

道路工程有限元分析法

张起森 编著

人民交通出版社

道路工程有限元分析法

张起森 编著

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

本书主要介绍有限元法在道路工程中的应用。全书共有七章,前两章阐述了有限元法基本概念以及与本书有关的弹性和塑性力学基本公式。后五章介绍了有限元法在路面结构、路基工程、工程动力学问题和各种非线性问题中的应用。书中列举了较多的计算实例,论证了有限元法的分析精度和可靠性。

本书可供从事道路工程设计、施工和研究的工程技术人员以及有关院校师生学习参考。对于铁道工程、建筑工程技术人员亦有参考价值。

道路工程有限元分析法

张 起 森 编著

人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
人民交通出版社印刷厂印

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张: 13.75 插页: 1 字数: 330 千

1983年7月 第1版

1983年7月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—3,100 册 定价: 2.15元

目 录

序 言	1
第一章 有限元法的基本概念	3
1-1 有限元法的原理	3
1-2 有限元半分析法	11
第二章 弹性与塑性力学的基本公式	16
2-1 弹性力学的基本公式	16
2-2 平面弹性力学问题的基本方程	20
2-3 轴对称应力问题的基本方程	21
2-4 塑性力学的基本公式	22
第三章 平面问题有限元法	25
3-1 平面问题有限元法概述	25
3-2 计算示例	32
第四章 路面应力分析的有限元法	36
4-1 概述	36
4-2 轴对称圆形均布荷载作用下路面应力的有限元分析及计算示例	36
4-3 单向圆形均布水平荷载作用下路面应力分析的有限元半分析法及算例	54
4-4 刚性路面的有限元法及有限条法	76
4-5 路面应力分析的有限棱法	97
4-6 考虑材料非线性的路面应力分析及算例	105
第五章 有限元法在路基工程中的应用	120
5-1 土的应力应变非线性分析	120
5-2 软土地基上路堤的有限元分析	124
5-3 软土地基固结变形的计算	128
5-4 地基固结变形的非线性分析	136
5-5 路基边坡稳定性的弹性及弹塑性分析	141
5-6 挡土结构受力分析的有限元法	148
第六章 动力问题有限元法的基本概念及其在道路工程中的应用	153
6-1 土的动力特性概述	153
6-2 动力问题的虚功方程和哈密顿原理	156
6-3 动力方程、质量矩阵及阻尼矩阵	157
6-4 结构的自振频率和振型计算（无阻尼自由振动问题）	164
6-5 动力方程有限元解法	166
6-6 计算示例：边坡的地震荷载分析	173
第七章 材料非线性问题——弹塑性、蠕变、粘弹性及其他	176

7-1	有限元法在材料非线性问题（土力学问题）中的应用概况	176
7-2	塑性的基本理论及其应用	180
7-3	弹塑性问题的有限元分析法	184
7-4	蠕变、粘—弹性问题的分析	189
7-5	“无张力”分析	192
7-6	成层材料的分析	194
附录一	三角形面积坐标及其积分公式.....	197
附录二	垂直圆形均布荷载作用下多层路面应力分析的有限元电算程序(以四层为例)	199
附录三	多层路面应力非线性有限元分析的电算程序.....	205
参考文献		214

序 言

有限元法已在工程实际中得到了很广泛的应用。许多工程技术人员利用有限元法这个有力工具,借助计算机解决了许多工程技术问题。有限元法已为人们公认是一种行之有效的结构(和非结构)分析方法。

目前,国内外介绍有限元法及其应用的书籍和文章确实已经不少,但是结合道路工程的特点,比较系统地介绍有限元法在道路工程中应用的书籍还是不多,为此,作者根据自己几年来从事这方面工作的体会,感到有必要编写一本这方面的书籍,使道路工程界的同志能比较方便地阅读和掌握这方面的知识,起个抛砖引玉的作用。这就是作者编写这本书的意图。如果本书能对读者有所裨益,或引起工程界的同志对这方面的兴趣的话,那作者就感到心满意足了。

本书除序言之外还有七章。这七章的内容大体是这样安排的:第一章是从力学角度阐述有限元法的基本概念,这比从数学角度介绍有限元法更容易为工程技术人员所接受。学习本章之后,对有限元法便有了一个较完整的认识。另外,本章还介绍了有限元半分析法,这是目前在工程界很受注意的一种方法。为了使读者学习以后各章方便,第二章摘录了本书所涉及的一些弹性和塑性力学的基本公式。在有了上述预备知识之后,第三章便以平面问题作为例子(平面问题是弹性力学中的最简单问题),说明有限元法的分析方法和步骤,并举出了例子说明有限元法的计算精度。第四章起,直到第七章,都是说明有限元法在道路工程中的实际应用,依次包括:路面结构(柔性路面、刚性路面)、路基工程(地基、路堤、边坡和挡土结构)、动力作用问题以及各种材料非线性(弹塑性、蠕变、粘弹性等)问题。由于作者近几年的工作主要是研究有限元法在路面结构中的应用,所以第四章的内容写的比较详细,篇幅也占的最大,可以说它基本上包括了现今作者所看到的国内外在这方面研究的主要成果。同时,在分析方法上除一般的有限元法外,还用到了有限元半分析法、有限条法和有限棱法。对于路面的非线性分析(弹性非线性问题)也作了详尽的介绍。第五章对土的非线性、路堤和路堑边坡的稳定、地基固结变形及挡土结构受力的有限元分析方法作了介绍,并列举了具体的例子来说明这种分析方法的正确性。第六章较系统地说明了动力问题有限元法的概念、分析方法和在道路工程中的具体应用示例。第七章所介绍的内容对于一般读者讲来是比较新鲜的,用有限元法来研究材料非线性问题,这是一个目前正在发展和有待完善的课题,也是突出有限元法优越性的重要一面。介绍这些分析方法及其广泛的应用,对于今后我们开展非线性问题的研究工作是会有益的。

在本书编写过程中,曾经得到许多同志的帮助和支持,其中有湖南大学的王磊老师、熊祝华老师、谭邦本老师、王贻荪老师,湖南省计算技术研究所的谢干权同志,中国科学院数学研究所的邵秀民同志。书中一些例题的计算工作是在我所林钟铭同志、唐雪生同志的帮助下完成的。附录二、三中的电算程序是在湖南省计算技术研究所李建华同志协助下编制的。书中的插图是由刘振福同志、机械室的同志描绘的。另外,我所在的领导和有关同志对本书的编写工作也十分关心和支持。在此一一致谢。

由于作者水平所限，书中所介绍的内容肯定是很不全面的，甚至还可能有错误。对此请同志们批评和指正。

张 起 森

一九八〇·十 长沙

第一章 有限元法的基本概念

有限元法的概念其实早有提起。1943年数学家考兰特 (Courant) 在分析扭转问题时提出了这个概念。1952年另一个数学家苏杰 (Syngé) 对这个方法作了进一步的研究, 并发表了专门的著作。但是在四十年代到五十年代初, 数学家们的这个概念并没有引起工程界的任何注意。到了五十年代中, 在生产需要的推动下, 有限元法才从结构矩阵分析方法的基础上迅速地发展起来。这个方法的实际应用, 首先在美国用于计算飞机结构的应力, 此后在土木工程、机械工程等部门也得到了应用和发展。随着电子计算机的发展, 该方法已逐步取代经费昂贵、耗时长、费力大的结构模型试验 (如飞机结构的风洞试验、光弹性试验等)。尤其是有限元法对板、壳结构, 空间应力分析, 处理非线性问题 (几何非线性和物理非线性), 动力分析及流体力学问题等的成功应用, 使有限元法的内容愈来愈丰富。当今这个分析方法已成为结构分析中的一个最为有效的方法。

1-1 有限元法的原理

有限元法是根据变分原理求解数学物理问题的一种数值计算方法。它的理论基础是能量原理。根据不同的能量原理可得到不同的有限元分析方法。利用最小势能原理或虚功原理, 把求解的问题化为一个变分问题, 再经过离散化得到的有限元计算格式称为位移法。位移法从直观讲就是以位移分量为基本未知量的方法。这是目前应用最广泛的一种方法。本书着重介绍的就是以位移分量为未知量的有限元位移法及其应用。另一种方法为力法。力法是以最小余能原理或余虚功原理为基础的, 它的基本未知量是应力各分量。为了对有限元法有个较全面的了解, 本章也对力法作一概要的介绍。此外, 还有一种以位移分量和应力分量同时作为基本未知量的方法, 这种方法称为混合法。它可以从两种原理建立: 一种是以修正的余能原理为基础, 除了在每个单元内假设平衡的应力场外, 还沿单元的边界假定协调的位移场; 一种是从赖斯纳 (Reissner) 变分原理导出, 它基于在整个物体上假设连续的位移场和在每个单元假定平衡的应力场。混合有限元法已在结构分析中得到了某些应用 (如板、壳分析及平面弹性问题), 并显示出了某些优越性 (如与位移法比较, 求解同样的问题, 混合法的计算时间可以缩短, 精度可以提高)。对此法需要进一步了解的同志, 请参阅书后参考文献中列举的有关文章。

1. 位移法

让我们考察图 1-1 所示弹簧的受力情况, 弹簧受力作用后发生变形, 在变形过程中克服内力所做的功, 就作为能量积蓄在弹簧内部, 这个能称为变形能。根据力学的知识可知, 此时的变形能为

$$\bar{U} = -\frac{1}{2} \int_0^L \sigma \varepsilon dx = -\frac{E}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (1-1)$$

式中: E 为弹簧的弹性常数, u 为弹簧某点的伸长量。

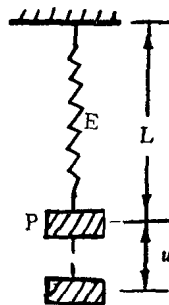


图 1-1

由(1-1)式可知, 在求得了位移函数 $u=u(x)$ 后, 就可得到弹簧的变形能 $\bar{U}$ 。因此, 变形能 $\bar{U}$ 是位移函数 $u(x)$ 的函数。这种“函数的函数”, 数学上称为泛函。

图 1-1 所示物体, 它的稳定平衡状态应是在各种可能存在的位移状态中使总位能达到极小的状态, 这就是最小势能原理。根据最小势能原理, (1-1)式中所求的位移函数 $u=u(x)$ 应是在满足边界条件的各种可能的函数中使变形能 $\bar{U}$ 达到极小的函数。这样, 就把求解弹簧位移函数 $u(x)$ 的问题转化为一个求泛函极值 (即变分问题) 的问题。

这个变分问题可通过离散化采用下面的方法求解。

如图 1-2 所示, 把求解区间 $[0, L]$ 划分为有限个互不重叠的小区间 $[x_i, x_{i+1}] (i=0, 1, \dots, n-1)$, 其中 $x_0=0$, $x_n=L$, 这些小区间我们称之为单元。在每个单元 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 再选择一些节点, 通常就选其两端点 x_i, x_{i+1}

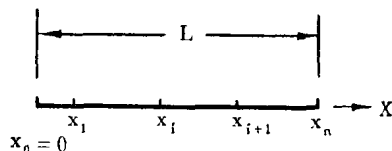


图 1-2

为节点。我们的目的就是要求得使变形能 $\bar{U}$ 为极小的位移函数 $u=u(x)$ 在这些节点上的值 u_i (通常是近似值), 且满足 $u_0=0, u_n=a$ 。

但是要计算泛函(1-1)式, 首先必须知道在整个求解区间 $[0, L]$ 上的位移函数值 $u(x)$ 。这就需要引进插值函数的概念。所谓插值函数就是由节点上的函数值 u_i 所构造出来的整个求解区间上的函数。在整个求解区间上, 为了构造插值函数, 可以在每个单元上分别进行。例如, 对第 i 个单元 $[x_i, x_{i+1}]$, 若节点 x_i, x_{i+1} 上的位移函数值分别为 u_i, u_{i+1} , 那末对于本问题的插值函数可用线性插值的方法构造出来(图1-3):

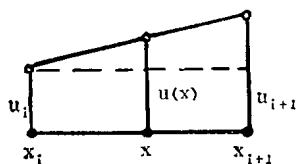


图 1-3

$$u(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} u_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1} \quad (1-2)$$

$$(x_i \leq x \leq x_{i+1})$$

将上式代入(1-1)式, 得

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{E}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \\ &= \frac{E}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \quad (1-3)$$

根据最小势能原理, 节点位移 $u_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 应满足使泛函达到极小的条件, 即

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_i} = E \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \right) = 0 \quad (1-4)$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1)$$

这是一个以 u_i 为未知量的线性代数方程组, 求解之, 就可得到节点上位移的近似值 u_i 。有了 u_i 值, 就可根据应变与位移的关系

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \quad (1-5)$$

和应力与应变的关系

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-6)$$

求得节点的应变和应力及弹簧任一点的应变和应力, 从而得到弹簧的应力分析结果。

上述方法, 亦即将求解区间划分为有限个单元, 通过构造插值函数, 利用最小势能原理求得各单元节点上的位移近似值。这就是有限元位移法的全部实质。

同样的原理可推广到平面弹性问题及空间弹性问题的有限元分析。这些我们将在以下各章中具体进行介绍。

2. 力法

在介绍力法之前，我们先要说明余虚功原理和最小余能原理的概念。余虚功原理和最小余能原理，与虚功原理和最小势能原理是相类似的，它们之间的区别仅在于，前者以应力分量为未知函数，后者则以位移分量为未知函数。

余虚功原理：若弹性体在给定外力作用下处于平衡状态，当给弹性体应力和外力以微小改变（称为虚力），则总变形的余虚功等于余应变能。若以数学公式表示，则为

$$\int_s U^T \delta \Phi \, ds + \int_\Omega U^T \delta F \, d\Omega = \int_\Omega \varepsilon^T \delta \sigma \, d\Omega$$

或

$$\delta W^* = \delta V^*$$

式中：\$U\$——位移，\$\{u, v, w\}^T\$

\$\Phi\$——面力，\$\{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}^T\$

\$F\$——体力，\$\{f_x, f_y, f_z\}^T\$

\$\sigma\$——应力，\$\{\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}\}^T\$

\$\varepsilon\$——应变，\$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_y\}^T\$

最小余能原理：在所有满足平衡方程和应力边界条件的应力分量中，只有同时满足协调条件的应力分量才使弹性体总余能取极小值。

力法目前主要用于杆系结构应力分析，对于如何把它运用到连续体系中去，还需进一步研究。因此，在这里我们仅通过超静定结构的分析来说明力法的有关问题。

在力法中，各单元的相互作用，是以力为未知量，以力的平衡方程为基础的。力的平衡方程表示为：

$$[A]\{S\} + \{q\} = 0 \quad (1-7)$$

其中，\$\{S\}\$为各单元内力（包括约束反力）组成的列向量；\$[A]\$为决定各单元相互间位置的长方形阵；\$\{q\}\$为决定于外荷载的列向量。

结构的内力\$\{S\}\$的解为

$$\{S\} = [b_0]\{q\} + [b_1]\{X\} \quad (1-8)$$

式中：\$[b_0]\$——单位外荷载分配矩阵；

\$\{q\}\$——外荷载向量；

\$[b_1]\$——由超静定产生的内力分配矩阵，它的各列线性无关，且均满足平衡方程；

\$\{X\}\$——超静定结构中的赘余未知力。

结构的余应变能是：

$$\bar{U} = -\frac{1}{2} \{S\}^T [f] \{S\} \quad (1-9)$$

其中，\$[f]\$是单元的总柔度矩阵，由结构各单元的柔度矩阵（荷载与节点位移的转换矩阵）组成；\$\{S\}^T\$是\$\{S\}\$的转置矩阵。

边界条件是：

$$\{S\}_h = \{g\} \quad (1-10)$$

其中，\$\{S\}_h\$表示\$S\$中的若干内力组成的列向量；\$\{g\}\$表示单元内力必须满足的条件，亦为列向量。

由最小余能原理可知, 满足(1-7)式和(1-10)式, 并使(1-9)式达到极小的 $\{X\}$, 代入(1-8)式, 便得到问题的解答 $\{S\}$ 。即

$$\text{由} \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} = 0 \quad (1-11)$$

得

$$[b_1]^T [f] [b_1] \{X\} + [b_1]^T [f] [b_0] \{q\} = 0 \quad (1-12)$$

或

$$\{X\} = -([b_1]^T [f] [b_1])^{-1} ([b_1]^T [f] [b_0] \{q\}) \quad (1-13)$$

因此, 结构的内力 $\{S\}$ 为:

$$\{S\} = [b_0] \{q\} + [b_1] (-([b_1]^T [f] [b_1])^{-1} ([b_1]^T [f] [b_0] \{q\})) \quad (1-14)$$

进一步, 由节点位移与节点荷载的关系求得节点位移值:

$$\{U\} = \{f\} [b_0] \{q\} + \{f\} [b_1] \{X\} \quad (1-15)$$

3. 有限元形态及位移插值函数

在杆系结构分析中, 梁和柱有时是直接作为单元来分析的, 把梁或柱的联结点当作节点。这些是大家熟悉, 也是容易理解的。但是, 有限元法应用到连续体的应力分析时, 就会涉及到采用何种单元形态进行分析(剖分)的问题。因为这不仅关系到计算机的存贮量和计算时间问题, 而且直接影响到分析结果的精确度。所以, 关于单元的形态问题有许多人都进行过研究, 并提出了各种各样的单元形态。主要有:

(i) 平面单元

三角形单元

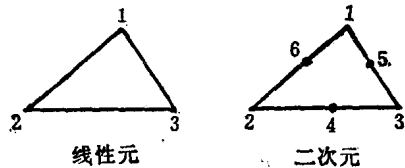


图 1-4

矩形单元

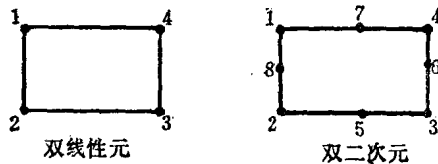


图 1-5

四边形单元

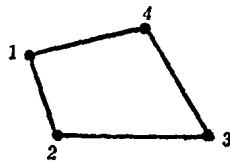


图 1-6

(ii) 块体单元

四面体单元

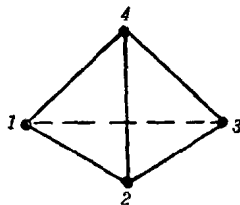


图 1-7

立方体单元

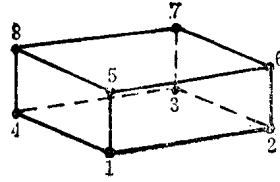


图 1-8

六面体单元

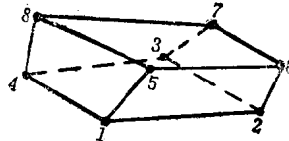


图 1-9

三棱柱单元

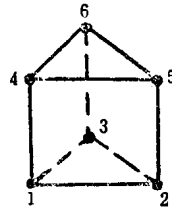


图 1-10

(iii) 圆环形单元

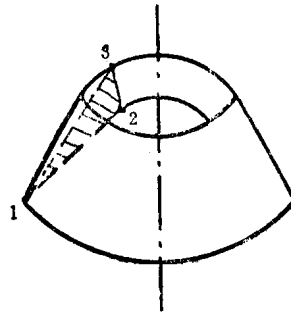


图 1-11

在平面单元中还有曲边三角形单元、曲边矩形单元和曲边四边形单元等。还有由上述单元派生出来的三次元、四次元等单元族。但是工程计算中最常用的是三角形线性元、二次元及矩形双线性元。在轴对称应力分析中，采用的是三角形圆环形单元。在空间问题分析中，常采用四面体单元和立方体元。可见，在连续体有限元分析中，采用什么单元形态对连续体进行离散是需要慎重选择的。同时，在采用上述单元形态时，单元的节点就不像杆系单元那样通常仅有杆件二端的二个节点，一般至少有三个节点（三角形线性元），甚至八个节点（矩形双二次元及立方体单元）或更多。因此，对于连续体的有限元分析是比较复杂的。

为了以后应用上的方便，下面我们列出这些常用单元形态的位移插值函数及形状函数。

(i) 三角形平面单元

假定位移场是线性的；

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (1-16)$$

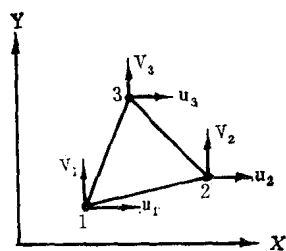


图 1-12

这个位移场对单元的每个节点都应成立(图1-12), 所以有

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (1-17)$$

或 $\{u\} = [\bar{N}]\{\alpha\} \quad (1-18)$

求逆得到

$$\{\alpha\} = [\bar{N}]^{-1}\{u\} \quad (1-19)$$

式中: $[\bar{N}]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$

A ——单元面积, $2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$

以(1-19)式代入(1-16)式, 便得到前面所说的插值函数

$$u = [1 \quad x \quad y] [\bar{N}]^{-1} \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T \quad (1-20)$$

同样得到

$$v = [1 \quad x \quad y] [\bar{N}]^{-1} \{v_1 \quad v_2 \quad v_3\}^T \quad (1-21)$$

或者写成

$$\{U\} = \{u \quad v\}^T = [N]\{\delta\} \quad (1-22)$$

式中: $\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}^T$, 表示单元节点的位移场; $[N]$ ——称为形状函数或形函数。

所谓形状函数, 就是指决定单元位移函数几何特征的基本参数。在这里

$$[N] = [IN_1 \quad IN_2 \quad IN_3] \quad (1-23)$$

式中: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2×2) 阶单位矩阵

$$N_1 = (a_1 + b_1x + c_1y)/2A$$

$$N_2 = (a_2 + b_2x + c_2y)/2A$$

$$N_3 = (a_3 + b_3x + c_3y)/2A$$

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

由此可见, 平面三角形单元是一个“常应变”单元。因为, 在单元上有 $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_2$, $\epsilon_y =$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6 \text{ 和 } \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_6$$

(ii) 矩形平面单元

矩形平面单元的位移场假定为(图1-13):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (1-24)$$

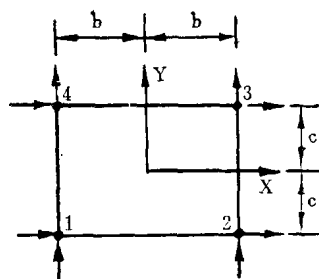


图 1-13

这个位移场对于矩形单元的四个节点都适合, 经过上面类似的推演, 我们得到以节点位移表示的位移插值函数:

$$u = \frac{1}{4bc} [(b-x)(c-y)u_1 + (b+x)(c-y)u_2 + (b+x)(c+y)u_3 + (b-x)(c+y)u_4] \quad (1-25)$$

$$v = \frac{1}{4bc} [(b-x)(c-y)v_1 + (b+x)(c-y)v_2 + (b+x)(c+y)v_3 + (b-x)(c+y)v_4] \quad (1-26)$$

改写成矩阵的形式, 为

$$\begin{aligned} \{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \\ &= [N]\{\delta\} \end{aligned} \quad (1-27)$$

$$\text{其中: 形状函数 } [N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{(b-x)(c-y)}{4bc} \quad N_2 = \frac{(b+x)(c-y)}{4bc}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(c+y)}{4bc} \quad N_4 = \frac{(b-x)(c+y)}{4bc}$$

(iii) 四面体单元

在空间问题的有限元分析中, 四面体单元是一个最基本的单元体。所以我们介绍一下四面体单元的位移插值函数及形状函数(图1-14)。

四面体单元中，一点的位移状态用三个坐标方向的位移分量 u , v 和 w 确定，即

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1-28)$$

假定的位移场表示为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (1-29)$$

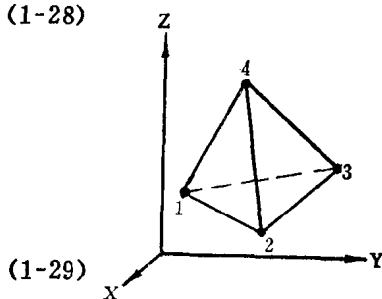


图 1-14

这个位移场对单元的所有节点都适合，因此可用类似方法求得 α_1 、 α_2 、……、 α_{12} 之值，代入上式，得到以节点位移表示的位移插值函数：

$$u = \frac{1}{6V} \{ (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)u_2 + (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)u_3 + (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)u_4 \} \quad (1-30)$$

$$v = \frac{1}{6V} \{ (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)v_1 + (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)v_2 + (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)v_3 + (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)v_4 \} \quad (1-31)$$

$$w = \frac{1}{6V} \{ (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)w_1 + (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)w_2 + (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)w_3 + (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)w_4 \} \quad (1-32)$$

其中： V 表示四面体体积

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = \det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_1 = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \det \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \quad d_1 = -\det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

.....

显然，单元体的位移场是由其节点的12个位移分量所规定。如令

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (1-33)$$

其中,

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} \quad \{\delta_2\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \dots\dots$$

$$\text{则} \quad \{U\} = [IN_1 \quad IN_2 \quad IN_3 \quad IN_4] \{\delta\} = [N] \{\delta\} \quad (1-34)$$

式中, 形状函数 $[N] = [IN_1 \quad IN_2 \quad IN_3 \quad IN_4]$

$$N_1 = \frac{(a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)}{6V} \quad N_2 = \frac{(a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)}{6V}$$

$$N_3 = \frac{(a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)}{6V} \quad N_4 = \frac{(a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)}{6V}$$

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (3 \times 3) \text{ 阶单位矩阵}$$

1-2 有限元半分析法

有限元半分析法是有限元法的一个分支, 是有限条法概念的深化和发展。所谓有限元半分析法就是在有限元分析中引入正交函数(三角级数、双曲线函数等), 利用函数的正交性性质, 把分析的问题分离为一系列独立的问题, 这些问题较原来的问题是更容易求解的(例如, 三维的问题分离为一系列二维问题, 二维问题分离为一系列一维问题等等)。这些独立问题解的组合就是原问题精确解的逼近。从数学本质上讲, 半分析法是分离变量法的一个部分, 其意义亦是对变量进行分离, 使问题的求解得到简化。

半分析法的优点, 可以使总刚度矩阵降阶, 适合于用较小的机器容量解决较大的工程问题, 并可缩短用机时间, 节省计算费用。所以, 有限元半分析法引起了人们很大的兴趣。

下面我们从二个例子来说明半分析法的概念。

1. 简支梁求挠度

图1-15所示为二端简支, 受集中荷载 P 作用的梁。梁的挠度曲线假定为正弦级数:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots\dots$$

$$= \sum_{n=1}^m a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(1-35)

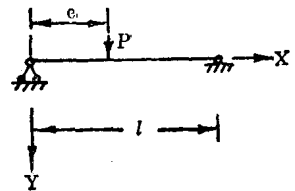


图 1-15

上式中的每一项及其二阶导数在 $x=0$ 及 $x=l$ 二端为零, 满足简支梁的边界条件。

为了求得梁的挠度, 只要求得(1-35)式中的各个系数 a_1 、 a_2 、 a_3 、……等就可以了。为此, 我们利用能量原理。

$$\text{荷载 } P \text{ 的势能为 } V_1 = -Py = -P \sum_{n=1}^m a_n \sin \frac{n\pi e}{l} \quad (1-36)$$

$$\text{梁的弯曲应变能为 } V_2 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1-37)$$

EJ 为梁的抗弯刚度。将(1-35)式代入(1-37)式, 得:

$$V_2 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \frac{4\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \frac{9\pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)^2 dx \quad (1-38)$$

分析一下上式中括号内的平方项，有下面二类：

级数中各项的平方，如

$$a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{n\pi x}{l}, \quad (1-39a)$$

级数中任意两项的乘积，如

$$2a_n a_m \frac{m^2 n^2 \pi^4}{l^4} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1-39b)$$

对上面各项求积分可利用三角函数的正交性性质：

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\ I_2 &= \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ I_3 &= \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx \end{aligned} \quad (1-40)$$

积分 $I_1 = 0$ ；当 $m \neq n$ 时， $I_2 = I_3 = 0$ ；当 $m = n$ 时， $I_2 = I_3 = \frac{l}{2}$ 。

因此

$$\int_0^l a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{2l^3} \quad (1-41)$$

$$\int_0^l 2a_m a_n \frac{m^2 n^2 \pi^4}{l^4} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad (1-42)$$

把(4-43)式中的每一项算出后， V_2 可写成

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{EJ}{2} \left(\frac{a_1^2 \pi^4}{2l^3} + \frac{a_2^2 \cdot 2^4 \cdot \pi^4}{2l^3} + \frac{a_3^2 \cdot 3^4 \cdot \pi^4}{2l^3} + \dots \right) \\ &= \frac{EJ}{4l^3} \sum_{n=1}^m n^4 a_n^2 \end{aligned} \quad (1-43)$$

梁的总势能为外力的势能和弯曲应变能之和：

$$V = V_1 + V_2 = -P \sum_{n=1}^m a_n \sin \frac{n\pi e}{l} + \frac{EJ}{4l^3} \sum_{n=1}^m n^4 a_n^2 \quad (1-44)$$

梁的平衡位置对应于梁的总势能取极小值

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0 \quad (1-45)$$

将(1-44)式的 V 代入上式，得：

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4 n^4} \sin \frac{n\pi e}{l} \quad (n=1, 2, \dots, m) \quad (1-46)$$

所以，梁的挠度曲线方程为

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi e}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1-47)$$