

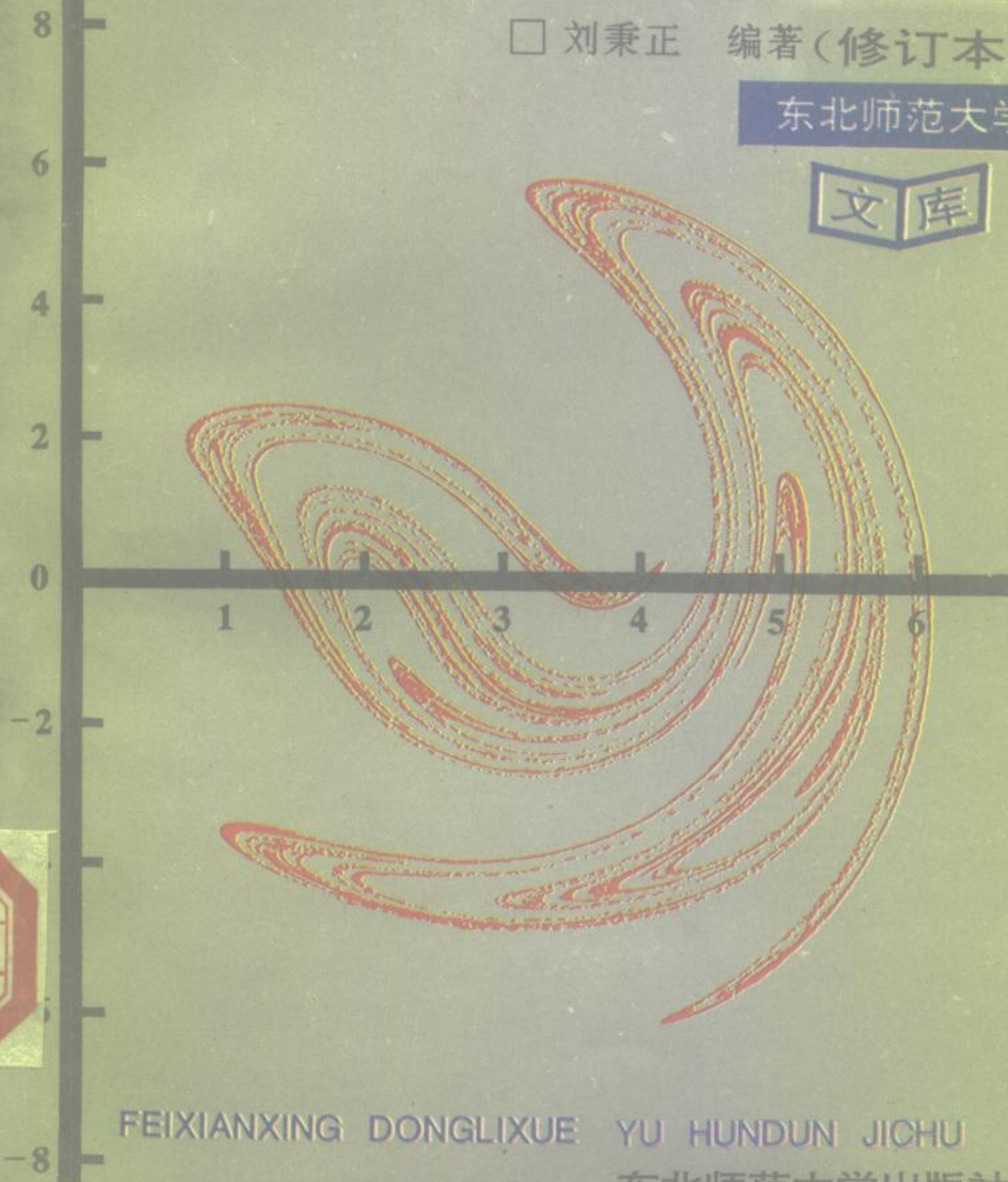
# 非

# 线性动力学 与 混沌基础

□ 刘秉正 编著 (修订本)

东北师范大学

文库



FEIXIANXING DONGLIXUE YU HUNDUN JICHU

东北师范大学出版社

0313

450583

L63

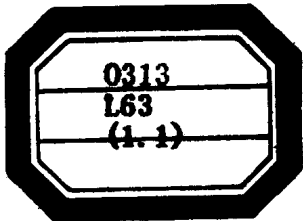
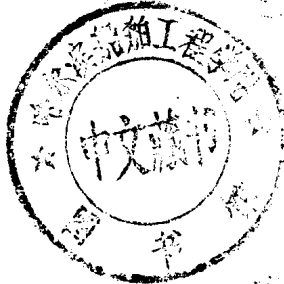
(1.1)

东北师范大学文库

# 非线性动力学与混沌基础

(修订本)

刘秉正 编著



00450583

东北师范大学出版社

1994·长春

(吉) 新登字 12 号

DZ03/14

东北师范大学文库

**非线性动力学与混沌基础**

**FEIXIANXING DONGLIXUE YU HUNDUN JICHU**

刘秉正 编著

---

责任编辑：王忠山      封面设计：李冰彬      责任校对：方 军

东北师范大学出版社出版      东北师范大学出版社发行

(长春市斯大林大街 110 号) 东北师范大学出版社激光照排中心制版

(邮政编码：130024)      长春全安印刷厂印刷

---

开本：850×1168 毫米 1/32      1994 年 9 月第 1 版

印张：13.5      1995 年 9 月第 2 次印刷

字数：327 千      印数：1 001—4 000 册

---

ISBN 7 - 5602 - 1331 - 6/O · 80      定价：15.00 元

本书系东北师范大学  
图书出版基金项目

## 序 言

混沌是近 20 年来由于计算机的发展而新兴起来的学科。它一出现，就很快在许多领域得到广泛应用，开阔和加深了人们对许多自然现象的认识。由于混沌是非线性动力学方程解的一种类型，混沌理论自然与非线性动力学理论紧密相关。因此在讲混沌时，也应对非线性动力学基础知识有所了解，以便使双方互相补充和促进。所以把非线性动力学和混沌放在一起，应该说是顺理成章的事。

近年来作者曾为部分从事基础物理教学的教师组织了一个《非线性动力学与混沌》的讨论班，学习讨论这方面的基础理论和一些应用。这一方面是想使参加的教师掌握混沌的基本知识和应用，以丰富各自的教学内容；另一方面，也是想引导一些教师开展有关混沌理论应用的研究。作者还为部分物理专业的研究生讲授了这门课程。为了适应上述工作的需要，作者编写了一本讲义，本书就是在该讲义的基础上修改补充而成的。

本书主要是为物理学以及相关学科（力学、化学、生物学、控制论和系统科学等）工作者和学生而写的，因此它着重介绍非线性动力学和混沌的基础知识、基础理论以及应用。对一些偏深偏专门的理论，特别是一些较严格的数学论证，一般都从简从略。在叙述上，作者也比较注意物理概念的阐释，并尽可能多地联系一些实例。作者相信，这样做对于那些希

望较快掌握这方面的基本内容并尽早开展这方面工作的同志是有好处的。

作者感谢李国庆、常丽、杨慧、刘亦未等同志在本书作图和习题选择等方面所给予的帮助。

由于作者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，诚恳地希望读者批评指正。

刘秉正

1994年1月于长春

# 目 录

<b>第一章 非线性动力学理论基础</b> .....	(1)
§ 1 非线性系统举例 .....	(1)
§ 2 非线性方程的解及其稳定性.....	(17)
§ 3 线性稳定性分析和奇点分类.....	(35)
§ 4 极限环.....	(52)
§ 5 化学振荡 .....	(64)
§ 6 分岔现象简介.....	(79)
§ 7 多重定态和突变理论简介 .....	(100)
§ 8 受迫振动 .....	(113)
<b>习 题</b> .....	(132)
<b>第二章 混 沌</b> .....	(139)
§ 9 混 沌 .....	(139)
§ 10 研究非线性振荡和混沌的某些方法.....	(153)
§ 11 离散映象 (1) .....	(174)
§ 12 离散映象 (2) .....	(192)
§ 13 间歇混沌和通向混沌的道路.....	(210)
§ 14 奇怪吸引子、分维和李雅普诺夫指数.....	(220)
§ 15 熵.....	(239)

---

§ 16	保守系统中的随机运动	(255)
§ 17	分形	(272)
习 题		(298)
<b>第三章</b>	<b>混沌的一些实例</b>	<b>(301)</b>
§ 18	固体物理中的混沌	(301)
§ 19	光学双稳态和光学混沌	(322)
§ 20	化学反应中的混沌	(339)
§ 21	可兴奋细胞的振荡和混沌	(352)
§ 22	心脏的搏动	(365)
§ 23	生态系统的振荡和混沌	(379)
§ 24	流行病学中的混沌	(393)
习题解答		(407)
参考文献		(412)



# 第一章 非线性动力学理论基础

(广义的)动力学研究的是系统如何随时间变化。所谓系统,就是指由一些相互联系(或相互作用)的客体组成的集合。这些客体,既可以是自然科学中的一些物质,如气体、液体、固体、化合物、生物的各部分或其整体,也可以是各种社会事物和组织,如各种群体或财政经济结构以至生产力和知识等较抽象的事物。系统的性质或特征是由一些所谓状态变量所表征,如粒子的坐标和动量、化合物的浓度和人口密度,等等。动力学就是要研究这些状态变量随时间变化的规律。这种规律既可表为关于状态变量的微分方程,也可用关于状态变量的离散方程表示。这些方程既可以是线性的,也可以是非线性的,但实际上多数都是非线性的,线性方程大多只是非线性方程的近似。本章将讨论用非线性微分方程表示的动力学的一些基本规律。

## § 1 非线性系统举例

在物理学中,过去人们比较熟悉的大都是用线性方程描述其动力学规律的所谓线性系统。线性方程很容易求解并且具有一些很简单的特性(如叠加原理)。然而物理现象乃至其他一些自然现象或社会现象毕竟是很复杂的,它们的动力学规律往往都须用非线性方程表示。这些非线性方程除极少数外,一般都不存在解析解。但是它们却具有迥异于线性方程解的一些独特性质。因此对

非线性方程需进行专门的研究。

下面我们首先举出一些实际存在的比较简单的非线性系统，然后逐步研究它们的解及其特点。

### 1. 弹性系统

人们熟知的弹性系统中的胡克定律就是其弹性势能与位移(形变)的二次幂成正比的，即(为简单计，我们只讨论一维情形，并设振子的质量已约化为1)

$$U(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \quad (1 \cdot 1)$$

式中  $x$  表示离开平衡点的位移， $\omega$  为常数。也就是说，系统的恢复力  $f$  与位移成正比

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\omega^2 x \quad (1 \cdot 2)$$

由牛顿第二定律便得到系统的运动方程(变量上面的圆点都表示它们对时间的导数)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1 \cdot 3)$$

上式是线性的，即服从胡克定律的弹性系统是线性的。

但是实际上许多弹性系统(包括工程上的各种构件和桁架)并不服从式(1·1)这样简单的规律。一般说来，弹性势能取如下较普遍形式(仍只分析其一维运动)

$$U(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{3}\lambda x^3 + \frac{1}{4}\mu x^4 + \dots \quad (1 \cdot 4)$$

式中  $\kappa$ 、 $\lambda$  和  $\mu$  等都是常系数。即系统的恢复力取如下形式

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\kappa x - \lambda x^2 - \mu x^3 + \dots \quad (1 \cdot 5)$$

由这样的  $U$  和  $f$  得到的运动方程自然是非线性的。至于在  $U$  的多项式表示式(1·4)应取哪些项，可根据具体问题来定。

例如人们发现,人的外耳与中耳之间的鼓膜振动具有非对称性:膜向外侧移动时,恢复力大一些。如果把鼓膜运动看作一维的,并用  $x$  表示鼓膜中心部位偏离平衡位置的位移(设向外为正),则鼓膜振动时它所受到的恢复力可近似地表为

$$f = -\kappa x - \lambda x^2 \quad (1 \cdot 6)$$

也就是

$$U = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{3}\lambda x^3 \quad (1 \cdot 7)$$

即势能也是非对称的。设鼓膜振动时的有效质量已约化为 1,则鼓膜的运动方程为

$$\ddot{x} + \kappa x + \lambda x^2 = 0 \quad (1 \cdot 8)$$

显然,上式是非线性的。设进入外耳的声音可表为(包含基音和许多谐音)

$$F = \sum_{i=1} F_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (1 \cdot 9)$$

在此声音作用下鼓膜的运动方程为

$$\ddot{x} + \kappa x + \lambda x^2 = \sum_{i=1} F_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (1 \cdot 10)$$

由于上式的非线性,使得传入内耳使人感觉到的声音除原来的音外,还可能出出现其他的音——分音和结合音。(参看 §8)。

不少弹性系统虽然是非线性的,但其弹性势能却具有对称性,它们的最简单形式是

$$U = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{4}\mu x^4 \quad (1 \cdot 11)$$

与  $\kappa$  比较,通常  $\mu$  是一较小的系数。这种系统的恢复力为

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\kappa x - \mu x^3 \quad (1 \cdot 12)$$

对于一般弹性系统  $\kappa > 0$ , 又存在两种情形:  $\mu > 0$  的硬弹性系统,

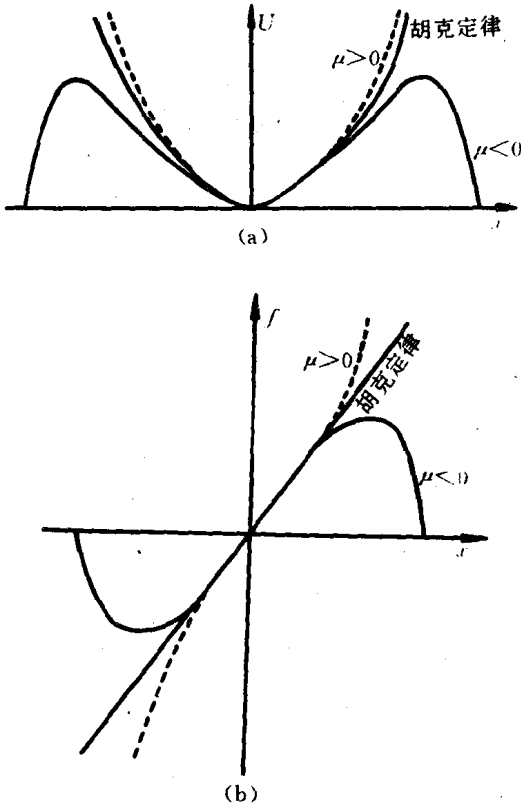


图 1-1 弹性势能和恢复力

此时恢复力大于胡克定律给出的值； $\mu < 0$  的软弹性系统，此时恢复力小于胡克定律给出的值。以上情况如图 1-1 所示。

也存在  $\kappa < 0$  的情形。其势能如图 1-2 所示（设  $\mu > 0$ ）。根据  $\frac{dU}{dx}$  和  $\frac{d^2U}{dx^2}$  变化情况很容易知道，此时有三个平衡点： $x=0$  为不稳定平衡点； $x = \pm\sqrt{-\kappa/\mu}$  为两个稳定平衡点。某些分子的势能就是如此。如氨 ( $\text{NH}_3$ ) 由四个原子组成一个四面体结构，其中三个

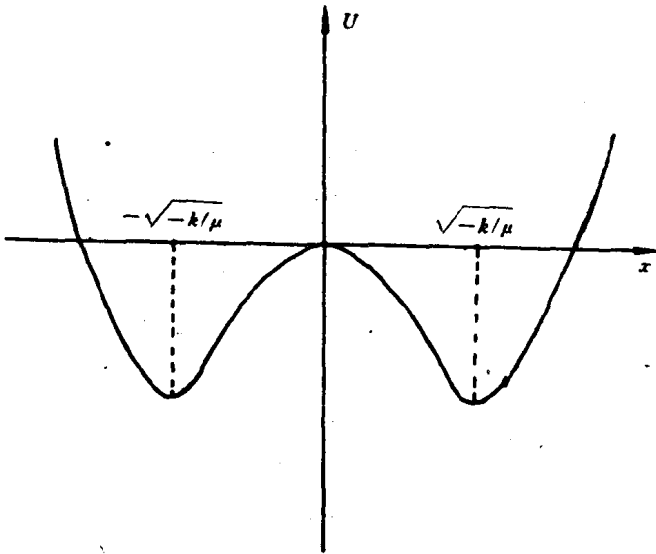


图 1-2 双稳态势阱

氢原子组成一平面，氮原子有两个稳定位置分别在此平面两侧（图 1-3）。氮原子在氢平面中心处也有一平衡位置，但是不稳定，故氮原子的势能取图 1-2 的形式。由于在氢平面 ( $x=0$ ) 有势垒存在，氮原子不能在两个稳定状态之间运动。但量子力学中的隧道效应却允许这样的运动（振荡），振荡频率在微波范围，从而使氮分子可用于微波放大器。

考虑到上述非线性，弹性系统的运动方程为

$$\ddot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \quad (1 \cdot 13)$$

实际上系统运动总是要受到阻尼作用，阻尼力通常是与速度成比例，即  $\alpha \dot{x}$ 。考虑此阻尼作用，则上式变为

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \quad (1 \cdot 14)$$

上式就是有名的杜芬 (Duffing) 方程。

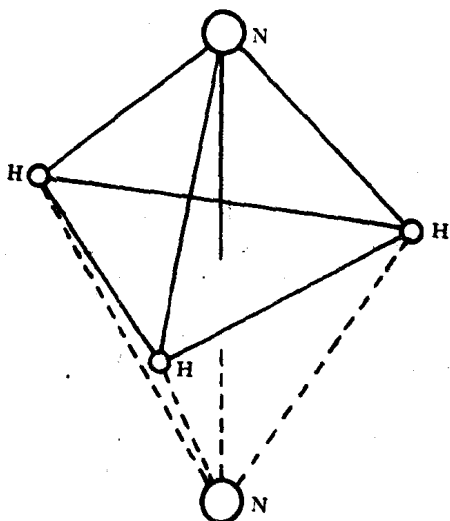


图 1-3 氨分子结构

在周期外力作用下，杜芬方程变为

$$\ddot{x} + ax + \kappa x + \mu x^3 = F \cos \Omega t \quad (1 \cdot 15)$$

式中  $F$  和  $\Omega$  分别为外力的幅值和(圆)频率。

杜芬方程对许多弹性系统的运动可以作较好描述。还可以看出，它也可以很好地描述单摆的运动，因为单摆的运动方程是

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1 \cdot 16)$$

式中  $g$  和  $l$  分别是重力加速度和单摆的摆长， $\theta$  是摆偏离平衡位置的偏角。上式实际是非线性的。如果把  $\sin \theta$  用级数展开并只取两项， $\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{6} \theta^3$ ，代入式 (1·16) 就得到类似式 (1·13) 的运动方程。

## 2. 范德玻尔 (Van der Pol) 方程

另一种常见的非线性是由于系统所受的非线性阻尼作用引起的，其中最简单而又具典型意义的是所谓范德玻尔方程。它是 20 年代由范德玻尔在研究电子管振荡器的基础上首先提出的。我们现在就先分析电子管振荡电路来导出此方程。

图 1-4 是一类典型的电子管振荡电路。对与栅极 G 相联的

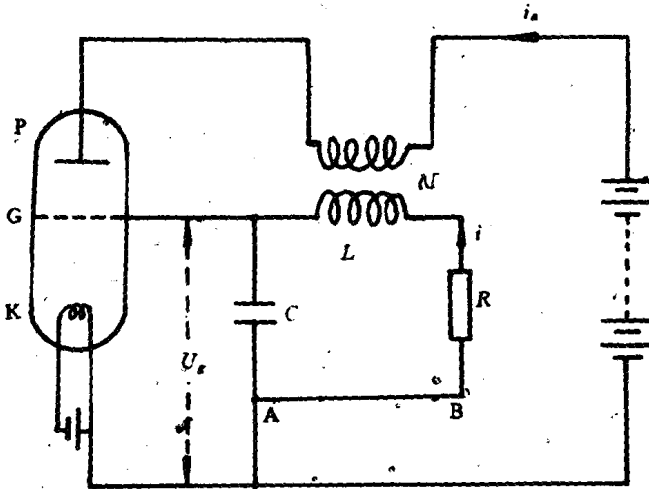


图 1-4 电子管振荡器

RLC 电路，应用基尔霍夫定律得

$$Li + Ri + V_g - Mi_a = 0 \quad (1 \cdot 17)$$

电子管的阳极电流  $i_a$  受栅极电压  $V_g$  调控，其关系为

$$i_a = SV_g \left( 1 - \frac{V_g^2}{3K^2} \right) \quad (1 \cdot 18)$$

式中  $S$  为电子管互导， $K$  为常数，又

$$C\dot{V}_g = i$$

于是式 (1·17) 变为

$$LC\ddot{V}_g + \left( \frac{MS}{K^2} V_g^2 + RC - MS \right) \dot{V}_g + V_g = 0 \quad (1 \cdot 19)$$

令

$$x = \frac{1}{K} \left( \frac{MS}{MS - RC} \right)^{1/2} V_g; \quad \alpha = \frac{MS - RC}{LC};$$

$$\omega^2 = 1/LC$$

(1·20)

则上式变为

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1 \cdot 21)$$

上式就是有名的范德波尔方程。因为在此方程中，非线性出现在  $x$  的系数里，因此它表示非线性阻尼。如果在图 1-4 中 A 和 B 两点间接入一讯号电源  $E_0 \cos \Omega t$ ，则范德波尔方程变为

$$\left[ \text{令 } F = \frac{E_0}{LCK} \left( \frac{MS}{MS - RC} \right)^{1/2} \right]$$

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = F \cos \omega t \quad (1 \cdot 22)$$

虽然电子管振荡器越来越少见（大功率振荡器仍普遍用电子管），但范德波尔方程的解却代表着一种典型的非正弦形式的振荡（参考 § 2 图 2-3）。范德波尔称此类偏离正弦振荡很厉害的振荡为弛豫振荡，并曾用此方程模拟心脏的振荡。

还可以用范德波尔方程表示各种含负阻元件的振荡电路。像单结管和隧道二极管等元件都具有负阻区，图 1-5 所示为隧道二极管的  $i-V$  曲线，其中 ab 段即为负阻区。在负阻区， $i-V$  关系可表为

$$i = -aV + bV^3 \quad (1 \cdot 23)$$

式中  $a$  和  $b$  为适当常数。试分析图 1-6 所示的含负阻元件  $N$  的电



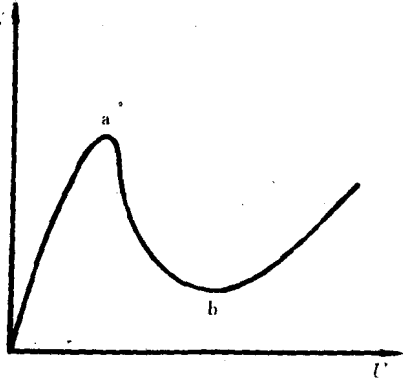


图 1-5 隧道二极管特性曲线

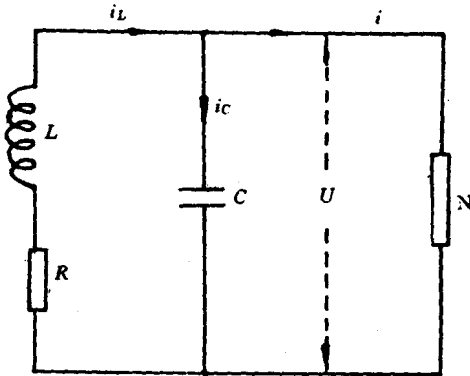


图 1-6 含负阻元件的振荡电路

路。很容易看出

$$i_c = C\dot{V}; \quad \dot{i}_c = C\ddot{V}$$

$$Li_L + Ri_L + V = 0$$