现代控制系统理论小丛书

绝对稳定性理论与应用

谢惠民 著

科学出版社

现代控制系统理论小丛书

绝对稳定性理论与应用

谢惠民 著

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书是“现代控制系统理论小丛书”之一．这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论如何由工程实践的需要而产生，又怎样应用它来解决工程设计中的实际问题．

本书介绍的绝对稳定性理论乃是当前在非线性控制系统的稳定性分析中最为有力的一种工具．全书共有九章．前三章是基本概念与数学准备．第四章介绍频率判据、圆判据等主要结果．第五章介绍了以上结果的多方面应用，其中包括在电力系统暂态稳定问题中的应用．余下的四章是对前五章的内容作进一步的讨论和推广．本书包含了作者的一些研究成果，有些结果是第一次发表．书末的三个附录提供了稳定性方面的预备知识．

本书可供从事控制理论研究和控制系统设计的科技工作者参考，也可作为大学有关专业的学生和研究生的教材或参考书．

现代控制系统理论小丛书

绝对稳定性理论与应用

谢 惠 民 著

责任编辑 刘兴民 袁放尧

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 3 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1986 年 3 月第一次印刷　　印张：9 3/4

印数：0001—3,600　　字数：217,000

统一书号：15031·711

本社书号：4686·15—8

定价： 2.30 元

现代控制系统理论小丛书序言

在五十年代末六十年代初，在工程实践的基础上，特别是在空间技术等方面的实践基础上，自动控制理论发展到以状态变量为标志的现代控制理论的阶段．这种新的理论对于控制系统的性能提供了更深入的认识，使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明．这些理论成果在以往十几年当中又在许多空间技术与航海、航空的型号设计中得到了应用，受到了实践的检验．

工程实践迫切需要发展理论，而一些新技术，特别是计算技术与现代数学的方法使现代控制理论的发展成为可能．为了控制更复杂的系统，并提高控制精度，数字控制逐渐代替模拟装置．这主要是利用了数字电子计算机，同时有赖于新的数学的描述与方法．

解放以来，我国科学技术得到迅速发展．我国人造地球卫星的发射与回收的成功以及其它尖端技术上的巨大成就都表明我国的控制技术已经达到较高的水平．我们应当本着“精益求精”的精神，使利用数字电子计算机来控制的这种先进技术更广泛地应用到各种有关的工程技术中去，并在工程实践中不断总结提高．我们撰写这一套“现代控制系统理论小丛书”，就是为了介绍现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论怎样由工程实践的需要而产生，又怎样用来解决工程设计中的实际问题．

这套小丛书，理论与实际并重．从每一种书来说，或偏重

基础理论的阐述，但也给出应用的例子；或偏重于一项工程问题，但也把它放在坚实的理论基础之上．本丛书之所以叫做“小丛书”，主要是指每种书的篇幅小，而不是指通俗普及性小册子．本书主要是为从事控制理论研究的科研工作者和工程技术人员而撰写的．

本丛书包括线性系统理论、非线性系统理论、极值控制理论、系统辨识、最优估计与随机控制理论、分布参数系统理论及其他有关内容．全套丛书计划分十几册出版．

希望这套丛书对于我国实现四个现代化作出它的贡献．

关肇直

1982年5月于北京

前　言

在控制系统的分析和设计中，系统稳定性研究占有重要地位. 关于线性定常系统稳定性研究，有 Routh-Hurwitz 判据、Nyquist 判据和 Evans 根轨迹法等（见本书附录），对于这些问题，在有关自动控制理论的教程中都有详细讨论. 关于非线性控制系统稳定性，一直是人们十分关注的问题. Ляпунов 在十九世纪末建立了稳定性理论，成为非线性控制系统稳定性研究的基础. 四十年前苏联学者 Лурье 从飞机自动驾驶仪的稳定性分析出发，提出了绝对稳定性概念，利用二次型加非线性项积分作为 Ляпунов 函数，给出了判定非线性控制系统绝对稳定性充分条件，开始了绝对稳定性理论的研究. 一九六一年，罗马尼亚学者 Popov 运用 Fourier变换，开创了用线性部分频率特性研究绝对稳定性的全新途径. 人们看到，线性系统稳定性研究中的频率域方法在非线性控制系统稳定性研究中起着重要作用，并且很快发现 Лурье 方法和 Popov 方法是有着密切联系的. 这些成就不仅为应用数学家所重视，而且受到控制理论界、工程技术界的高度重视.

在我国，很早就翻译出版了Летов 的《非线性调节系统的稳定性》一书，较早地注意绝对稳定性理论的发展. 谢惠民同志在复旦大学学习和工作期间，就从事绝对稳定性理论的研究工作，其后他又在关肇直教授指导下从事研究工作，取得新的成果. 作者在本书中总结了近二十多年来这方面的主要进展，并且包含他本人在这方面的研究成果和心得体会，是

我国第一本关于绝对稳定性理论的著作.

国外虽然已出版了几本关于绝对稳定性理论的书，但是就系统讲解 Лурье 方法和 Popov 方法的关系而言，把这方面最完整的结果介绍给读者的书还没有见到. 本书就单输入单输出的非线性控制系统讲述了这方面最新的完整结果，给出了它的严格证明. 只要读者对于矩阵运算等有一定基础，是完全可以从本书理解它的完整证明的. 本书还详细地运用 Якубович-Kalman-Meyer 引理， 建立了绝对稳定性的频率判据，这对于熟悉频率域方法的自动控制理论及应用方面的读者十分有益. 同时，本书十分重视理论在实际问题应用中所产生的新特点，列举了若干应用实例，这对于阐明绝对稳定性理论的意义起了很好的补充作用. 因此，它对于注重应用的工程技术人员了解绝对稳定性理论是很重要的组成部分. 作者还应用频率方法讨论了继电器系统平衡位置的全局稳定性，以及多输入多输出的非线性控制系统的绝对稳定性.

我们相信，本书的出版对实际工作者应用绝对稳定性理论于非线性控制系统的分析和设计，将是一个推动，并促进控制理论及应用数学工作者在这方面的研究更加深入.

金福临　李训经

1984 年 3 月于上海

本书常用记号一览表

$\forall$	代表"对于任何"的意思
i	$\sqrt{-1}$，虚数单位
$\boldsymbol{R}^1$	实数全体(或实数轴)
$\boldsymbol{C}^1$	复数全体(或复平面)
$\boldsymbol{R}^n$	实 n 维空间
det	行列式记号，例如 $\det A$ 代表 A 的行列式
dim	维数
$\{x \mid \cdots\}$	具有"…"所说明的性质的全体 x 所组成的集合
$\triangleq$	表示"定义为"的意思
A'	矩阵 A 的转置矩阵
z^*	复数 z 的共轭复数
$\in$，$\notin$	属于，不属于
$\varnothing$	空集
$\mathrm{Re}z$	复数 z 的实部
$\mathrm{Im}z$	复数 z 的虚部
$\\|x\\|$	向量 x 的范数
$\varphi(\cdot)$	将函数 φ 作为在某个函数类中的一个元素来看待时的记号
$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$	以 t 作为自变量的函数 $x(t)$ 的导数
I	单位矩阵，一般不标出它的阶数
$A(z)$	代表以 z 为复变量的矩阵 $zI-A$
F_μ	满足不等式 $0<\sigma\varphi(\sigma)<\mu\sigma^2$ $(\sigma\neq 0)$ 的连续函数 $\varphi(\sigma)$ 的全体所成的函数类，其中 $\mu\leqslant+\infty$
F_∞	满足不等式 $0<\sigma\varphi(\sigma)$ $(\sigma\neq 0)$ 的连续函数 $\varphi(\sigma)$ 的全体所成的函数类

目　　录

第一章 引 论

§1.1 稳定性理论中的非线性孤立方法

稳定性问题是自动控制系统设计中的一个基本问题．事实上，自动控制理论的发展就是从 Maxwell 对于 Watt 离心调速器的稳定性分析开始的[1,2]． 在设计一个自动控制系统时，总是首先要保证该系统具有某种意义下的稳定性，然后才能考虑系统的其他方面的问题．这是由于在实际上能够存在或能够发生的平衡状态、运动规律等等总是具有某种稳定性．反之，不稳定的平衡状态或运动规律在实际上是不能实现的．

在各种稳定性理论中，到目前为止占主导地位的是 Ляпунов 建立的稳定性理论[3-5]． 以下我们假定读者已具备这方面的基本知识，即几个基本定义和基本定理． 为了方便读者起见，我们又将这些内容写成附录 A，以供参考．

在具体应用 Ляпунов 理论时，主要的困难在于如何寻找(或构造) Ляпунов 函数．在这方面没有统一的途径可循．至于 Ляпунов 的一次近似方法和关于第一临界情况、第二临界情况的许多结果，则对非线性项往往要求很高，在实际问题中不一定能用．

还应当指出，Ляпунов 建立的稳定性理论主要是局部性质的理论．而在许多实际问题中则要求有某种大范围的稳定性．

针对以上情况，Лурье 和 Постников 在 1944 年提出了处理非线性控制系统的稳定性问题的一种新方法[6]． 有的文

献将这种方法称为非线性孤立方法 (nonlinearities isolation method)[7], 这有一定的道理. Лурье 等从许多实际的控制系统出发,其中包括关于飞机自动驾驶仪的 Булгаков 问题[8,9], 将系统的非线性部分孤立出来, 使系统具有闭环控制系统的形式 (见图 1.1). 其中标有 L 的方框代表系统的线性部分, 标有 NL 的方框代表系统的非线性部分. 注意图 1.1 中的 L 部分与 NL 部分并不一定与实际系统的开环部分和反馈部分相对应. 在早期的讨论中, NL 部分只是一个简单的非线性环节,但后来很快就推广到较为复杂的非线性情况了.

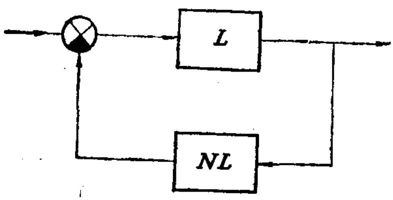

图 1.1　非线性孤立方法

Лурье 和 Постников 是这样来提问题的: 在系统的非线性部分能够被孤立出来, 但对其具体特性了解很少的前提下,应如何选择线性部分的参数,使整个系统具有大范围的稳定性?

考虑最简单的情况. 设图 1.1 中的非线性部分是一个简单的单输入单输出的非时变环节, 记其输入为 σ, 输出为 $\varphi(\sigma)$, σ 和 φ 都是标量 (见图 1.2). 对于 $\varphi(\sigma)$, 我们所掌握的全部信息只是: $\varphi(\sigma)$ 是不越出某个扇形区域的连续函数. 在图 1.3 中, 我们将该扇形区域打上了阴影线. 但这个扇形区域并不一定要像图 1.3 中那样局限在 I、III 象限.

图 1.2　非线性环节

在很多问题中,对于非线性特性往往了解得很不准确,或

者其本身存在着不确定的因素和干扰，或者虽然知道 $\varphi(\sigma)$ 的形式但也难以利用等等. 在所有这些场合，上面提出的非线性孤立方法都可能有用处.

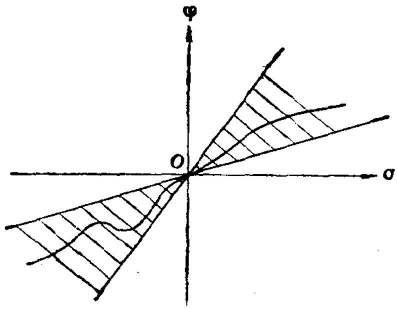

图 1.3　扇形区域

经过许多学者的努力，Лурье-Постников 提出的方法已经发展成为稳定性理论中的一个重要分支——绝对稳定性理论. 另一方面，又发现绝对稳定性理论中的频率判据乃是线性反馈系统的稳定性判据（见附录 C）的自然发展，从而绝对稳定性理论成为非线性自动控制系统的稳定性分析中的主要方法，在这方面的许多教科书和专著中都有介绍（例如文献[10-12]）.

本书的目的是对绝对稳定性的理论和应用这两个方面作一个较为详细的介绍.

§1.2　绝对稳定性的定义

在下面我们只对单输入单输出的驻定非线性环节的情况写出绝对稳定性的严格定义，至于这个定义在其他情况的推广是明显的，不一一列举.

采用矩阵、向量记号，可以将图 1.1 所表示的系统写成以下形式:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + bu, \\ u &= -\varphi(\sigma), \\ \sigma &= c'x \end{aligned}\right\} \tag{1.2.1}$$

这里 x, b, c 是 n 维实列向量，A 是 $n\times n$ 阶实矩阵，c' 是 c 的转置，t 为时间．在今后我们用记号 $\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维的实线性空间，用 $\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵全体所成的 mn 维实线性空间．于是以上规定可以记成 $x, b, c\in\boldsymbol{R}^n$, $A\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$. 注意用式 (1.2.1) 来描述一个自动控制系统就是现代控制理论中的状态空间方法．

在式 (1.2.1) 中的 $\varphi(\sigma)$ 代表图 1.1 和图 1.2 中的 NL 部分的特性．我们要求 $\varphi(\sigma)$ 是连续函数，满足图 1.3 所表示的那种扇形区域限制．在分析上可以写为：存在 μ_1, μ_2, 使

$$\mu_1\sigma^2 < \sigma\varphi(\sigma) < \mu_2\sigma^2 \quad \forall\sigma \neq 0^{1)}. \tag{1.2.2}$$

由于 $\varphi(\sigma)$ 连续，因此式 (1.2.2) 已包含有

$$\varphi(0) = 0. \tag{1.2.3}$$

于是系统 (1.2.1) 有平凡解 $x\equiv 0$.

在定义式 (1.2.2) 中的参数 μ_1, μ_2 可以是正数、负数或无限大．但从式 (1.2.2) 可见必有 $\mu_1\leqslant\mu_2$.

今后将满足式 (1.2.2) 的所有连续函数 $\varphi(\sigma)$ 的全体记为 $F_{(\mu_1,\mu_2)}$, 并将式 (1.2.2) 改写成

$$\varphi(\cdot)\in F_{(\mu_1,\mu_2)}. \tag{1.2.2$'$}$$

在式 (1.2.2) 中出现的两个不等号可以改为≤号，或者其

1) 式 (1.2.2) 表示对任何 $\sigma\neq 0$, 不等式成立.

中任意一个改成≤. 我们将相应的函数类记为 $F_{(\mu_1,\mu_2)}$, $F_{[\mu_1,\mu_2)}$, $F_{(\mu_1,\mu_2]}$, 这里不一一详细写出了.

采用一个简单代换

$$\varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma) - \mu_1\sigma \tag{1.2.4}$$

就可以使得 $\varphi_1(\sigma)$ 满足与式 (1.2.2) 类似的扇形限制，但第一个不等式成为 $0<\sigma\varphi_1(\sigma)$. 这样减少一个参数对于问题的研究往往是有利的. 因此我们在今后如不作特别说明时，就经常设式 (1.2.2) 中 $\mu_1 = 0$, 将 μ_2 记为 μ, 并且将 $F(0,\mu)$ 简记为 F_μ.

注 如果 $\mu_1 = -\infty$,则可以讨论 $-\varphi(\sigma)$,然后作类似式 (1.2.4) 的变换. 唯一不能用变换式 (1.2.4) 将 $\varphi(\sigma)$ 转化为 F_μ 的例外是 $\mu_1 = -\infty$, $\mu_2 = +\infty$. 从 § 1.3 可知，这时的绝对稳定性要求对任何线性反馈 $\varphi(\sigma) = \mu\sigma\ (-\infty < \mu < +\infty)$ 系统均为渐近稳定. 对于这个例外情况的讨论,请看 § 4.4 末的注.

首先给出大范围稳定的确切定义.

定义 1.2.1 设系统 $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ 的解 $\phi(t)$ 在 Ляпунов 意义下是稳定的. 如果该系统的任何解 $x(t)$ 都在 $\phi(t)$ 的定义区间 $[t_0,+\infty)$ 上有定义,并且满足条件

$$\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t) - x(t)\| = 0, \tag{1.2.5}$$

那么我们称解 $\phi(t)$ 是全局稳定的.

关于定义 1.2.1，读者可以与附录 A 中的定义 A. 1.1 和 A. 1.2 相比较.

现在给出绝对稳定性的定义:

定义 1.2.2 设对于任何 $\varphi(\cdot) \in F_{(\mu_1,\mu_2)}$, 系统 (1.2.1) 的平凡解 $x \equiv 0$ 都是全局稳定的,那么我们称系统 (1.2.1) 的

平凡解 $x=0$ 关于函数类 $F_{(\mu_1,\mu_2)}$ 是绝对稳定的，或简称系统 (1.2.1) 关于 $F_{(\mu_1,\mu_2)}$ 是绝对稳定的.

从定义 1.2.2 可以看出，绝对稳定性概念具有三个特点，它们在原先的 Ляпунов 理论中是不具备的:

(i) 要求全局稳定而不只是局部性质的稳定性.

(ii) 非线性特性是一个函数类. 因此实际上是同时讨论一类系统.

(iii) 对于非线性特性的了解很少. 系统的稳定性主要通过对于 μ_1, μ_2 选择线性部分的参数 A, b, c 来实现.

Лурье 和 Постников 提出了解决绝对稳定性问题的一种方法,即寻找下列形状的 Ляпунов 函数:

$$V(x)=x'Px+\beta\int_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma, \tag{1.2.6}$$ [6,8,9]

其中 P 是 n 阶实对称阵, β 是实常数.

我们称式 (1.2.6) 为二次型加非线性积分的 V 函数.

从式 (1.2.6) 出发，可以得到绝对稳定性的各种代数判据，它们的形式有时与 Routh-Hurwitz 判据 (见附录 B) 相接近.

但是在自动控制理论中，代数判据往往不如 Nyquist 判据、Evans 根轨迹方法等来得方便 (见附录 C). 特别是在绝对稳定性理论中通过式 (1.2.6) 得到的代数判据，往往很复杂,应用时很不方便 (例如可参考文献 [13]).

在 1961 年，Popov 在这方面取得了一项突破性的成果，得到了关于绝对稳定性的频率判据[14,15]，其形式与 Nyquist 判据相类似. 这项发现推动了人们去寻找各种新的频率判据，其中的圆判据可以看成是 Nyquist 判据的一种直接推广[15].

在绝对稳定性的研究过程中，不仅在理论方面得到了丰