

实用决策方法 ——

层次分析法原理

许树柏 编著

天津大学出版社

实用决策方法——
层次分析法原理

许树柏 编著

天津大学出版社

1988

ZQ100/3+04

内 容 简 介

层次分析法是七十年代中期确立的一种实用的多准则决策方法，可以统一处理决策中的定性与定量因素，具有实用性、系统性、简洁性等优点。近年来，已在我国社会经济多个领域决策分析中得到应用，并从理论上开展了研究，一些高等院校将层次分析法列入教学内容。本书比较系统地论述了层次分析法的原理，包括递阶层次结构原理、两两比较标度原理和排序原理，并对层次分析法的某些分支和扩展方法，如模糊层次分析法、动态层次分析法和反馈系统的排序方法，也在原理上进行了论述。书中收集、整理了大量国内外的研究成果，内容丰富，是国内第一本理论比较系统、完整的著作。

本书可供高等院校管理工程、系统工程等专业研究生和高年级本科生教学用，也可供有关工程技术人员、管理干部参考。在提倡和强调领导决策科学化和民主化的今天，对各级领导干部尤具参考价值。

实用决策方法——

层次分析法原理

许树柏 编著

※

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

※

开本：850×1168毫米1/32 印张：7⁸/₁₆。字数：200千字

1988年5月第一版 1988年5月第一次印刷

印数：1—7000

ISBN 7-5618-0018-5

Z.4

定价：1.50元

前 言

层次分析法是一种实用的多准则决策方法。它把一个复杂问题表示为有序的递阶层次结构，通过人们的判断对决策方案的优劣进行排序。这种方法能够统一处理决策中的定性与定量因素，具有实用性、系统性、简洁性等优点，特别适合在社会经济系统的决策分析中使用。层次分析法简单的表现形式与它深刻的理论内容紧密联系在一起。简单的表现形式使得层次分析法有着广泛的应用领域，深刻的理论内容确立了它在多准则决策领域中的地位。了解和掌握层次分析法的原理，不仅能够更有效、灵活地运用这种方法，也为研究和发展适合我国特点的决策方法创造了条件。本书着重讨论层次分析法的原理，包括递阶层次结构原理、两两比较标度原理和排序原理。对于层次分析法的某些分支和扩展方法。如Fuzzy层次分析法，动态层次分析法和反馈系统的排序方法，也就其原理进行了论述。

层次分析法自四年前介绍到我国以来，已在经济分析和规划、能源和资源政策分析、科研管理、人才预测与规划、产业部门规划、企业管理等许多领域得到了应用，系统工程、管理工程、数量经济学等一些学科的学者对层次分析法的基本理论开展了研究工作，不少高等院校已将层次分析法列入运筹学课程的教学内容之中。在这种情况下，很需要一本系统论述层次分析法原理的书，以推动这种方法的学术研究与应用。本书希望导致学术界的同行，特别是有志深入研究层次分析法的朋友有益的思考，并期待着他们的指正。

层次分析法的理论结构是这一方法的创始人T.L.Saaty教授于1980年在他的有名著作《层次分析法》中确立的。六年来，

Saaty和许多学者在发展层次分析法的理论方面做了大量工作，本书是在参考层次分析法国外文献资料的基础上，根据作者近年来的研究成果写成的。书中提出了目前层次分析法中尚未解决的一些问题，以期引起读者对层次分析法理论研究的兴趣。

在本书写作过程中，作者的导师刘豹教授的指导起了很大作用，他不断给予的鼓励是对作者的一种鞭策。作者的同事和金生近年来与作者合作研究层次分析法，使作者受益匪浅，他对于本书的写作也提出了很多宝贵建议。北京大学数学系王莲芬指出了本书初稿中的一些不妥之处。Saaty教授十分关心本书的写作，他所提供的大量资料和与作者的多次通信，对本书思想和观点的形成有重要影响。作者希望向上述提到的各位表示谢意。

最后，作者特别感谢本书的审阅人，天津大学李光泉教授，他不仅自始至终关心本书的写作，而且投入很大精力仔细阅读了本书初稿，提出大量重要而具体的意见，使本书有了很大改进。

许树柏

一九八六年九月十四日

目 录

第一章 绪论	(1)
第一节 定性 & 定量相结合的决策分析方法 ——层次分析法.....	(1)
第二节 AHP的基本步骤	(6)
第二章 层次分析法的基本原理	(14)
第一节 社会经济系统的测度.....	(14)
第二节 递阶层次结构的基本原理.....	(17)
第三节 AHP的比例标度	(20)
第四节 单一准则下的排序原理.....	(22)
第三章 递阶层次结构的数学原理	(26)
第一节 递阶层次结构的数学表示.....	(26)
第二节 递阶层次结构的确定.....	(30)
第三节 递阶层次结构中的排序.....	(34)
第四节 递阶层次中的结构依存性.....	(37)
第四章 单一准则排序的特征根方法	(41)
第一节 引言.....	(41)
第二节 单一准则下排序的特征根方法的数学原理.....	(43)
第三节 判断矩阵的一致性及其检验.....	(51)
第四节 判断矩阵的灵敏度分析.....	(59)

第五节	新元素导入的保序性原理	(68)
第六节	判断矩阵的左右主特征向量	(76)
第五章	AHP公理体系	(82)
第一节	引言	(82)
第二节	AHP公理	(83)
第三节	AHP公理的应用	(88)
第六章	AHP中的一般排序原理	(100)
第一节	引言	(100)
第二节	对数最小二乘排序方法	(102)
第三节	最小二乘排序方法	(105)
第四节	梯度特征向量排序法(CEM)	(109)
第五节	保序性问题与特征根法、对数最小二乘法、 最小二乘法的比较研究	(114)
第六节	不完全判断信息下的排序问题	(121)
第七节	非线性特征根排序方法	(127)
第七章	Fuzzy层次分析法	(133)
第一节	引言	(133)
第二节	Fuzzy AHP的基本概念	(134)
第三节	比较判断标度的Fuzzy数表示问题	(136)
第四节	Fuzzy AHP的单一准则排序计算	(140)
第五节	群组决策中使用的Fuzzy AHP	(142)
第八章	不确定型AHP	(149)
第一节	引言	(149)
第二节	区间标度, 区间判断矩阵及区间特征向量的 计算	(150)

第三节	不确定AHP在单一准则下的排序	(155)
第四节	不确定AHP的层次组合排序	(162)
第九章	反馈系统排序	(166)
第一节	系统中的依存关系和反馈层次结构.....	(166)
第二节	超矩阵与反馈系统排序理论.....	(171)
第三节	循环层次结构中的排序问题.....	(178)
第四节	反馈系统的排序步骤.....	(180)
第十章	层次分析法中的动态排序	(194)
第一节	层次分析法中的动态排序问题.....	(194)
第二节	一种新的动态排序模型.....	(199)
参考文献	(206)

第一章 绪 论

本章旨在使读者对层次分析法有一个概括的了解。在简单说明它是怎样产生的，它的基本特征是什么，它在哪些方面能够应用，它的优点和局限性何在之后，概括地介绍层次分析法的基本步骤。

第一节 定性与定量相结合的决策分析方法 ——层次分析法

决策是人们进行选择或判断的一种思维活动。人们几乎每时每刻都需要决策。有些决策是简单和容易的，例如几点起床，早饭吃什么，穿什么样的衣服等等。有些决策是复杂和困难的，它们常常困扰着人们，例如，报考什么样的学校和专业，如何选择理想的爱人，为疑难病患者决定治疗方案，政治家们往往需要就影响千万人命运和前途的问题进行决策，例如战争与和平问题，经济发展战略和计划等等。

决策是科学也是艺术。说它是科学，因为人们进行选择和判断应当尽可能地符合客观实际。这就要求决策者尽可能真实地了解问题的背景、环境和发展变化规律，尽可能详细地占有资料，尽可能广泛地掌握正确的决策方法和各种决策辅助工具。说它是艺术，因为各种选择和判断终究是由人作出的，决策的正确与否，优良可劣，与决策者的素质、经验、才能有很大关系。

数学工具在决策中起着重要作用。在复杂的决策问题面前，人们往往需要利用数学模型对实际问题进行抽象和简化，进而对实际问题进行系统分析。在决策过程中利用数学模型的优点在于：分析

问题容易，目的性强，可以进行模拟计算，便于应用计算机等先进手段。由于人们的选择和判断总是在某种标准下进行的，在这个标准下，作出“好的”决策，这就促成与决策有关的应用数学分支：线性规划、非线性规划、多目标规划、多准则决策……的迅速发展。最优化技术几乎成了决策分析的代名词。到了本世纪七十年代末、八十年代初，最优化技术发展得越来越抽象，使绝大多数工程技术人员望而生畏，数学模型的规模越来越大，对计算机的内存与运算速度要求越来越高，一项复杂的系统分析耗资巨大，以至形成了一种数学模型的“泥潭”。在这种情况下，一些有远见的运筹学家开始冷静地看待和正确地评价复杂的数学模型对决策分析的作用。问题是显而易见的，人们无法忽视或回避决策过程中决策者的选择和判断所起的决定作用。数学模型并非万能工具，决策中总有大量因素无法定量地表示。问题的答案几乎再明白不过了：运筹学家们必须回到决策的起点和终点——人的选择和判断上来，认真地研究决策思维的规律，也就是人们进行选择 and 判断的规律。

正是在这种背景下，美国著名运筹学家，匹兹堡大学教授 T.L.Saaty 于七十年代中期提出了层次分析法 (The Analytic Hierarchy Process, 以下简称 AHP)。

尽管 AHP 的应用需要掌握简单的数学工具，尽管 AHP 有深刻的数学原理，但它本质上是一种决策思维方式。AHP 把复杂的问题分解为各个组成因素，将这些因素按支配关系分组形成有序的递阶层次结构，通过两两比较的方式确定层次中诸因素的相对重要性，然后综合人的判断以决定决策诸因素相对重要性总的顺序。AHP 体现了人们的决策思维的这些基本特征，即分解、判断、综合。

AHP 作为一种有用的决策工具有着明显优点：

第一是它的适用性。用 AHP 进行决策，输入的信息主要是决策者的选择与判断，决策过程充分反映了决策者对决策问题的认识，加之很容易掌握这种方法，这就使以往决策者与决策分析者难

于互相沟通的状况得到改变。在多数情况下,决策者直接使用AHP进行决策,这就大大增加了决策的有效性。

第二是它的简洁性。了解AHP的基本原理,掌握它的基本步骤,对于具有高中文化程度的人并不困难,用AHP进行决策分析可以不用计算机。一个简单计算器足以完成全部运算,所得的结果简单明确,一目了然。

第三是它的实用性。AHP不仅能进行定量分析,也可以进行定性分析。它把决策过程中定性与定量因素有机地结合起来,用一种统一方式进行处理。AHP也是一种最优化技术,从学科的隶属关系看,人们往往把AHP归为多目标决策的一个分支。但AHP改变了最优化技术只能处理定量分析问题的传统观念,使它的应用范围大大扩展。许多决策问题如资源分配、冲突分析、方案评比、计划等均可使用AHP,对某些预测、系统分析、规划问题,AHP也不失为一种有效方法。

第四是它的系统性。人们的决策大体有三种方式。第一种是因果推断方式,在相当多的简单决策中,因果推断是基本方式,它形成了人们日常生活中判断与选择的思维基础。事实上,对于简单问题的决策,因果推断是够用的。当决策问题包含了不确定因素,则需要第二种推断方式,即概率方式。此时决策过程可视为一种随机过程。人们需要根据各种影响决策的因素出现的概率,结合因果推断进行决策。近年来发展起来的系统方式是第三种决策思维方式。它的特点是把问题看成一个系统,在研究系统各组成部分相互关系以及系统所处环境的基础上进行决策。对于复杂问题系统方式是有效的决策思维方式。相当广泛的一类系统具有递阶层次的形式。AHP恰恰反映了这类系统的决策特点。当然,由递阶层次可以进而研究更复杂的系统,如反馈系统。AHP还可以加以扩展。

一般来说,越深刻的科学理论越有着简单的表现形式,AHP正是如此。如前所述,很容易了解和掌握AHP的基本原理和方法,这是AHP的一个方面;另一方面AHP有着深刻的数学背景。真正

搞清AHP的原理需要弄懂AHP的公理体系，它的递阶层次结构的数学形式，排序理论以及一般系统理论，需要涉及Perron-Frobenius理论，Fuzzy数学、数理逻辑、统计推断、度量理论等多个数学分支。本书着重研究AHP的数学原理，以便能够较深入地掌握和熟练地运用AHP。

Saaty提出AHP，可以追溯到七十年代初。1971年，他曾为美国国防部研究所谓“应急计划”，1972年为美国科学基金会研究电力在工业部门分配问题，1973年为苏丹政府研究苏丹运输问题。由于研究工作需要，他感到必须考虑综合定性与定量分析、使人脑决策思维过程模型化（或规范化）的方法，从而初步形成了AHP理论的核心，即很多复杂系统可以简化为有序的递阶层次结构，决策问题通常表现为一组方案优先顺序的排列问题，而这种排序又可以通过简单的两两比较形式导出。这些思想始见于Saaty分别于1972年和1975年内部出版的《用于排序和计划的特征根分配模型》，和《层次和排序——特征根分析》。正式提出AHP的论文，一般认为是Saaty在1977年举行的第一届国际数学建模会议上发表的《无结构决策问题的建模——层次分析理论》。从那时起，AHP开始引起人们的注意，并且应用在各个领域。1980年Saaty出版了关于AHP的专著，全面系统地论述AHP的原理、应用及数学基础。随后他又陆续写出两本侧重论述AHP应用的著作，即1981年出版的《排序的逻辑》（与L.G.Vargas合著），和1982年出版的《领导者的决策》。近年来，Saaty和近百位学者在发展AHP的理论和推广AHP在各类问题的应用方面完成了许多工作。

AHP的应用范围十分广泛，根据对国外公开发表的AHP应用性文章119篇的统计，AHP的应用共涉及18个领域，它们是：

能源政策和资源分配	18篇
企业管理与生产决策	18篇
管理信息系统	16篇
政治和冲突分析	15篇

经济分析和计划	11篇
行为科学	7篇
医疗卫生	7篇
会计	7篇
社会学	4篇
教育	3篇
人才	2篇
军事指挥	2篇
地理	2篇
运筹学方法评价	2篇
建筑学	2篇
科学技术发展	1篇
环境	1篇
法律	1篇

象很多其它正在发展的理论和方法一样，AHP不可能而且不应该是完美无缺的。自80年以来对AHP感兴趣的人多了，相应地批评也多了。在理论上，有的人提出AHP中判断应该用模糊集表示，一致性检验要有客观标准，特征值计算方法不一定是排序的最好方法，对各层元素权重进行合成时有必要进行第二级加权等等。这些批评导致了AHP理论不断发展。例如，最近 Saaty 关于 AHP公理体系的研究，关于保序理论的研究，实际上正是考虑了批评意见之后而取得的成果。针对AHP理论上提出的问题目前并没有全部得到满意的解决，AHP理论的发展存在着一个广阔的天地。

勿庸讳言，AHP在应用上有其局限性，这主要表现在以下三个方面：首先，AHP的应用主要是针对那种方案大抵确定的决策问题，一般来说它只能从已知方案中选优，而不能生成方案。也就是说，应用AHP时，事先对决策的各种方案要有比较明确的规定。第二，AHP得出的结果是粗略的方案排序。对于那种有较高定量

要求的决策问题，单纯运用AHP是不适合的。当然，并不排斥把AHP与其它决策方法结合起来。例如，在运用多目标规划时，把AHP作为目标加权的方法已为实践证明是有效的。也可以采用AHP自身派生出来的一些方法。例如资源分配的AHP，成本效益分析的AHP，使某些定量分析要求精度不很高的问题有满意的解答。第三，在AHP的使用过程中，无论建立层次结构还是构造判断矩阵，人的主观判断、选择、偏好对结果的影响极大，判断失误即可能造成决策失误。这就使得用AHP进行决策主观成分很大。规划论采用比较严格的数学计算，以期把人的主观判断降到最低程度，但得出的结果有时往往难于被决策者所接受。AHP的本质是试图使人的判断条理化，但所得到的结果基本上依据人的主观判断。当决策者的判断过多地受其主观偏好影响，而产生某种对客观规律的歪曲时，AHP的结果显然就靠不住了。要使AHP的决策结论尽可能符合客观规律，决策者必须对所面临的问题有比较深入和全面的认识。此外，在运用AHP时采用群组判断方式也不失为克服主观偏见的一个好办法。

无论是理论上不完善，还是应用中的缺陷，都不会影响AHP在决策中的地位和作用。目前AHP已被运筹学界视为简单有效的多目标决策方法。AHP的应用范围在逐渐扩大，以它为基本方法的决策支持系统——“专家选择”已商品化，在国外市场受到欢迎，AHP理论和方法论的研究人员日益增加。可以期待，AHP作为一种决策思维方式，对人们各种各样的决策过程起着越来越重要的作用。

第二节 AHP的基本步骤

运用AHP解决问题，大体可以分为四个步骤，即一、建立问题的递阶层次结构；二、构造两两比较判断矩阵；三、由判断矩阵计算被比较元素相对权重；四、计算各层元素的组合权重。分述如下：

一、建立递阶层次结构

这是AHP中最重要的一步。首先，把复杂问题分解为称之为元素的各组成部分，把这些元素按属性不同分成若干组，以形成不同层次。同一层次元素作为准则，对下一层次的某些元素起支配作用，同时它又受上一层次元素的支配。这种从上至下的支配关系形成了一个递阶层次。处于最上面的层次通常只有一个元素，一般是分析问题的预定目标，或理想结果。中间的层次一般是准则、子准则。最低一层包括决策的方案。层次之间元素的支配关系不一定是完全的，即可以存在这样的元素，它并不支配下一层次的所有元素。一个典型的层次可以用下图表示出来：

层次数与问题的复杂程度和所需要分析的详尽程度有关。每一层次中的元素一般不超过九个，因一层中包含数目过多的元素会给

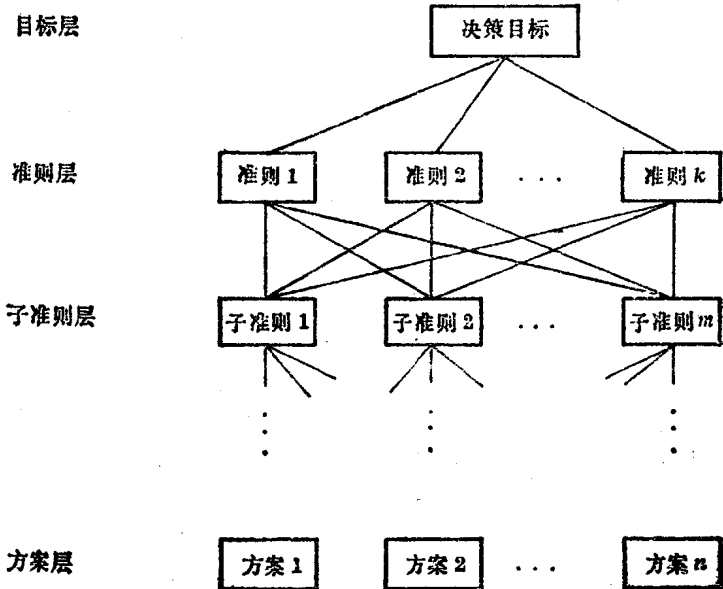


图 1.1 递阶层次结构示意图

两两比较判断带来困难。一个好的层次结构对于解决问题是极为重要的。层次结构建立在决策者对所面临的问题具有全面深入的认识基础上，如果在层次的划分和确定层次之间的支配关系上举棋不定，最好重新分析问题，弄清问题各部分相互之间的关系。有时一个复杂问题仅仅用递阶层次形式表示是不够的，需要采用更复杂的结构形式，如循环层次结构、反馈层次结构等，这些结构是在递阶结构基础上的扩展形式。

二、构造两两比较判断矩阵

在建立递阶层次结构以后，上下层次之间元素的隶属关系就被确定了。假定上一层次的元素 C_k 作为准则，对下一层次元素 A_1, A_2, \dots, A_n 有支配关系，我们的目的是在准则 C_k 之下按它们相对重要性赋予 A_1, A_2, \dots, A_n 相应的权重。对于大多数社会经济问题，特别是对于人的判断起重要作用的问题，直接得到这些元素的权重并不容易，往往需要通过适当的方法来导出它们的权重。AHP 所用的是两两比较的方法。

在这一步中，决策要反复回答问题：针对准则 C_k ，两个元素 A_i 和 A_j 哪一个更重要些，重要多少。需要对重要多少赋予一定数值。这里使用 1-9 的比例标度，它们的意义见表 1.1。例如，准则是社会经济效益，子准则可分为经济、社会和环境效益。如果认为经济效益比社会效益明显重要，它们的比例标度取 5。而社会效益对于经济效益的比例标度则取 $1/5$ 。对于 n 个元素来说，得到两两比较判断矩阵 A ：

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \quad (1.1)$$

判断矩阵具有如下性质：

$$(1) \quad a_{ij} > 0$$

$$(2) \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad (1.2)$$

$$(3) \quad a_{ii} = 1$$

我们称 A 为正的互反矩阵。由于性质 (2)、(3)，事实上，对于 n

阶判断矩阵仅需对其上(下)三角元素共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个给出判断。
 A 的元素不一定具有传递性, 即未必成立等式

$$a_{ij} a_{jk} = a_{ik} \quad (1.3)$$

但(1.3)成立时, 则称 A 为一致性矩阵。在说明由判断矩阵导出元素排序权值时, 一致性矩阵有重要意义。

1-9的标度方法是将思维判断数量化的一种好方法。首先, 在区分事物的差别时, 人们总是用相同、较强、强、很强、极端的语言, 再进一步细分, 可以在相邻的两级中插入折衷的提法, 因此对于大多数决策判断来说1-9级的标度是适用的。其次, 心理学的实验表明, 大多数人对不同事物在相同属性上差别的分辨能力在5-9级之间, 采用1-9的标度反映多数人的判断能力。第三, 当被比较的元素其属性处于不同的数量级, 一般需要将较高数量级的元素进一步分解, 这可以保证被比较元素在所考虑的属性上有同一个数量级或比较接近, 从而适用于1-9的标度。当然根据问题的特点也可以采用别的类型标度方法。如0-1的标度, 指数型的标度等。

表 1.1 标 度 的 含 义

1	表示两个元素相比, 具有同样重要性
3	表示两个元素相比, 一个元素比另一个元素稍微重要
5	表示两个元素相比, 一个元素比另一个元素明显重要
7	表示两个元素相比, 一个元素比另一个元素强烈重要
9	表示两个元素相比, 一个元素比另一个元素极端重要

2、4、6、8为上述相邻判断的中值。

若因素 i 与 j 比较得 a_{ij} , 则因素 j 与 i 比较的判断为 $1/a_{ij}$ 。

三、计算单一准则下元素的相对权重

这一步要解决在准则 C_k 下, n 个元素 A_1, A_2, \dots, A_n 排序权重的计算问题, 并进行一致性检验。对于 A_1, A_2, \dots, A_n 通过两两比较得到判断矩阵 A , 解特征根问题

$$A w = \lambda_{\max} w \quad (1.4)$$

所得到的 w 经正规化后作为元素 A_1, A_2, \dots, A_n 在准则 C_k 下排序权