西安交通大学

目 录

第一章 非线性电路概论	(1)
§1-1 线性与非线性.....	(1)
§1-2 非线性电阻元件.....	(5)
§1-3 非线性电感元件.....	(21)
§1-4 非线性电容元件.....	(31)
§1-5 非线性电路方程式.....	(38)
§1-6 非线性电路中的特殊现象.....	(71)
§1-7 忆阻器、高阶代数元件和动态元件.....	(75)
习题.....	(84)
第二章 非线性电阻电路	(89)
§2-1 非线性电阻元件的串联和并联.....	(89)
§2-2 工作点、DP图和TC图.....	(96)
§2-3 非线性电阻电路的几个定理.....	(102)
§2-4 非线性电阻电路的图解分析法.....	(122)
§2-5 非线性电阻网络的分段线性叠代分析法.....	(143)
§2-6 非线性电阻网络的数值分析法.....	(148)
§2-7 非线性电阻网络的计算机辅助分析举例.....	(168)
§2-8 等值 and 对称原理.....	(176)
习题.....	(186)
第三章 非线性一阶电路	(198)
§3-1 绪论.....	(198)
§3-2 图解法.....	(199)
§3-3 分段线性化法.....	(209)

§3-4	非线性一阶自治电路的平衡状态及其稳定性	(217)
§3-5	$f(x)$ 为多值函数时的一阶电路	(230)
	习题	(236)
第四章	相平面法	(240)
§4-1	绪论	(240)
§4-2	非线性二阶自治电路的平衡状态	(245)
§4-3	相平面	(249)
§4-4	等倾线法	(257)
§4-5	等倾线网络法	(263)
§4-6	LIÉNARD 作图法	(271)
§4-7	δ 法	(279)
§4-8	奇点附近轨线的性质	(284)
§4-9	周期解和极限环	(305)
	习题	(320)
第五章	近似解析法	(329)
§5-1	绪论	(329)
§5-2	非线性电路中的特有的周期现象	(330)
§5-3	摄动法	(333)
§5-4	平均法	(353)
§5-5	谐波平衡原理	(372)
§5-6	等值线性化法	(375)
	习题	(379)
第六章	非线性电路状态方程式的数值求解法	(382)
§6-1	绪论	(382)
§6-2	泰勒级数法	(383)
§6-3	龙格—库塔法	(385)

§6-4	多步算法	(409)
	习题	(418)
第七章	非线性电路的稳定性	(420)
§7-1	绪论	(420)
§7-2	基本定义	(421)
§7-3	非线性系统的局部稳定性——李雅普诺夫 间接法	(428)
§7-4	非线性系统中的鲁斯—霍尔维茨判据	(437)
§7-5	李雅普诺夫直接法	(442)
§7-6	周期解的稳定性	(468)
	习题	(478)
第八章	关于非线性电路问题的研究举例	(481)
§8-1	非线性储能元件的有效值伏安特性	(481)
§8-2	铁磁谐振电路中的跳跃现象	(496)
§8-3	子谐波振荡	(508)
§8-4	非线性电路中的拟周期振荡	(528)
§8-5	非线性振荡电路中的同步现象	(536)
§8-6	铁磁谐振电路中的闪烁现象	(548)
§8-7	关于铁磁三倍频器运行情况的分析	(563)
§8-8	VOLTERRA级数用于非线性振荡电路的 分析*	(577)
§8-9	非线性电路中的紊乱振荡	(616)

第一章 非线性电路概论

§1-1 线性与非线性

能够用线性方程式来描写其行为的电路称为线性电路。需用非线性方程来描写其行为的电路称为非线性电路。我们知道，对于参数恒定的纯电阻电路来说，其电路方程是一组线性代数方程式。对于参数恒定的 R 、 L 、 C 电路来说，其电路方程是一组线性微分方程式。“线性”这个定语，是对方程式中的应变变量及其各阶导数都以一次幂的形式出现而言的。此处所谓应变变量可能是电路中各有关元件的电压、电流、磁通链、电荷等物理量。

例如，在图1-1所示的正弦交流电路中，电路方程为：

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E_m \sin \omega t$$

或：

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega E_m \cos \omega t$$

显然这是一个二阶常系数线性微分方程式，其中 i 、 $\frac{di}{dt}$ 、 $\frac{d^2 i}{dt^2}$ 都是以一次幂的形式出现的，无高次幂或分数幂的项。与此相应，图1-1所示电路是一个线性电路。其实，称图1-1所示电路是线性电路的原因，是它所包含的电路元件全都是线性元件。所谓线性元件是指具有线性构成关系 (constitutive r-

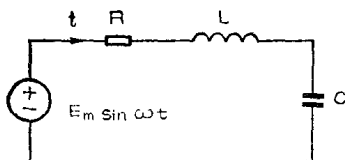


图 1-1 一个线性时变电路

elation)的元件。在图1-1所示的电路中, R 、 L 、 C 等元件都是恒定不变的, 它们的构成关系分别为: $u = Ri$; $\psi = Li$; $q = Cu$ 。显然它们都是线性的。

又如, 在图1-2所示电路中, 除了含有线性元件 R 和 C 之外, 尚含有一个铁芯线圈。由于磁饱和的缘故, 铁芯线圈是一种非线性器件, 它的构成关系为: $i = \alpha\psi + \beta\psi^3 + \gamma\psi^5 + \dots$ 。此处 ψ 表示线圈的磁通链, α 、 β 、 γ 等则表示一些常数。根据 KVL , 可以列出下列方程:

$$u_R + u_L + u_C = E_m \sin \omega t$$

式中 $u_R = Ri$, $u_L = \frac{d\psi}{dt}$, $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$ 。把这些关系和铁

芯线圈的构成关系代入上式并对时间求导一次, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} + R(\alpha + 3\beta\psi^2 + 5\gamma\psi^4 + \dots) \frac{d\psi}{dt} \\ + \frac{1}{C}(\alpha\psi + \beta\psi^3 + \gamma\psi^5 + \dots) = \omega E_m \cos \omega t \end{aligned}$$

由于在上列方程中含有 ψ^2 、 ψ^3 、 ψ^4 、 ψ^5 、 $\dots$ 等非一次幂的项, 所以属于非线性微分方程。与此相应, 图 1-2 所示的电路便是非线性电路。

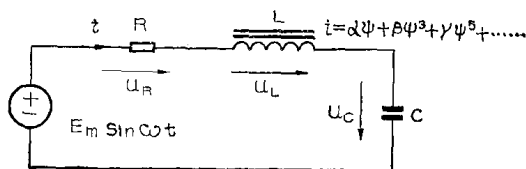


图 1-2 一个非线性电路

我们可以说，含有非线性元件的电路称为非线性电路。

还有一类电路，其参数随着时间变化，但其变化规律是独立于电路的工作情况而存在的（仍为线性电路），这类电路称为线性时变电路。例如在图1-3所示电路中，话筒电阻随着声音的强弱而变，因而是一种时变电路。设声音强弱按正弦律变化，则话筒电阻 $R = R_1(1 + a\sin\omega t)$ 。这样，图1-3所示电路的方程便具有如下形式：

$$R_1(1 + a\sin\omega t)i + R_2i = E$$

显然这是一个线性方程式。

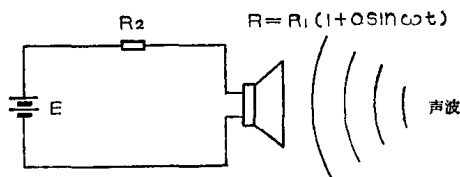


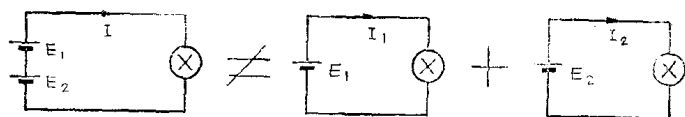
图 1-3 线性时变电阻电路

注意，尽管图1-3所示电路的参数 R 随时间变化，也不要误认为它是非线性电路。但是，若在图1-3所示之电路中再串联一个铁芯线圈，则电路方程将变为非线性微分方程式，因而便属于非线性电路。

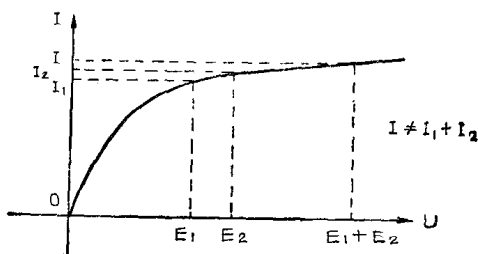
含有时变元件的非线性电路称为时变非线性电路。

我们知道，线性电路的一个十分重要的性质是叠加性质。但是，在非线性电路中却不能应用叠加原理。图1-4可说明这点，图中的灯泡为非线性元件，其 $u-i$ 特性如图1-4b所示。我们看到， $I \neq I_1 + I_2$ 。

研究非线性电路往往要求解非线性代数方程或非线性微分方程，这在一般情况下是相当困难的。即使象图1-2所示的



(a)



(b)

图 1-4 在非线性电路中叠加原理不成立

简单电路，也不能求出其所对应的微分方程的精确解。人们不得不满足于获得某种近似解。不仅如此，人们在分析非线性电路时还会遇到较为高深的数学概念，并且在求解过程中须进行颇为冗长的数学运算。尽管如此，世界各国的电路学者对于非线性电路的研究兴趣仍然是与日俱增的。这是因为非线性电路在理论与实践上都具有十分重要的意义。实际上，许多现代电工技术，就其基本概念来说，都是以非线性的理论为基础的。例如，在数据处理的领域内，所有的逻辑系统和计算机的存储器都是用非线性器件构成的。在通信系统中，调制、检波、混频、振荡、编码、译码、电压稳定等等环节都是依靠非线性器件而工作的。甚至就连“线性放大”也还是依靠晶体管或运算放大器这些非线性器件来实现的。许多自动控制系统为了达到最佳工作情况而必须是非线性的。因此，人们设计了许多种非线性器件，以实现上述种种目的。其中包括晶体管、电

子管、充气管、隧道二极管、变容二极管、热敏电阻、光敏电阻、冷子管、铁氧体器件、运算放大器，等等。

还有一类问题，其中的非线性虽然并不是有意设计出来的，但它是一种客观存在，以致我们也不能不加以充分地研究。例如，电力系统运行情况的分析中就必须考虑发电机、变压器、感应电动机等设备所具有的非线性。在通信系统中有时需要考虑由于放大环节的非线性所引起的畸变。在一般的电子系统中，若要研究大信号的工作情况，就必须考虑晶体管或运算放大器的非线性特性。

当然，除了非线性电路的分析问题之外，也还有非线性电路的综合问题。

在过去三十多年的时间里，在非线性电路的研究工作中获得了很显著的进展。这里主要有两方面的推动因素在起作用，即：（1）计算机对电路理论的影响；（2）新器件和集成电路的出现。前一个因素提供了分析复杂的非线性系统的可能性，后一个因素使大规模非线性电路的分析和设计成为当务之急。

非线性电路属于非线性问题中的一个方面。其他在力学、光学、声学、天文学、生物学等方面也都有非线性问题。不同分支中的非线性问题可以采用相同的分析方法。所以，不同学科在处理各自的非线性问题时，往往可以互相借鉴。

在分析非线性电路时，我们需要建立适当的数学模型，其中很关键的问题是合理地表示非线性元件的特性。

§1-2 非线性电阻元件

1. 静态电阻和动态电阻

电阻元件是一种耗能元件，它的特性可用电压 u 和电流 i 之

间的关系： $f(u, i) = 0$ 来表示，这种关系就是通常所说的伏安特性。由于线性电阻的电压电流关系服从欧姆定律，即： $u = Ri$ ，所以线性电阻的伏安特性在 $u-i$ 平面上是通过坐标原点的直线。

如果电阻元件的伏安特性曲线并非通过坐标原点的直线，而是 $u-i$ 平面上的任意曲线，则这种电阻元件便称为非线性电阻元件。显然，非线性电阻中的电压和电流关系并不服从欧姆定律，其伏安特性 $f(u, i) = 0$ 要视具体元件而定。

图1-5 (a) 为非线性电阻元件的电路符号图，图1-5 (b) 则表示一种非线性电阻元件的伏安特性曲线。

非线性电阻的阻值是随着电流或电压的大小而变化的，而且对于某一点 P ，还可以定义两个电阻，即：静态电阻 R_s 和动态电阻 R_d ：

$$R_s = \frac{u_p}{i_p} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u_p}{\Delta i} = \frac{du}{di} = \operatorname{tg} \beta$$

在分析小信号作用下的非线性电路时，可用动态电阻 R_d 使电路线性化，从而便于分析。

2. 伏安特性的分类

为了在设计工作中能够有效地使用非线性电阻，有必要对非线性电阻的伏安特性作如下分类：

(i) 严格单调增加的电阻元件：是指这样一种电阻元件，在其伏安特性曲线上任取二点 (u_1, i_1) 和 (u_2, i_2) ，若 $u_1 > u_2$ ，则 $i_1 > i_2$ 。

根据上述定义，图1-5 (b) 所示的非线性电阻元件的伏安

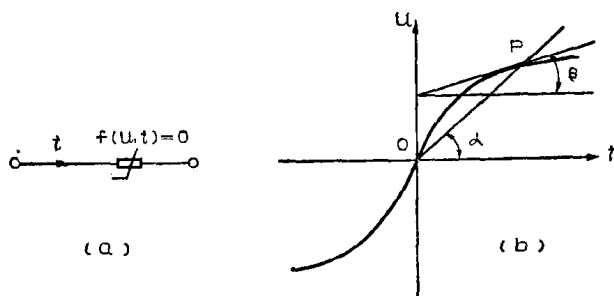


图 1-5

特性便是属于严格单调增加这一类的。

真空二极管的伏安特性可近似地用 $3/2$ 次方定律来描写，即，

$$i = Ku^{\frac{3}{2}}, \quad u \geq 0$$

式中 K 是一个常数，它与真空二极管的实际尺寸有关。显然，这种伏安特性是严格单调增加的。

真空二极管的电路符号图和伏安特性如图1-6 (a) 和(b) 所示。

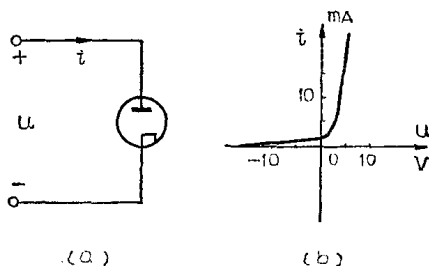


图 1-6

半导体二极管的伏安特性可近似地用指数规律来表示：

$$i = I_0(e^{ku} - 1), \quad u \geq 0$$

式中 I_0 和 K 是两个常数，由二极管的实际情况来确定。它也是属于严格单调增加一类的。

半导体二极管的电路符号图和典型的伏安特性如图 1-7 所示。

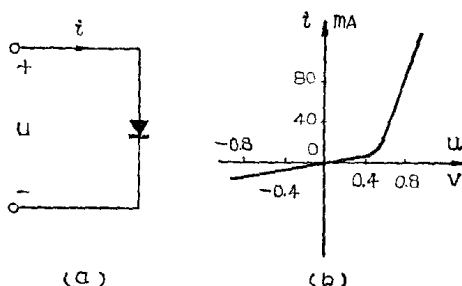


图 1-7

应当指出，元件的伏安特性曲线并不是总可以找到一个简单的解析表达式的；而且，即使能找到某种解析表达式，那也不过是实际的非线性伏安特性曲线的某种近似而已。所以，通常都用图示法，而不用解析法表示电阻元件的伏安特性

(ii) 单调增加的电阻元件：是指这样一种电阻元件，在其伏安特性曲线上任取二点 (u_1, i_1) 和 (u_2, i_2) ，若 $u_1 > u_2$ ，则 $i_1 \geq i_2$ 。换句话说，单调增加的电阻元件也包括严格单调增加的电阻元件在内。

齐纳二极管和恒流二极管都属于单调增加的非线性电阻元件，分别表示在图1-8和图1-9中。

(iii) 负阻元件：是指这样一类电阻元件，其伏安特性具有一个下倾区段，即 $\frac{di}{du} < 0$ 的部分，在此区段内动态电阻 R_d 是负的。

负阻元件又可分为电压控制型的和电流控制型的。如果电

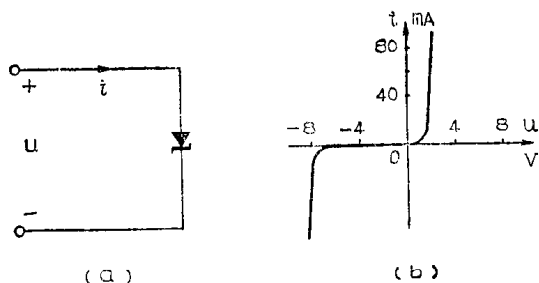


图 1-8

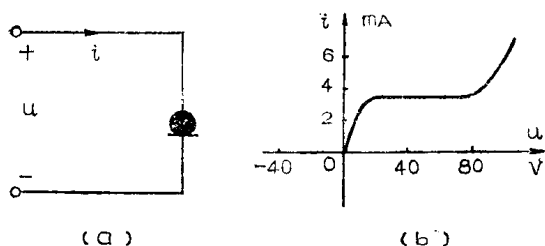


图 1-9

流 i 可以表作电压 u 的单值函数 $i = f(u)$, 那么, 这种电阻元件便称为电压控制型的电阻元件; 如果电压 u 可以表作电流 i 的单值函数 $u = f(i)$, 那么, 这种电阻元件就称为电流控制型的电阻元件。例如, 图1-10所示的隧道二极管便属于电压控制型的非线性电阻元件; 而图1-11所示的辉光管则属于电流控制型的非线性电阻元件。

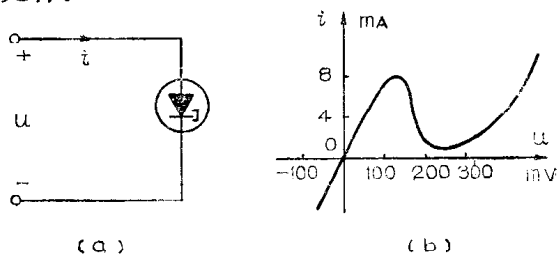


图 1-10

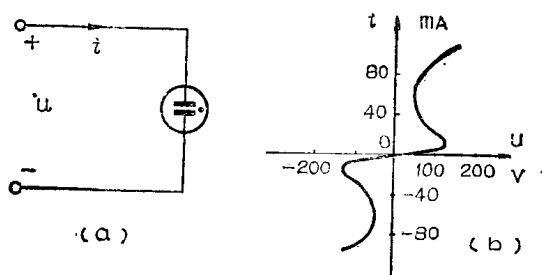


图 1-11

显然，负阻元件的伏安特性一般是电压或电流的多值函数。例如电压控制的非线性电阻元件的电压是电流的多值函数；而电流控制的非线性电阻元件的电流则是电压的多值函数。

应当指出，严格单调增加的非线性电阻元件，既可以看成是电压控制的，也可以看成是电流控制的。

(iv) 双向性的电阻元件和单向性的电阻元件：上面提到过的辉光管，其伏安特性曲线对称于原点，属于双向性的电阻元件。而各种二极管，由于具有单向导电的性质，其伏安特性并不对称于原点，它们属于单向性的电阻元件。

(v) 具有热惯性的电阻元件和没有热惯性的电阻元件：按照电阻元件对交流电反应的快慢，非线性电阻还可以划分为惯性的和无惯性的两类。前面所介绍的各种二极管都可以看做是无惯性的，它们的电阻都随着电流（或电压）的瞬时值变化。在无惯性的电阻中， u 和 i 的波形不能同时保持正弦律。而在电阻值由温度来决定的非线性电阻元件中，由于热惯性，电阻的大小来不及追随电流的瞬时值变化，只能由电流的有效值来确定。所以，在惯性电阻元件中，非线性关系只表现在有效值的伏安特性上，并不表现在瞬时值的伏安特性上。因此，在

惯性电阻元件中，若电流波形是正弦律的，则电压波形也一定是正弦律的。白炽灯泡是一种最常见的惯性电阻元件。白炽灯具有较大的热惯性，若灯丝电流按照工频变化，则灯丝温度就来不及跟随电流的瞬时值变化。所以，在一个周期内灯丝温度实际上是不变化的；而灯丝的电阻取决于灯丝的温度，因此在一个周期内白炽灯的电阻值实际上也是不变的。灯丝温度既然随着电流的有效值而变化，故其电阻值亦随着电流的有效值而改变。可见，白炽灯上的电压与通过它的电流之间的非线性关系仅仅表现在有效值上，至于电压与电流之间的瞬时值关系却仍旧是线性的。图1-12表示钨丝白炽灯的有效值伏安特性。

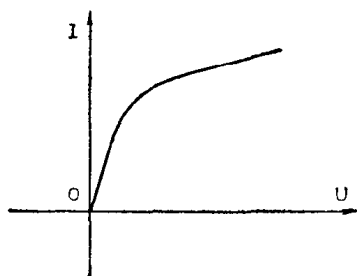


图 1-12

在热惯性的时间常数远大于电源周期时，上述关于惯性元件的讨论是符合实际情况的；但是，当热惯性的时间常数和电源周期相差不大时，上述讨论就不适用了。这时非线性关系不但表现在有效值的关系上，而且也表现在瞬时值的关系上，分析起来将比较复杂一些。

3. 三端电阻元件

在多端电阻元件中，应用最广泛的要算是三端电阻元件了。代表性的器件为晶体三极管和真空三极管，现将其电路模