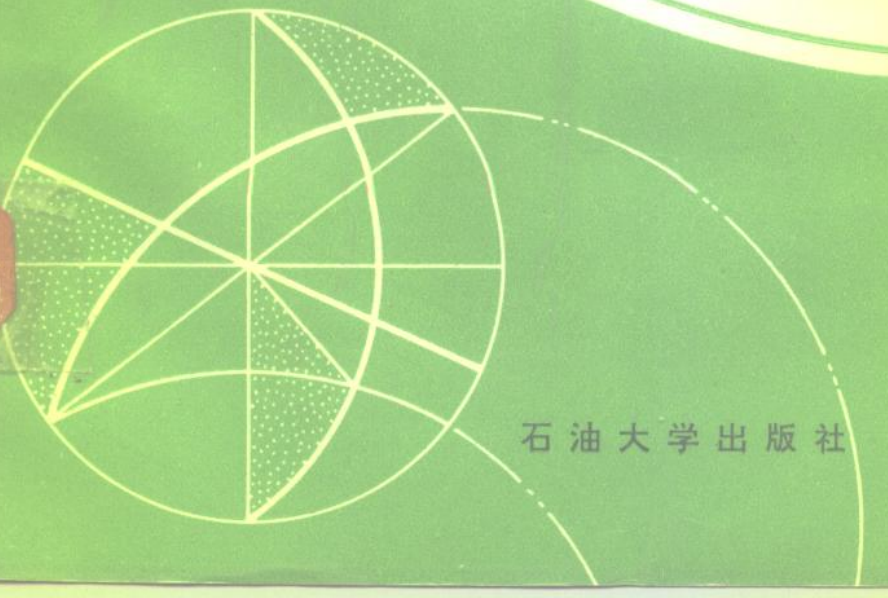
机械工程用书

球面图学与空间角度计算

孙培先 编著



石油大学出版社

机械工程用书

球面图学与空间角度计算

孙培先 编著

石油大学出版社

球面图学与空间角度计算

孙培先　编著

*

石油大学出版社出版

（山东省东营市）

新华书店发行

山东电子工业印刷厂印刷

（淄博市周村）

*

开本850×1168　1/32　6.375印张　164千字

1991年4月第1版　　1991年4月第1次印刷

印数1—4000册

ISBN 7-5636-0144-9/TH·05

定价：3.20元

内 容 简 介

本书主要介绍了用球面图学的理论与方法解决机械工程中空间角度的计算问题。具有直观形象、便于自学等特点。

书中对球面图的投影理论与绘制方法以及对球面三角形的性质与计算等展开了详尽的讨论，并列举了在机械零件设计、加工制造、焊接下料、机床刀具设计、夹具设计，以及在空间运动机构设计等机械工程中，用球面图法进行空间角度计算与转换的大量实例。

本书可供机械工程技术人员及工程图学研究者阅读与参考；也可作为中、高等工科院校机械类各专业师生的选读教材与参考书。

前　言

球面图学主要是研究球面几何图形的投影理论与性质，球面图的绘制方法与步骤，以及用球面三角形进行空间角度计算的一门科学。

球面图则是能直观形象地反映空间几何元素的相互位置及角度关系的一种平面图形。利用球面图中的三角形及其公式，可迅速准确地进行空间角度的计算。这种球面图法是一种具有系统的理论和独特的表达形式的新方法。

球面图中的极射赤平投影原理，早在天文学、航海学、晶体学、地质学等领域得到了广泛的应用，而在机械工程中的应用还是近些年的事。随着机械工业的迅速发展，一些机械零部件的结构变得更为复杂，精度要求也越来越高，在机械设计与制造过程中，常要进行复杂的空间角度的计算及转换。本书的编著旨意使球面图学的理论与方法能在机械工程技术领域得到广泛的应用和发展，使工程技术工作者能有可资遵循的捷径。

本书是在1987年初稿的基础上，经过修改和增补，注意吸取了科研的新成果及有关论文中的新内容和新观点。在理论内容上力求系统完整、先进实用；在应用选例上注意宽广新颖、特点突出。书中对基础理论特性多处采用图示证明，力求简明易懂；对球面图的绘制方法及解题规律作了深入地分析，步骤清晰，便于自学；并注意了对理论与应用方面的规律及特点的总结归纳，以便掌握。

为了理论与实践密切联系起来，书中先后列举了机械结构设计、加工制造、焊接下料、机床刀具设计、夹具设计、空间运动机构设计等机械工程中进行空间角度计算及转换的大量具有代表

性的实例。

为了使用方便，附录中重列了空间角度计算公式及图表，以便查找。同时还收录了车、钻、镗、铣、刨、磨等机床夹具结构原理图，以及部分空间运动机构简图，以供读者分析和参考。

本书适用于机械设计与制造等工程技术人员、工程图学工作者及有关科技研究人员阅读与参考；也可作为中、高等工科院校机械类各专业学生的选读教材及参考书。

本书经山东工业大学戴邦国副教授及李绍珍讲师的认真审阅，并提出了许多宝贵意见，特在此表示衷心感谢。

在编写本书过程中，石油大学许光明副教授、左明伦副教授和陈彦泽等同志给予了不少帮助，也得到了石油大学出版社的大力支持，对此谨向他们深表谢意。

限于著者的水平和条件，书中欠妥误漏之处定会不少，恳请读者批评指正。

编著者

1990年6月

目　　录

第一章
球面几何初步

球面几何主要是研究分布在球面上的几何图形的性质，以及球面与空间点、线、面间的相互关系。这里着重介绍球面几何的一些基本概念。

§1-1 球　　面

一、球面的概念

如图1-1所示，在空间直角坐标系O-XYZ中，若空间一动点M到坐标原点O的距离R始终保持不变，则点M的运动轨迹为一球面。因此球面可定义为：空间一动点与一定点等距离的运动轨迹。球面所包围的空间称球体。这里定点O称球心，R称球的半径，连接球面上两点且通过球心的直线段称为直径。

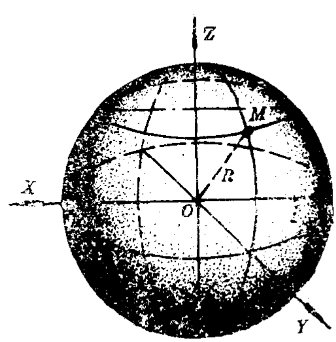


图 1-1

球面用一般方程表示为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

可见球面上任一位置的点都有确定的坐标值(x，y，z)与之对应，也常用空间极坐标(r，λ，φ)来表示。

二、球面的几何条件

除上面所述空间动点与一定点等距离的运动轨迹确定一球面

外，下面再描述几种由空间几何元素构成球面的情况。

1．包含过三点的圆可以作若干不同半径的球面。球心 的 轨迹是一条过该圆心并垂直于圆所在平面的直 线。事 实 上，如 图1-2所示，通过已知圆 e 的球面，球心都在所说的直线 ex 上。反之，以该直线上任一点为球心，且通过已知圆上一点的球面必含整个圆。

2．具有两个公共点但不共面的两圆决定一球面。由图1-3可

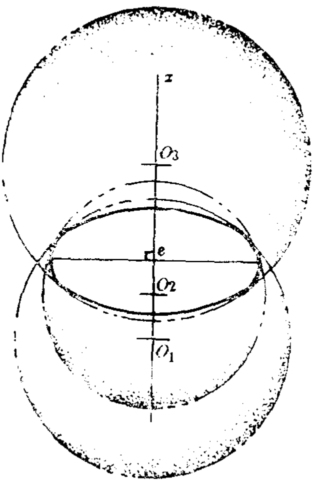


图 1-2

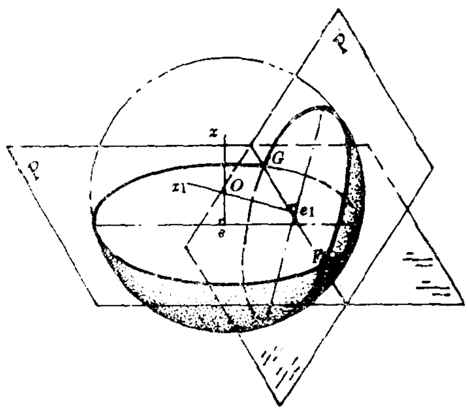


图 1-3

见，圆e与圆e_1有两个公共点G及F。通过圆e的球面，球心O在由圆心所作平面P的垂线ex上，凡球心在此直线上并通过点G或F的球面必含整个圆e；同理，凡通过圆e_1 的球面，球心 O 必在由圆心所作P'平面的垂线e_1x_1上，其球心在该直线上并通过点G 或 F 的球面必含整个圆e_1。这里ex和e_1x_1同在 GF 的中垂面上，它们既不平行也不重合，所以相交于唯一的点O。以O为球心以OG或OF为半径的球面也就唯一地确定了。

3．在空间相切但不共面的两圆决定一球面。其球心 在 过切

点A的两圆公切线的垂直平面上。如图 1-4 所示，球心O仍在过两圆心分别作圆所在平面的垂线的交点上。

4．一圆及其所在平面外的一点决定一球面，即不共面的四点决定一球面。在图1-5中示出，过圆D与圆外一点S可作一球Σ。

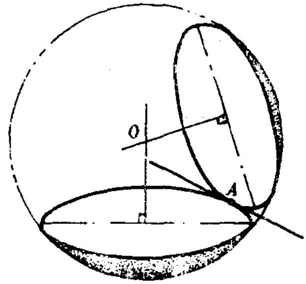


图 1-4

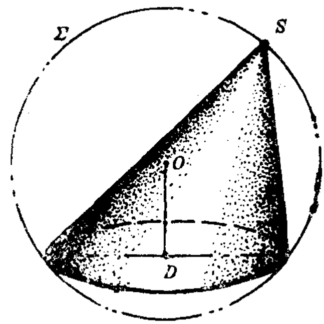


图 1-5

其实，Σ是过一个圆底斜锥(也可以是正圆锥)的锥顶S与底圆D的一个球面。

5．以直角三角形斜边为直径的空间直角顶点的轨迹也为一球面。由平面几何知道，圆心角是所对应圆周角的两倍，圆周上任一点与其直径的两端点必构成一直角三角形。因此，球面又可认为是平面圆绕其直径旋转而成的。

§1-2 球面上的圆与其极

一、球面上的圆

1．空间任一平面与球面的交线恒为圆。图1-6展示了平面π与半径为R的球面相交的情形。若从球心O向平面π作垂线并交O_1点，且在截线上取一公共点M，令$OO_1=d$，$OM=R$，$O_1M=r$，由直角$\triangle OO_1M$可建立关系式

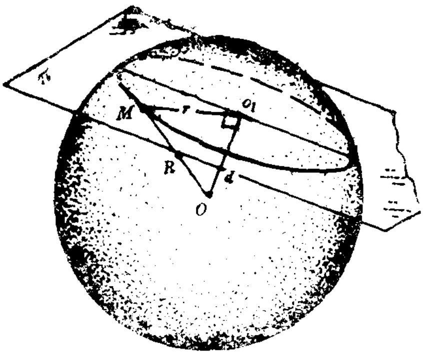


图 1-6

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

可见$0<d<R$，当R一定d也一定时，则r为一常数，所以平面π与球面的交线为一圆，此圆称作小圆；当$d=0$时，截面π通过球心O，此时$r=R$，凡通过球心的平面称作径面，径面与球面的交线是与该球有同一中心和半径的圆周，此圆称作大圆。

2．过球面上不在同一直径上的两点，有唯一的一个大圆。由于球面上的点A、B与球心O不共线，因此过A、B与O确定一径面π，径面与球面的交线为一大圆，且此大圆是唯一的。

3．当过球面上一直径的两个端点，则可有若干个大圆。因过球面一直径有若干个径面，必有若干个大圆与之对应。反之，同一球面上两大圆恒交于两点，该两点则为球面一直径的两个端点——即对径点。

4．距球面上两点等远的点的球面轨迹是一个大圆。如图 1-7 所示，此轨迹圆必过联接两已知点A、B的大圆弧的中点E，且是与圆弧面AOB相垂直的大圆。

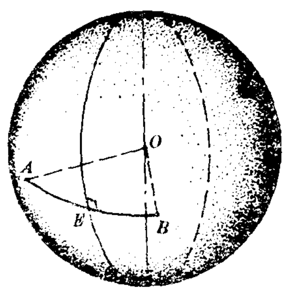


图 1-7

5．球面上两点间的最短球面距离是在小于180°的大圆弧上。球面距离通常用角度来表示。在空间A、B两点间的直线段为最短路线，其它路线则是折线或曲线，比直线段长。如图1-8所示，AB直线为该两点大圆弧的弦长，设C点为球面上过A与B的小圆上的点，可见$AC+CB>AB$；又AB与小

圆弧所围的面积大于与大圆弧所围的面积，因此过 A、B 的大圆弧比小圆弧短。

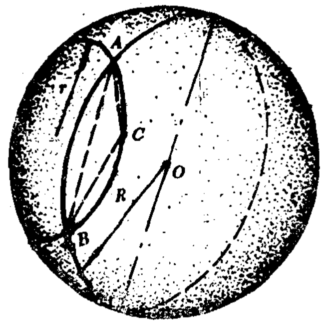


图 1-8

此问题由图 1-8 还可看出，过A、B两点的大圆半径R大于小圆半径r，因圆弧半径越大，球面上 A、B 两点间的弧越趋于直线段，显然过A、B两点的大圆弧长度小于小圆弧长度，所以，大圆弧是球面上两点间的最短距离路径。

二、球面上圆的极

1. 垂直于球面上任一圆所在平面的球面直径的端点，称作该圆的极。由图 1-9 可见，球面上大圆ABC的极是P_1与P_2，小圆$A_1B_1C_1$的极也是 P_1 与 P_2，即球面上每一个圆对应有两个极。一对极点的连线必过球心，且垂直于对应的圆平面。这里称垂线P_1P_2为大圆 ABC 的极线，称大圆ABC 所在的平面为极平面。

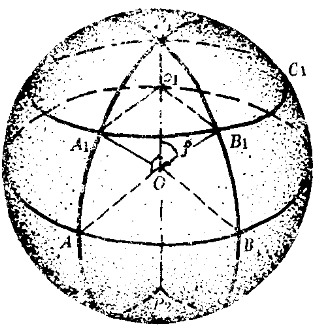


图 1-9

2. 若同一球面上两大圆互相垂直，则其中一圆必包含另一圆的极。图1-9展示出，过极平面圆ABC的极线P_1P_2可有若干个大圆，如 P_1AP_2 和 P_1BP_2 等，这些大圆所在的平面均与对应的极平面圆ABC相垂直。显然，过极线 P_1P_2 的各大圆的极线必过球心，且在与P_1P_2相垂直的极平面ABC圆内，即ABC圆包含了 P_1AP_2 和 P_1BP_2等圆的极。

3. 球面上一圆的极到该圆周上任一点的球面距离相等，且有大圆的极距离等于90°。反之，若球面上一点P至其它两点A、B的极距离均为90°，则点P必为过A、B两点大圆的极。从图 1-9

中可以看出，

$$\angle P_1OA_1=\angle P_1OB_1=\rho,$$
$$\angle P_1OA=\angle P_1OB=90°.$$

由于圆的中心角与所对应的弧同度，因此

$$P_1A_1=P_1B_1=\rho,$$
$$P_1A=P_1B=90°.$$

同理 $\angle P_2OA=\angle P_2OB=90°$，

则有 $P_2A=P_2B=90°$，

所以 $P_1A=P_2A=90°$，

$P_1B=P_2B=90°$。

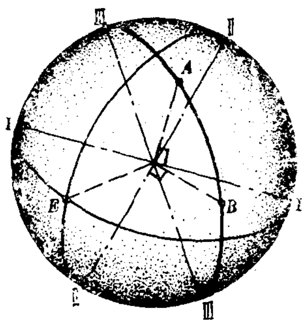


图 1-10

4. 过球面上任意两点的大圆之极，是分别以该两点为极的两极平面圆的交点。如图1-10所示，过球面上 A、B 两点大圆 ABⅢ 的极，是以 A 为极的大圆 ⅠEⅠ 与以B为极的大圆ⅡEⅡ的交点 E。

§1-3 球面上的几何图形

球面上的圆是一种最基本的图形，除此之外还有球面二角形，球面三角形，球面多边形及球面封闭曲线图形等。

一、球面二角形

在图1-11中展示出，同一球面上两大圆恒交于两个对径点P与P_1，即两大圆平面的交线与球面的交点。两大圆之间的球面图形称球面二角形，其交点P、P_1叫做球面二角形的顶点。两大圆弧所在平面之间的夹角称球面角，用顶点P与P_1来表示，显然球面二角形中的球面角 $P=P_1$。两大圆弧叫球面二角形的边，边长等于大圆弧所对应的平面圆心角，必有球面二角形的边等于180°。

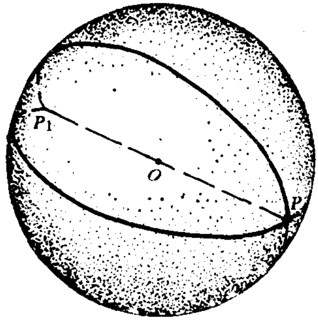


图 1-11

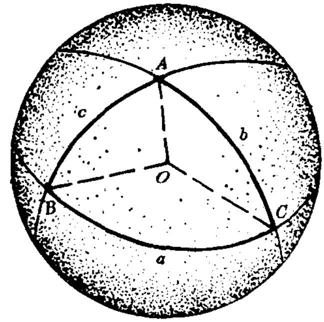


图 1-12

二、球面三角形

如图1-12所示，球面上相交于 A、B、C 三点的三大圆弧所围成的图形，称作球面三角形。三段大圆弧叫球面三角形的边，各边均小于180°，通常用小写字母 a、b、c 来表示。其三大圆弧两两相交即构成了球面三角形的角，通常用大写字母A、B、C来表示，且同一字母角与边的位置相互对应。

在球面三角形中至少有一个球面角等于90°时，称该三角形为球面直角三角形。而当球面三角形中至少有一个边等于90°时，称球面直边三角形。既无直角也无直边的球面三角形，称作球面任意三角形。球面三角形的边角关系及其性质和计算，将在第二章中详细讨论。

三、球面多边形

球面多边形是由多个大圆弧围成的球面图形，其大圆弧长度均小于半圆周，并以它们的交点为界。球面多边形的任一边小于其它各边之和。如果一球面多边形位于每一边所在大圆的一侧，就称该球面多边形为凸的。一个凸球面多边形的周长小于大圆周。球面三角形则是最简单的球面多边形。

当空间一点在球面上运动，又可形成有规则或无规则的球面曲线，或封闭的球面曲线图形。