经济数学系列教材之一

高等数学

展明慈　张　琪　主编

科学技术文献出版社

经济数学系列教材之一

高 等 数 学

展明慈 张 琪 主编

编写：（按姓氏笔划为序）

王桂兰 王淑英 马 华 马春硕

刘宝琪 陈洪昭 范正宜 周显道

张麟阁 官荫群 顾 瑾 评 瑛

科学技术文献出版社

1988

内 容 简 介

本书内容包括财经、管理各专业所必须的高等数学基本知识。注意到数学在经济领域中应用的不断开拓，讲述了差分方程等内容。全书共分十二章。概念讲解透彻，论述简明扼要，并配有充足的应用举例；文字叙述深入浅出，通俗易懂。每章均配有习题，书末附有解答。

本书宜作为财经院校、经济管理院校各专业本科生试用教材，也可供自学及报考研究生者使用。

经济数学系列教材之一

高 等 数 学

展明慈 张 琪 主编

科学技术文献出版社出版

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

787×1092毫米 16开本 23.25印张 580千字

1988年7月北京第一版第一次印刷

印数：1-19400册

社科新书目：增202—027

ISBN 7-5023-0564-5/O·3

定价：5.45元

前　　言

随着现代经济及管理科学的发展，经济数学已成为经济、管理人才必备的基本知识。为进一步提高经济数学的教学水平，在全国经济院校经济数学学会的支持下，在认真总结近十年来经济数学教学经验的基础上，由北京联合大学经济管理学院、陕西财经学院、山西财经学院、北京商学院、江西财经学院、兰州商学院、黑龙江商学院、山西经济管理学院、武汉军事经济学院、安徽财贸学院、吉林财贸学院、内蒙古财经学院、郑州航空工业管理学院、北京对外经济贸易大学等十四所院校合编了这套经济数学系列教材．系列教材编委：李树仁、曹承宾、马春硕、刘宝琪，由李树仁、曹承宾具体负责．这套教材计划按高等数学、线性代数、概率论与数理统计、运筹学(Ⅰ)、运筹学(Ⅱ)、经济计量学、模糊数学及其在经济中的应用等七册出版．

我们在编写这套教材时，力求使其具有如下特点：既保持数学学科的系统性和完整性，又恰当地联系经济、管理问题，增选了经济应用例题，突出了经济、管理各专业的需要；重点放在基本概念和基本方法方面，论证严谨适度。节末配有练习，章末配有习题，以培养学生的逻辑思维能力和用数学方法分析与解决经济问题的能力．教材文字叙述深入浅出，通俗易懂．除必修的基本内容，对较深入的节、款用*号标明，供不同专业或不同教学时数的需要选用．教材包括了报考研究生所需要求．各册教材均附有习题提示和答案．

本教材——高等数学是系列教材之一．内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等

在编写过程中，我们参阅了兄弟院校的有关教材，得到了各院校的支持；成稿后，承蒙北京广播学院韩焕堂教授进行了详细审阅，并提出了许多宝贵意见，在此一并致谢．

由于成书时间仓促及编者水平所限，错误和缺点在所难免，欢迎广大读者和经济数学界同行不吝批评指正．

编者　1987年9月

目　　录

第一章　函　数

客观世界的事物都是互相联系、互相制约的．物质世界中的各种规律，反映在数学中就是量与量之间的依从关系——即所谓函数关系．函数概念是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分所研究的主要对象．

在这一章里我们先提出一些有关实数的基本问题，然后引出函数概念，了解一些函数的简单性质，进而熟悉基本初等函数和一般的初等函数，作为以后学习的基础．

§1.1　实　数

（一）实数和数轴

人们在社会实践中离不开数．数是计算个数和测量量的结果．人们最先认识的是自然数（正整数），后来由于需要又认识了负整数、零和分数；在对数的研究中把这类数称为有理数．有理数可以写成$\frac{p}{q}$的形式，其中p和q是不可通约的整数，且$q\neq 0$，如果$q=1$，那就是整数．还有些数不能写成$\frac{p}{q}$的形式，如$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、$\lg 3$、π、e等等，把这一类数称为无理数．有理数和无理数统称实数．

无理数也可以写成不循环的无限小数．而循环的无限小数，实际上都是有理数．例如

$$\frac{2}{3}=0.666\cdots=0.\dot{6},$$

$$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}.$$

在高等数学里为了进一步说明实数的性质，必须提出实数的几何表示法，于是先引出数轴．

在一条水平线上取定一点作为原点，原点往右作为正方向，往左为负方向，并取一个长度作为单位长度．这样，有原点、有方向、有长度单位的直线，就称为数轴．

对于任一个有理数$a=\frac{p}{q}$，在数轴上都可以找到一个点P与之对应．如果a为正数，只要在原点右边截取OP，使它的长度等于a；如果a为负数，则往原点左边截取OP．这样所得到的P点叫做有理点，也就是有理数a的几何表示，而数a叫做有理点P的坐标，并记作$P(a)$．反之，数轴上任何一个有理点，也必对应一个有理数．这就是说，有理数和数轴上的有理点是一一对应的．

同样，对于无理数，在数轴上也可以找到无理点与之对应．例如，对无理数$\sqrt{2}$，在单位长度$OA=1$上作一个正方形，它的对角线长度为$\sqrt{2}$，在数轴上取$OB=\sqrt{2}$，即为$\sqrt{2}$的坐标，再以OB为一边，另一边长为1作矩形，它的对角线长度为$\sqrt{3}$，在数轴上取$OC=$

$\sqrt{3}$.因为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$都是无理数，所以B、C这些点都不是有理点，称作无理点.可见无理数和数轴上的无理点也是一一对应的.

由上可知所有实数和数轴上的点都是一一对应的.

顺便再介绍实数的几个重要性质：

第一，有理数在实数中的稠密性；

在数轴上任何两个有理点$P(a)$和$Q(b)$之间($a<b$)，至少可以找到一个有理点$R(c)$，例如

$$c=\frac{a+b}{2},$$

即有$a<c<b$；由于a、b是有理数，所以c也是有理数. 同样，在a、c之间也可以找到一个有理数$d=\frac{a+c}{2}$，使$a<d<c$.如此继续做下去，可知：任何两个有理数a和b，不论它们相差多么小，在它们之间总可以找出无穷多个有理数.这就是有理数的稠密性.因为有理数和数轴上的点是一一对应的，所以数轴上的有理点是处处稠密的.

第二，实数的连续性；

在数轴上虽然有理点处处稠密，但除有理点外，还有许多空隙，这些空隙，正好是无理点的位置.因为有理数和无理数合成实数，且实数和数轴上的点是一一对应的，因此，全体实数充满了整个数轴，而无一空隙.这就是实数的连续性.

第三，实数的有序性.

任何两个实数a和b，总有下列三种情况之一：即

$$a<b、a=b、a>b$$

这称实数的有序性.

全体实数构成一个实数集，用R表示.今后我们所研究的数主要是实数.为了方便起见，我们常把实数a和数轴上的点$p(a)$不加区别，所以说实数a和点$p(a)$都是相同的意思.

(二)绝　对　值

在高等数学里我们常要用到一些有关绝对值的知识.

1. 绝对值的定义

设x为任一实数，则x的绝对值表示为$|x|$，且

$$|x|=\begin{cases}x & 当x\geqslant 0时\\ -x & 当x<0时.\end{cases}$$

而

$$|x-a|=\begin{cases}x-a & 当x\geqslant a时\\ a-x & 当x<a时.\end{cases}$$

就几何意义来说，$|x|$表示数轴上的点x与原点之间的距离；而$|x-a|$则表示数轴上的点x与点a之间的距离.不论x在a的左边还是右边，距离之值总是取正号.

2. 绝对值的性质

(1) $|x|\geqslant 0$；　　(2) $|x|=\sqrt{x^2}$；

(3) $|-x|=|x|$；

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

这是因为：当$x>0$时，$-|x|<x=|x|$；

当$x=0$时，$-|x|=x=|x|$；

当$x<0$时，$-|x|=x<|x|$.

合起来即有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(5) 如果$a\geqslant 0$，则$|x|\leqslant a$相当于$-a\leqslant x\leqslant a$

3. 绝对值的四则运算

(1) 设x、y为任意实数.

则
$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

证明：根据性质(4)，有
$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$$
$$-|y|\leqslant y\leqslant |y|$$

两式相加，得：
$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|$$

再根据性质(4)，即得：
$$|x+y|\leqslant |x|+|y|$$

即两个数的和的绝对值，不超过它们的绝对值的和.

(2) 设x、y为任意实数，

则
$$|x-y|\geqslant |x|-|y|$$

证明：由$|x|=|(x-y)+y|\leqslant |x-y|+|y|$

则得
$$|x-y|\geqslant |x|-|y|$$

即两数差的绝对值，不小于这两个数的绝对值的差

(3) 设x、y为任意实数

则
$$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$$

(4) 设x、y为任意实数，且$y\neq 0$，

则
$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$$

(3)、(4) 两个公式的证明，根据乘法和除法的定义即可得出，故不赘述.

(三)区间和邻域

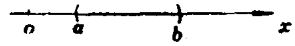
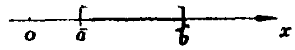
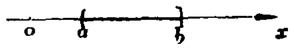
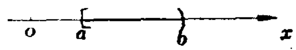
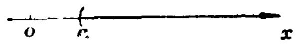
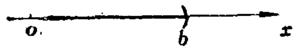
1. 区 间

我们已经知道R代表全体实数.在以后许多问题的讨论中，我们常常要考虑在两个实数中间的一切实数，这就是所谓区间.在高等数学中所用到的区间名称、定义及其表示法列表如下(取实数a、b，且$a<b$)：

应该注意：无限区间中的符号$-\infty$和$+\infty$表示负无穷和正无穷，不能作为数来看待.

2. 邻 域

设a和δ是两个实数，且$\delta>0$，则
$$|x-a|<\delta，即a-\delta<x<a+\delta$$
在数轴上表示以a为中心，长度为2δ的开区间$(a-\delta、a+\delta)$. 把这样的开区间叫做a的δ邻

名　　称	定　　义	符　　号	图　　形
开区间	$a<x<b$	$(a,\ b)$	
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,\ b]$	
半开区间	$a<x\leqslant b$	$(a,\ b]$	
半开区间	$a\leqslant x<b$	$[a,\ b)$	
无限区间	$a<x<+\infty$	$(a,\ +\infty)$	
无限区间	$-\infty<x<b$	$(-\infty,\ b)$	
无限区间	$-\infty<x<+\infty$	$(-\infty,\ +\infty)$	

域，点a称为这个邻域中心，δ为邻域的半径.(如图1.1)

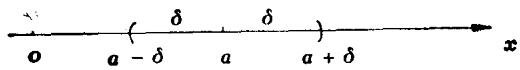


图 1.1

例如：$|x-2|<\frac{1}{2}$，即为2的$\frac{1}{2}$邻域，也就是开区间(1.5，2.5).

练习 1.1

1. 考虑下列问题：

(1) 在全体实数中有没有最大的数和最小的数？

(2) 在正整数中和负有理数中有没有最大的数和最小的数？

(3) 在闭区间[0，1]和开区间(0，1)中有没有最大的数和最小的数？

2. 在区间(0，1)内和$\left(0,\ \frac{1}{10}\right)$内都有无穷多个实数，能不能说在(0，1)内的实数个数比$\left(0,\ \frac{1}{10}\right)$内的实数个数更多些？为什么？

3. 已知：$|a|<\frac{1}{3}$，$|b|<\frac{1}{6}$，$|c|<\frac{1}{9}$，

试证 $|a+2b-3c|<1$

4. 解下列不等式，并将结果表示在数轴上：

(1) $|2x-3|\geqslant 1$；　　(2) $\left|\frac{1}{1+}\right|\geqslant 1$；

(3) $\left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1$；　　(4) $|x|>x$；

(5) $|x|=x+1$;　　(6) $|2x-1|<|x-1|$;

(7) $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$;　　(8) $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$;

(9) $|x^2-1|<|x-3|$;　　(10) $0<|x-1|^2\leqslant 4$;

(11) $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$;　　(12) $|\sin x|=\sin x+2$.

5. 设$a>0$，$b>0$，试证：$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leqslant\sqrt{|a-b|}$.

6. 求方程$|2x+3|=x^2$的实根.

7. 证明下列不等式：

(1) $|a+b|+|a-b|\geqslant 2|a|$

(2) $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\leqslant|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+|a_3-b_3|$.

§1.2 函　　数

(一)常量和变量

当我们观察各种自然现象、社会现象和进行科学实践时，经常遇到各种各样的量．例如：在讨论轮船在河流中行驶时，需要考虑船行速度、水流速度、行驶的时间、经过的距离等；在研究气体加热过程时，需要注意气体的温度、压力、体积等；在分析市场情况时，要考虑商品的数量、价格、成本、利润以及人民的购买力等等．诸如此类的一些量，就其属性来说，虽然并不一样，但都有一个共同的特点，那就是任何量都是通过一系列数值来表现的．

表现量的各种数值，经常有两种情况出现．例如在观察飞机的飞行时，碰到各种不同的量，其中有些量在飞行过程中保持常值，比如乘客的人数，行李的重量，飞机的编号等；但有些量却时时刻刻在起着变化，比如飞行的航程，距地面的高度，机油的耗损量，飞机周围空气的压力等，这些量都随时间的过程而有不同的值，即所谓变化着的量．

定义1.1　在某一现象或变化过程中，经常保持同一数值的量叫做常量，根据情况可以取不同数值的量叫做变量．

变量和常量并不是绝对的，可以随不同的场合而有变化．如果变量的变化甚微，并不影响所研究的结论时，也可以把变量看作常量．例如重力加速度，本来是随着地面的高度和纬度而变化的，但在地面附近的局部地区，由于高度和纬度差异不大，所以把重力加速度g就视为常量，但在发射人造地球卫星时，就必须考虑重力加速度的差别，因此把它作为变量．

对于常量，经常用开头的拉丁字母表示，如a、b、c、…等，而变量经常用末尾的字母表示，如x、y、z…等．

(二)函数的概念

在客观世界中的同一现象或某一技术过程中，经常存在有几个变量在共同变化着，但它们的变化并不是彼此孤立的，而是互相有关的，按着一定的规律在变化．我们先看几个例子：

例1　圆的面积A和它的半径r之间有关系式

$$A=\pi r^2$$

在这种关系中，r和A都是变量．在正的实数中r每取一个值，则必有唯一的一个A值与之对应．因而公式$A=\pi r^2$就是A和r两个变量间的依从关系．

例2 在边长为a的正方形的四个角上，切去边长为x的四个小正方形(图1.2)．然后做成一个高为x的盒子．令这个盒子的容积为V．则容积V和高度x就有关系式

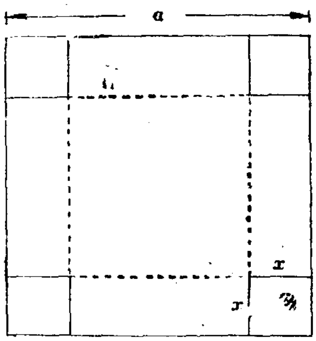


图 1.2

$$V=x(a-2x)^2$$

现在考虑x在0和$\frac{a}{2}$之间任取一个值时，V亦有确定的值与之对应．

有时对应关系可以用几个式子来表示．

例3 设某公共汽车全程20公里，其票价规定如下：乘坐4公里以内者收费1角，乘坐4—10公里者，收费2角，10公里以上者收费3角．设以P表示票价，x表示里程，则票价P和里程x之间的关系可由下式表示：

$$P=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x\leqslant 4 \text{时；}\\ 2, & \text{当} 4<x\leqslant 10 \text{时；}\\ 3, & \text{当} 10<x\leqslant 20 \text{时．}\end{cases}$$

显然把x和P视为两个变量，只要乘车行驶由0到20公里间的任何一个里程，其票价就有明确的数值．

上面的例子，都有不同的实际意义．如果抛开各自的实际意义，就其共同的本质来看，参与同一过程的两个变量之间，都有某种联系，即所谓依从关系，这种关系，主要体现了这样一个事实：只要其中的一个变量在某一范围内取定了一个数值，则另一个变量也必存在一个确定的数值与之对应．两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质．

定义1.2 设有两个变量x、y，当x在某个实数范围内取定一个值时，变量y按照某种对应关系总有确定的数值与之对应，则称变量y是变量x的函数，记作$y=f(x)$．其中x称为自变量，y称为因变量或函数，记号f就表示y随x而变化与确定的那种规律．

根据定义，对前面的几个例子我们就可以这样说：

圆面积A是其半径r的函数；

盒子的容积V是其高度x的函数；

汽车的票价P是里程x的函数．

从函数的定义来看，有两个问题应该特别注意：

1． 函数关系，也就是变量变化的依从规律．说y是x的函数，$y=f(x)$，f就代表y随x而变化与确定的对应关系．根据这种关系，对于自变量x所取的每一个值，就可以确定函数y的对应值$f(x)$．因此，函数关系f具体地就表示由自变量确定函数值的运算过程．例如，给出函数

$$y=2x^2-3x+5$$

取$x=1$时，就得对应的函数值$y=4$，取$x=2$时，得$y=7$．

如果具体地给出了某个函数的运算过程，那么这个函数的对应关系就是确定了的．有时我们只说y是x的函数，并不一定需要它的运算过程，这样写成$y=f(x)$或$y=F(x)$就可以了．

有时我们常说函数y是随自变量x的变化而变化的，这种说法并不算错，但不确切．例如对于函数

$$y=\sin^2 x+\cos^2 x+1$$

无论x取什么值，函数y的对应值总是2，并不是因x的变化而变化．因此，我们说给定了一个函数，就是指定了一个函数关系，至于函数y是否因自变量x的变化而变化，那并不是函数概念的本质．所以我们把$y=c$（c是常数）也看成一个函数，它是指不论x取任何值，y的对应值总是c．

2．函数的定义域

在函数的定义中，对自变量x在某个实数范围内取定一个值时，函数y总有确定的对应值，我们说函数在该点处是有定义的．

在数轴上使函数有定义的所有点的范围，叫做函数的定义域．

函数的定义域和函数关系是构成函数的两个要素．如果没有函数的对应关系或不存在函数的定义域，也就不能构成函数．例如

$$y=\ln\ln\sin x$$

无论x取任何值，都不能使函数有意义，所以它不能算是函数．同样

$$y=\arcsin(x^2+27)$$

也不是函数．

对于定义域中所有的点对应的函数值的点的全体，叫做函数的值域．

在实际问题中，函数的定义域是由所考虑问题的实际意义所决定的．例如前面的例1中，使圆面积有意义的半径的数值，必须$r>0$，因此它们的定义域是$(0,+\infty)$，函数的值域也是$(0,+\infty)$．在例2中，要使盒子的容积存在，它的高x必须大于零，而且不会超过边长的一半，因此它的定义域是$0<x<\frac{a}{2}$．例3的定义域就是$(0,20]$．如果不考虑函数的实际意义，单就$y=\pi x^2$，或$y=x(a-2x)^2$来讲，它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$．

以后我们所用到的函数，往往只是由某一个解析式子所给定，都不附带任何实际意义，这时我们约定：函数的定义域就是使这个式子取得有意义的数值的自变量的值的全体．

对于函数$y=f(x)$在自变量$x=a$时的函数值表示为$f(a)$．例如设$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$，则当$x=2$时的函数值为

$$f(2)=2+\sqrt{2^2+1}=2+\sqrt{5}.$$

在求函数的定义域时，往往是从函数没有定义的地方入手．

例4 求函数$y=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$的定义域．

解 因为分母不能为零，即

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)\neq 0$$

故$x\neq 3$、$x\neq -1$，故函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$．

例5 求$y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$的定义域．

解 要使函数有意义，必须$9-x^2\geqslant 0$，$x^2-4>0$

即 $$-3\leqslant x\leqslant 3,\ x<-2,\ x>2.$$

故函数的定义域是　$-3\leqslant x<2$，$2<x\leqslant 3$，

即
$$[-3,\ -2)\cup(2,\ 3]$$

例6　求 $y=\ln(4-x^2)+\arcsin\frac{2-x}{3}$ 的定义域.

解　由 $\ln(4-x^2)$ 知　$4-x^2>0$，即 $-2<x<2$；

由 $\arcsin\frac{2-x}{3}$ 知　$\left|\frac{2-x}{3}\right|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x\leqslant 5$

故所要求的定义域是 $[-1,\ 2)$.

因为决定函数的两个要素是函数关系和函数的定义域. 所以要两个函数相等，不仅函数关系相同，而且它们的定义域也必须相同. 比如

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}\text{和}\quad y=x+1$$

$$y=\ln x^2\quad\text{和}\quad y=2\ln x$$

它们的函数关系通过运算可以是一样的，然而它们不能说成是相同的函数.

(三)函数的表示法

表示函数的对应关系的方法通常有三种：

1.　表格表示法，在实际应用中，我们常把自变量和函数的对应值列成表格，用以表示函数的对应关系. 例如我们常用的平方表、立方表、对数表等. 表格法是通过由测量或统计所得出的一些数据而表示的量与量之间的关系. 这种方法用起来简单、明确，但不容易掌握其一般的对应规律，所以函数关系是很不全面的.

2.　图形表示法，就是利用曲线图形或图表表示函数的对应关系. 这在某些生产实践中或统计记录中常用到，它的优点是直观，方便，但是缺乏精确性，不能作理论上的研究.

3.　公式表示法，也叫解析表示法，这是在高等数学中研究函数最常用的办法. 例如：

圆面积公式　$A=\pi r^2$

圆周长公式　$s=2\pi r$

球体积公式　$V=\frac{1}{3}\pi r^3$

又如：　$y=\frac{1}{1+x^2}$，$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=x+\sin x+\cos x$ 等等，都是用解析式子所表示的函数，这种函数便于通过分析运算来研究函数的性质.

用公式表示的函数，通常是由一个解析式子就决定了在定义域上函数的对应关系，但是有些函数，特别是表示经济关系的许多函数，所用的解析表达式不是一个. 对自变量的某一部分数值，函数关系用一个表达式表示，而对自变量的另一部分数值，则用另一个表达式表示，把这样的函数称为"分段表示"的函数.

例如

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当}x\leqslant 0\text{时；}\\ \sqrt{x}, & \text{当}x>0\text{时，}\end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内由两个式子所表示的函数，当自变量在区间 $(-\infty,\ 0]$ 内取值时，对应的函数值由 $y=x^2$ 来计算；当 x 在区间 $(0,\ +\infty)$ 内取值时，函数值由 $y=\sqrt{x}$ 来计算. 它的图形由两个部分组成(如图1.3)，在原点的左边是抛物线 $y=x^2$，右边是抛物线 $y^2=x$ 的上

半部.

又如

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}\qquad y=\varphi(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

都是定义在全部实数轴上的分段函数. 如图1.4、图1.5所示.

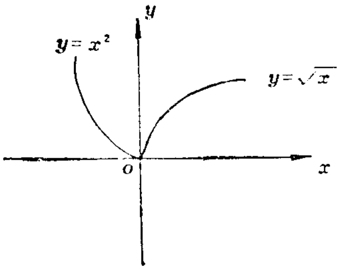


图 1.3

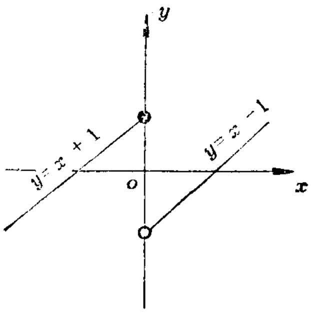


图 1.4

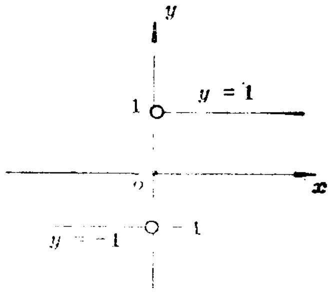


图 1.5

分段定义的函数，在商业上、经济上和其它应用科学上都有实际的意义. 应该特别注意，用几个式子所表示的分段函数，合起来是一个函数，不要当成几个函数看.

例1 某商店规定，凡购买某种商品，数量在100公斤以内者，每公斤售价100元；数量在100公斤及100公斤以上，不超过1000公斤的，每公斤售价90元；数量不低于1000公斤者，每公斤售价80元. 则其销售的收入函数为

$$s=s(x)=\begin{cases}100x & 0\leqslant x<100;\\ 90x & 100\leqslant x<1000;\\ 80x & x\geqslant 1000.\end{cases}$$

例2 某运输公司规定货物每吨公里的运费为：在10公里以内每吨公里运费a元，超过10公里，每增一公里为$\frac{4}{5}a$元，把运费m和里程s之间的函数关系用解式子表达出来，就是

$$m=m(s)=\begin{cases}as & 0<s\leqslant 10\\ 10a+\frac{4}{5}a(s-10) & s>10\end{cases}$$

这里运费m和里程s的函数关系是用分段函数表示的，其定义域为$(0, +\infty)$.

也有时把函数关系用一句话表示，并给出特定的函数记号.例如："不超过x的最大整数"，即"对任意的实数x，对应的函数y是不超过x的最大整数"，记为$y=[x]$.（见图1.6）

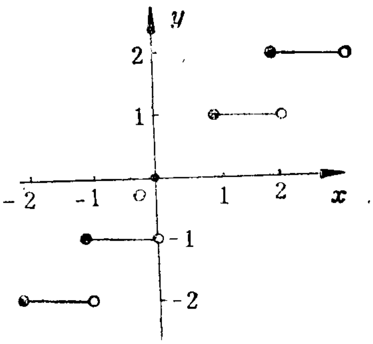


图 1.6

比如

$$[-2.1]=-3,\ [2.1]=2,\ [\pi]=3,$$

$$[1]=1,\ [0.5]=0 \quad 等等$$

练习 1.2

1. 设$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 求$f(0)$、$f(2)$、$f(x+1)$.

2. 设$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 求$f(x+\Delta x)-f(x)$.

3. 下列函数中，$f(x)$和$g(x)$是否表示同一函数，并说明理由.

 (1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与$g(x)=1$； (2) $f(x)=x$ 与$g(x)=\sqrt{x^2}$；

 (3) $f(x)=x$与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$； (4) $f(x)=e^x\cdot e^y$ 与$g(x)=e^{x+y}$；

 (5) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$ 与 $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$；

 (6) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$.

4. 求下列函数的定义域

 (1) $y=\dfrac{3x}{x^2-2x-3}$； (2) $y=\dfrac{3}{x}-\sqrt{4-x^2}$；

 (3) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$； (4) $y=\arccos\dfrac{x}{2}+\lg(x+1)$；

 (5) $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$； (6) $y=\sqrt{\sin x-1}$；

 (7) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$； (8) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{1-2x}{5}$；

 (9) $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$； (10) $y=\arcsin(x^2+2)$；

 (11) $y=\arccos(x+2)^2$； (12) $y=\lg(1-x^2)+\lg(x^2-1)$.

5. 确定函数的定义域，并作出函数的图形.

 (1) $y=f(x)=\begin{cases}x & 当0\leqslant x<3\\ 2 & 当3<x\leqslant 5\end{cases}$ (2) $y=f(x)=\begin{cases}|x^2-2| & 当0\leqslant x\leqslant 2\\ x & 当\quad x>2\end{cases}$

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & 当x<0\\ x & 当0<x<1\\ x^2-4x+4 & 当1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

求函数值$f(1)$、$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$、$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$、$f(-1)$、$f(3)$，写出函数的定义域并作出函数的图象.

§1.3 函数的几个简单性质

(一)函数的单调性

定义1.3 如果定义在区间$(a,\ b)$上的函数$y=f(x)$，对于该区间内的任意相异的两点x_1、x_2，$(x_1<x_2)$，都有