不可压缩边界层理论

夏国泽

华中理工大学出版社

不可压缩边界层理论

夏 国 泽

华中理工大学出版社

不可压缩边界层理论

夏国泽

责任编辑　叶见欣

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:8.5　字数:203 000

1992年11月第1版　1992年11月第1次印刷

印数:1-1 000

ISBN　7-5609-0705-9/TB·29

定价:2.24元

(鄂)新登字第10号

内容简介

本书系统地介绍了不可压缩边界层流动的基本理论和典型算法，包括求解三维薄边界层的积分法和微分法，以及部分抛物型方程的解法，反映了这一领域近期的一些新成就。

全书共有五章：基本原理、层流边界层、层流的稳定性和转捩、湍流、湍流边界层。内容由浅入深，层次分明，自成一个体系。各章均附有习题，供练习和加深理解用。

本书是为船舶工程专业研究生编写的教材，也可供与流体力学有关专业的研究生、大学生和科技人员参考。

出 版 说 明

根据国务院国发〔1978〕23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年～1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高

等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前　　言

本书是全国高等学校船舶工程教材委员会推荐出版的研究生教材，也可供本科高年级大学生选修之用。

70年代以来，船体周围粘性流场的研究受到各国船舶工程界的普遍重视。80年代初期，国内有关院校为适应这一发展的需要，先后为船舶工程专业的研究生开设了相应的理论课程。这个时期以来，除了大量的文献报告之外，还有为数不少的粘性流体动力学著作和教材问世，其中，有的还是湍流边界层理论和湍流工程方面的专著。但是，考虑到船舶工程专业的实际情况，要从现有的流体力学知识水平出发，进入当今的船舶粘性流场计算领域，还需要比较系统地了解不可压缩边界层流动的基本理论，以及当前已经取得的一些新进展。本书就是根据这一要求编写的。

全书共分五章，内容包括：基本原理、层流边界层、层流的稳定性和转捩、湍流和湍流边界层。书中系统地介绍了不可压缩边界层流动的基本理论和典型算法，包括求解三维薄边界层的积分法和微分法，以及部分抛物型方程的解法，反映了这一领域近期的一些新成就。本书的特点是自成体系，内容由浅入深，层次分明，便于教学。各章均附有习题，供读者练习和加深理解用。

本书是在1983年以来多次讲稿基础上编写的。在论述过程中，许多地方用了作者自己的方式方法和研究心得，例如：按作者约定的求和规则，将正交坐标系中N-S方程写成了最紧凑的形式；提出了重新组合基本量，用量纲分析法直接确定相似变换的方法；Mangler变换的推导；拌线引起转捩的判据；Thompson速度剖面的新表达式；平板摩阻公式和混合边界层计算公式的改进，以及若干公式的推导证明等。这仅仅是个人的一些拙见，希望读者对此

多加指教。

本书初稿承蒙同行专家和教材评审委员提出了宝贵的评审意见，作者根据这些意见进行了修改，最后由华南理工大学许维德教授主审，特此表示深切的谢意。

由于作者水平有限，书中难免还有缺点和错误，欢迎读者批评指正。

作者
1992 年 3 月
于华中理工大学

目　录

第一章　基本原理

流体运动遵守质量守恒、动量守恒(牛顿第二定律)和能量守恒(热力学第一定律)三个自然规律,因此,流体力学中相应有连续方程、动量方程和能量方程。这三个方程是描述流体运动的基本方程。船舶流体力学问题一般可以不考虑流体压缩性的影响,流体密度 ρ 为常数;此外,由于流场中的温度变化不太大,流体的粘性系数 μ 也可以认为是常数。在这种情况下,流场的三个速度分量和压力原则上可以通过连续方程和动量方程求解。也就是说,不可压缩流动的速度场和压力场问题与热力学第一定律确立的能量方程无关。因此,在本课程范围内,描述流体运动的基本方程仅包括连续方程和动量方程。

理想流体的动量方程是欧拉方程,粘性流体的动量方程是 Navier-Stokes 方程(简称 N-S 方程)。这两个方程都是二阶非线性偏微分方程。不过,理想流体运动中有速度势存在,利用速度势,问题可以转化为求解拉普拉斯方程。粘性流体运动就没有这种条件,它所遵从的 N-S 方程只在一些简单情况下有准确解(作为例子,在§1-7 中将介绍直圆管内的定常流动和平面驻点附近流动的解法和结果),对于实际流动问题,要先将 N-S 方程加以适当简化,然后求其近似解。对于大雷诺数绕流问题,边界层近似方法一般是很有效的。因此,不可压缩边界层理论将是本课程的中心内容。本章在介绍了 Prandtl 边界层理论之后,将集中推导二维、轴对称和一般三维边界层流动的微分方程和积分方程,以便后续各章深入讨论时直接引用。最后,还介绍了边界层速度剖面和流动分离问题。

§1-1 连续方程

流体力学的一个基本假设就是把流体当作连续介质，这样就可以用极限的概念定义流场中一点处流体的密度，即

$$\rho=\lim_{\Delta V\to\varepsilon}\frac{\Delta M}{\Delta V}$$

式中，ΔM 是微元体积 ΔV 内流体的质量，$\Delta M/\Delta V$ 称为平均密度。当 ΔV 由大变小时，$\Delta M/\Delta V$ 将随之变化（图 1.1）：开始，平均密度随 ΔV 的减小趋近一稳定值，这是因为在较小的体积内流体分子分布较为均匀的缘故；当 ΔV 缩小到比某个体积 ε 还要小以后，由于分子数有限，个别分子出入该体积会明显影响平均密度的大小。由此可见，作为连续介质，流体中的一"点"实际是指一小块流体微团，其大小可以和 ε 相比拟，而 ε 是分子运动统计平均规律仍然可靠的最小微元体积。

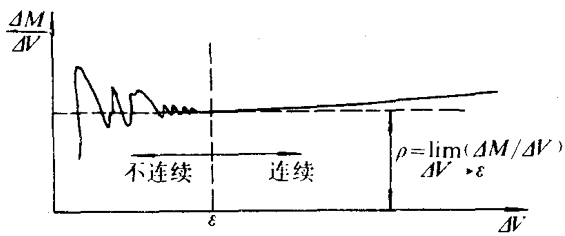

图 1.1　平均密度的变化

与流体密度的定义类似，还可以建立流场中一点的压力、温度以及其它参数的概念。所谓流场中一点的瞬时速度是指此时与该点重合的流体微团质心的速度。

现在来研究流场中一个微元六面体内流体的质量守恒问题。如图 1.2 所示，和坐标面平行的微元六面体的三个边长分别为 dx、dy、dz。不难看出，单位时间内 x 方向净流出的质量为：

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}A_x\mathrm{d}x=\frac{\partial \rho u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

式中，u 是 x 方向的速度；$A_x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是垂直于 x 方向的微元面积。同样可以写出 y 方向和 z 方向的净流出质量，它们分别是：

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y}A_y\mathrm{d}y=\frac{\partial \rho v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z}A_z\mathrm{d}z=\frac{\partial \rho w}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

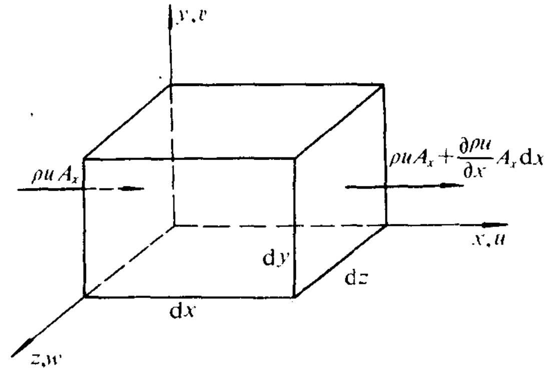

图 1.2　微元六面体内流体质量的变化满足守恒定律

根据质量守恒定律，$\mathrm{d}t$ 时间内流出的总质量等于微元六面体内质量的减少量，于是，

$$\mathrm{d}t\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由此可以得到连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0 \tag{1.1}$$

为了便于表达，将 u、v、w 分别改为 v_1、v_2、v_3，上式可写成：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \rho v_3}{\partial x_3}=0$$

用求和符号，上式还可写成：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}=0$$

按约定求和，省去求和符号 Σ，上式变成：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}=0 \tag{1.2}$$

这种写法叫张量表示法。本书的求和约定是：当方程（或表达式）中某一项有重复出现的下标时，这就表示该项要在该下标的取值范围内写出和式。表示求和而重复出现的下标称为哑标。按照 Einstein 约定求和规则，哑标仅仅是重复出现一次的下标。本书对重复出现的次数未加限制，这样做的好处是，可以将正交曲线坐标系的运动方程式写成很紧凑的形式（详见 § 1-6）。

对于不可压缩流动，ρ＝常数，连续方程可以简化成：

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \tag{1.3}$$

这说明不可压缩流动中速度的散度为零，即 $\operatorname{div}\vec{V}=\nabla\cdot\vec{V}=0$。在物理概念上，这意味着流体的体积变化率为零。

§ 1-2　应力张量

作用在流体上的力可以分成质量力和表面力两大类。质量力作用在流体的每个质点上，其大小与质量成正比，例如重力和磁力都是质量力。表面力是施加于所研究的流体表面上的外部作用力。在静止流体中，作用于单位面积上的表面力（静压力）指向表面的内法线方向，其大小和作用面的方位无关。在理想流体运动中，由于不考虑流体粘性的影响，在流体表面相切的方向上没有作用力，只存在垂直指向作用面的动压力，它的大小也和作用面的方位无关。实际流体运动中，因粘性而产生剪切作用，这时单位面积上的作用力就不一定垂直于作用面，而且各方向上的作用力大小也不一定相等。下面将详细研究这一情况。

如图 1.3 所示，有一块任意形状的流体，体积为 V，表面积为 S；在表面上任意一点 A 处，曲面外法线的单位向量用 $\vec{n}$ 表示。包含 A 点在内的微元面积 ΔS 上的表面力为 $\Delta\vec{F}_n$，当 ΔS 收缩到 A 点时，$\Delta\vec{F}_n/\Delta S$ 的极限

$$\vec{\tau}_n=\frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}S}=\lim_{\Delta S\to A}\frac{\Delta\vec{F}_n}{\Delta S} \tag{1.4}$$

称为 A 点处 $\vec{n}$ 方向的表面应力，它是由 $\vec{n}$ 所指方向的外部流体所产生的应力，其正方向指向外部。由于剪切作用，$\vec{\tau}_n$ 的方向和 $\vec{n}$ 的方向一般是不相同的。另外，用 $\vec{\tau}_{-n}$ 表示由于内部流体的作用在 A 点产生的 $-\vec{n}$ 方向的应力，显然

$$\vec{\tau}_{-n}=-\vec{\tau}_n \tag{1.5}$$

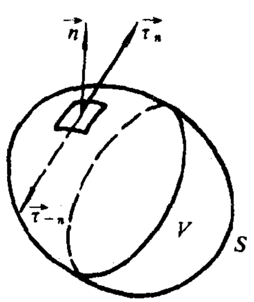

图 1.3　一点处的应力

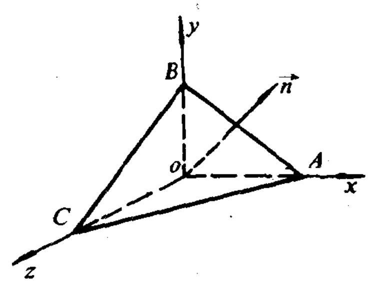

图 1.4　微元四面体

为了了解应力的数学性质，现在研究一个微元四面体的受力情况。如图 1.4 所示，微元四面体的三个面分别是三个直角坐标面的一部分，斜平面是三角形，即△ABC。用 $\vec{n}$ 表示斜平面△ABC 上过坐标原点的外法线单位向量，于是，各微元面的面积和外部流体作用其上的表面力分别为：