工程控制論

錢學森著

科學出版社

H. S. TSIEN
ENGINEERING CYBERNETICS
McGraw-Hill Publishing Company Ltd.
New York London Toronto

內容簡介

本書的目的是把一般性概括性的理論和實際工程經驗很好的結合起來，對工程技術各個系統的自動控制和自動調節理論作一個全面的探討．它一方面奠定了工程控制論這門技術科學的理論基礎，另一方面指出這門新學科今後的幾個研究方向．

本書最初是用英文寫的．現在的漢文版是在錢學森先生本人的指導下，翻譯英文版並且參照俄文譯本略加修改和補充而成．

本書曾榮獲中國科學院 1956 年度一等科學獎金．

工 程 控 制 論

錢 學 森 著
戴汝爲 何善堉譯

*

科 學 出 版 社 出 版 (北京朝陽門大街 117 號)
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號
科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年 8 月第 一 版　　書號：1296 字數：331,000
1958年 8 月第一次印刷　　開本：787×1092 1/18
(滬)：0001—1,954　　印張：14

定價：(10)2.20 元

漢文版序

本書原來是用英文寫的，當時作者尚在美國，生活不安定，所以寫得很粗糙，也沒有能够引入非常重要的蘇聯文獻. 理當重寫一遍，補正這些缺點，但是現在工作忙，尙無暇及此. 可是祖國的自動化事業在黨的領導下正飛速發展，工程控制論這門學科還是需要介紹. 解决這樣一個矛盾的辦法是：請戴汝爲同何善堉兩位同志根據作者1956年春季在中國科學院力學研究所講工程控制論的筆記，在譯英文版的基礎上加以補充. 今年工程控制論的俄譯本也出版了，俄譯本編校人費爾德包姆(A. A. Фельдбаум)很耐心地收集了有關的蘇聯文獻，加註到譯文裏. 漢譯者就利用了這些文獻，在適當的地方用[…]來加註，其中數字相當於書後俄文文獻的號數. 作者和漢譯者希望就這樣初步地補正英文版的一些缺點.

錢學森

1957年8月於北京

原　　序

著名的法國物理學家和數學家安培(A. M. Ampère)曾經給關於國務管理的科學取了一個名字——控制論(Cybernétique)[安培著:"論科學的哲學"(Essai sur la philosophie des sciences)第二部,1845年,巴黎出版]. 安培企圖建立這樣一門政治科學的龐大計劃並沒有得到結果,而且,恐怕永遠也不會有結果. 可是,在這些年代中,各國之間的戰爭却大大地促進了另一個科學部門的發展,這就是關於機械系統與電氣系統的控制與操縱的科學. 維納(N. Wiener)就借用安培所創造的名稱"控制論"來稱呼這門新的科學,然而,這門科學却是對於現代化戰爭非常重要的. 這眞是有些諷刺意味的. 維納的控制論(Cybernetics)["控制論——關於動物體和機器的控制與聯系的科學"("Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine" John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948)]是關於怎樣把機械元件與電氣元件組合成穩定的並且具有特定的性能的系統的科學. 這門新科學的一個非常突出的特點就是完全不考慮能量,熱量和效率等因素,可是在其他各門自然科學中這些因素却是十分重要的. 控制論所討論的主要問題是一個系統的各個不同部分之間的相互作用的定性性質,以及整個系統的總的運動狀態.

工程控制論的目的是研究控制論這門科學中能够直接用在工程上設計被控制系統或被操縱系統的那些部分. 因此,通常在關於伺服系統的書裏所討論的那些問題當然都包括在工程控制論的範圍之內. 但是,工程控制論比伺服系統工程內容更爲廣泛這一事實,只是二者之間的一個表面的區別,一個更深刻的,因而也是更重要的區別在於:工程控制論是一門技術科學,而伺服系統工程却是一種工程實踐. 技術科學的目的是把工程實際中所用的許多設計原則加以整理與總結,使之成爲理論,因而也就把工程實際的各個不同領域的共同性顯示出來,而且也有力地說明一些基本概念的重大作用. 簡單地說,理論分析是技術科學的主要內容,而且,它常常用到比較高深的數學工具. 只要把本書稍微瀏覽一下就對這個事實更加清楚了. 關於系統的部件的詳細構造和設計問題(也就是把理論付諸實踐的具體問題)在這本書裏幾乎是不予討論的. 關於元件的具體問題更是根本不談的.

能不能够把理論從工程實踐分出來研究呢? 其實,只要看到目前已經存在的各門技術科學以及它們的飛速發展,就會發現這個懷疑簡直是完全不必要的. 舉一個特別的例子來說:流體力學就是一門技術科學,它與空氣動力學工程師,水力學工程師,氣象學家以及其他在工作中經常利用流體力學的研究結果的人的實踐是"分割"開來的. 可是,如果沒有流體力學家的話,對於超音速流動的了解和利用至少也要大大地推遲. 因此,把工程控制論建成一門技術科學的好處就是:工程控制論使我們可能有更廣闊的眼界用更系統的方法來觀察有關的問題,因而往往可以得到解决舊問題的更有成效的新方法,而且工

程控制論還可能揭示新的以前沒有看到過的前景．最近若干年以來，控制與導航技術已經有了多方面的發展，所以，確實也很有必要設法用這樣一種統觀全局的方法來充分地瞭解與發揮這種新技術的潛在力量．

因此，關於工程控制論的討論，應該合理地包括科學中對於工程實踐可能有用的所有方面．尤其是不應該僅僅由於數學的困難而逃避任何一個問題，其實，深入地考慮一下就會發覺，任何一個問題在數學上的困難常常帶有很大的人爲的性質．只要把問題的提法稍微加以改變，往往就可以使問題的數學困難減輕到進行研究工作的工程師所能處理的程度．因此，本書的數學水平也就是讀過數學分析課程的大學生的水平．關於復變數積分，變分法和常微分方程的基本知識是研讀這本書所預先需要的．此外，只要比較直觀的講法能够達到目的，我們就不用嚴密的精巧的數學方法來討論；所以，以一個專門作具體工作的電子工程師的眼光來看，我們這種作法一定是太“學究氣”了；可是，從一個對這門科學有興趣的數學家的眼光來看，這種作法可能是太“不鄭重”了．如果真的只有這兩種批評的話，作者一方面願意承担這種責任，另一方面也會感到一些滿意，因爲他將認爲他在原來要作的事業裏沒有完全失敗．

在編寫本書期間，作者從和他的兩位同事的多次交談中得益很多，因爲，這些談話常常使一些含混之處突然明確起來．這兩位先生就是美國加利福尼亞省理工學院(California Institute of Technology)的馬勃爾(Frank E. Marble)博士和德普利馬(Charles R. DePrima)博士．由於塞爾登杰克梯(Sedat Serdengecti)和溫克耳(Ruth L. Winkel)給予的有效幫助，大大地減輕了書稿的準備工作．對於以上提到的各位先生，作者謹表示衷心的感謝．

錢學森

目 錄

漢文版序……………………………………………………………………………………v
原序……………………………………………………………………………………………vi
第一章 引言……………………………………………………………………………1
1.1 常系數綫性系統……………………………………………………………1
1.2 變系數綫性系統……………………………………………………………2
1.3 非綫性系統…………………………………………………………………4
1.4 工程近似的問題……………………………………………………………5
第二章 拉氏變換法……………………………………………………………………6
2.1 拉氏變換和反轉公式………………………………………………………6
2.2 用拉氏變換法解常系數綫性微分方程……………………………………6
2.3 拉氏變換的"字典"(拉氏變換表)…………………………………………8
2.4 關於正弦式的驅動函數的討論……………………………………………9
2.5 關於單位冲量驅動函數的討論……………………………………………10
第三章 輸入、輸出和傳遞函數…………………………………………………11
3.1 一階系統……………………………………………………………………11
3.2 傳遞函數的表示法…………………………………………………………14
3.3 一階系統的一些例子………………………………………………………16
3.4 二階系統……………………………………………………………………21
3.5 確定頻率特性的方法………………………………………………………26
3.6 由多個部件組成的系統……………………………………………………27
3.7 超越的傳遞函數……………………………………………………………28
第四章 反饋伺服系統…………………………………………………………………32
4.1 反饋的概念…………………………………………………………………32
4.2 反饋伺服系統的設計準則…………………………………………………33
4.3 乃氏(Nyquist)法……………………………………………………………36
4.4 艾文思(Evans)法……………………………………………………………38
4.5 根軌跡的流體力學比擬……………………………………………………42
4.6 伯德(Bode)法………………………………………………………………44
4.7 傳遞函數的設計……………………………………………………………45
4.8 多迴路伺服系統……………………………………………………………45
第五章 不互相影響的控制……………………………………………………………48
5.1 單變數系統的控制…………………………………………………………48
5.2 多變數系統的控制…………………………………………………………49
5.3 不互相影響的條件…………………………………………………………52

5.4 反應方程……55
5.5 渦輪螺旋槳發動機的控制……56
5.6 有補充燃燒的渦輪噴氣發動機的控制……59
第六章 交流伺服系統與振盪控制伺服系統……61
6.1 交流系統……61
6.2 把直流系統變爲交流系統時傳遞函數的變化方法……62
6.3 振盪控制伺服系統……64
6.4 繼電器的頻率特性……64
6.5 利用固有振盪的振盪控制伺服系統……66
6.6 一般的振盪控制伺服系統……68
第七章 採樣伺服系統……71
7.1 一個採樣綫路的輸出……71
7.2 施梯必茨-申南 (Stibitz-Shannon) 理論……72
7.3 採樣伺服系統的乃氏準則……74
7.4 穩態誤差……75
7.5 $F_2^*(s)$ 的計算……76
7.6 連續作用伺服系統與採樣伺服系統的比較……78
7.7 $F_2(s)$ 在原點有極點的情形……78
第八章 有時滯的綫性系統……79
8.1 燃燒中的時滯……79
8.2 薩奇(Satche)圖……81
8.3 有反饋伺服機構的火箭發動機的系統動力學性質……84
8.4 沒有反饋伺服機構時的不穩定性……86
8.5 有反饋伺服機構時的系統的穩定性……87
8.6 時滯系統的穩定性的一般判斷準則……90
第九章 平穩隨機輸入下的綫性系統……93
9.1 隨機函數的統計描述方法……93
9.2 平均值……95
9.3 功率譜……97
9.4 功率譜的例子……98
9.5 功率譜的直接計算……99
9.6 離開平均值的大偏差的概率……103
9.7 隨機函數超過一個固定值的頻率……106
9.8 綫性系統對於平穩隨機輸入的反應……107
9.9 二階系統……108
9.10 不可壓縮的湍流中作用在一個二維機翼上的舉力……109
9.11 間歇的輸入……111

9.12 為隨機輸入而作的伺服控制設計 …… 112

第十章　繼電器伺服系統…… 114

10.1 一個繼電器的近似的頻率特性…… 114

10.2 柯氏(Kochenburger)方法…… 116

10.3 其它的頻率遲鈍非綫性機構…… 118

10.4 繼電器伺服系統的最優運轉狀態…… 119

10.5 相平面…… 119

10.6 綫性開關…… 122

10.7 最優開關函數…… 126

10.8 二階綫性系統的最優開關曲綫…… 129

10.9 多方式的控制作用…… 133

第十一章　非綫性系統…… 134

11.1 有非綫性反饋的繼電器伺服系統…… 134

11.2 弱非綫性系統…… 135

11.3 跳躍現象…… 137

11.4 頻率縮減…… 137

11.5 頻率侵佔現象…… 138

11.6 異步激發和異步抑制…… 139

11.7 參數激發和參數阻尼…… 139

第十二章　變系數綫性系統…… 141

12.1 火箭彈在燃燒過程中的運動狀態…… 141

12.2 綫性化的彈道方程…… 143

12.3 火箭彈的穩定性…… 144

12.4 變系數系統的穩定性問題和控制問題…… 148

第十三章　利用攝動理論的控制設計…… 149

13.1 火箭的運動方程…… 149

13.2 攝動方程…… 152

13.3 伴隨函數…… 154

13.4 射程的改正…… 156

13.5 關車條件…… 157

13.6 導航條件…… 158

13.7 導航系統…… 159

13.8 控制計算機…… 161

附錄　攝動系數的計算 …… 163

第十四章　滿足指定積分條件的控制設計…… 167

14.1 控制的準則…… 167

14.2 穩定性問題…… 169

14.3 一階系統的一般理論……169
14.4 一般理論對噴氣發動機的控制的應用……171
14.5 溫度有一定限制條件的速率控制……172
14.6 兩個自由度的二階系統……176
14.7 以微分方程作爲附加條件的控制設計……178
14.8 控制設計概念的比較……179
第十五章 自動尋求最優運轉點的控制系統……180
15.1 基本概念……180
15.2 自動尋求最優點控制的原理……181
15.3 干擾的影響……184
15.4 自動保持最高點的控制系統……185
15.5 動力學現象的影響……186
15.6 穩定運轉的設計……191
第十六章 噪聲過濾的設計原理……193
16.1 平均平方誤差……193
16.2 菲利普斯(Phillips)的最優過濾器設計原理……196
16.3 維納-闊爾莫果洛夫(Wiener-Колмогоров)理論……197
16.4 一些簡單的例子……200
16.5 維納-闊爾莫果洛夫理論的應用……202
16.6 最優檢測過濾器……206
16.7 其它的最優過濾器……208
16.8 一般的過濾問題……209
第十七章 自行鎮定和適應環境的系統……211
17.1 自行鎮定的系統……211
17.2 自行鎮定的系統的一個例子……213
17.3 穩定的概率……215
17.4 終點場……216
17.5 適應環境的系統……219
第十八章 誤差的控制……222
18.1 用加倍的辦法改進可靠性……222
18.2 基本元件……223
18.3 複合方法……224
18.4 執行機構中的誤差……226
18.5 複合系統的誤差……232
18.6 一些例子……234
俄文文獻……236
索引……238

第一章
引　　言

如果我們所考慮的系統的自由度是一,因此,只用一個變數 y 就可以記錄或描述這個系統的物理狀態. 把變數 y 取作時間 t 的函數,也就可以描寫這個系統在時間過程中的運動狀態. 爲了確定這個運動狀態——也就是函數 $y(t)$,我們就必須知道這個系統的構造以及它的各個組成部件的特性. 具備了關於系統的這些知識之後,再根據物理學的基本定律把這些知識"翻譯"成數學的語言,這樣我們就得到一個爲了計算 $y(t)$ 而建立的方程. 這個方程可能是一個積分方程,也可能是一個積分微分方程,但是在絕大多數的情況下,它是一個微分方程,而且是一個常微分方程,因爲只有時間 t 是唯一的自變數.

如果微分方程的每一項中最多只含有因變數 y 或者 y 的各階時間導數的一次方冪,不包含 y 或者它的各階時間導數的高次方冪,也不包含這些函數的乘積,我們就說這個方程是綫性的,同時,也就把這個方程所描述的系統稱爲綫性系統. 反之,我們就說,這個方程是非綫性的,同時,把它所描述的系統稱爲非綫性系統. 更進一步,還可以把所有綫性系統分爲常系數綫性系統和變系數綫性系統兩類. 如果描述系統狀態的綫性微分方程的每一項的系數都是常數,我們就把這個系統稱爲"常系數綫性系統". 如果這些系數不全是常數而是時間 t 的函數,我們就把這個系統稱爲"變系數綫性系統".

從各類微分方程的解的特性來看,以上的分類方法是有道理的. 因爲,每個系統的運動狀態的特性與描述這個系統的微分方程的類型是有密切關系的. 不但如此,微分方程的類型還能確定我們可以對系統提出的合理的問題的性質. 換句話說,微分方程的類型確定了解決系統的工程問題的正確作法. 現在我們就來看一看這種情況.

1.1 常系數綫性系統

讓我們來討論一個最簡單的系統——一階系統. 也就是說,微分方程是一個一階的常系數綫性方程. 如果假定系統本身的特性不受到外界的影響,並且不受到驅動函數(也就是外力)的作用,那麽,微分方程就可以寫作下列形式:

$$\frac{dy}{dt} + ky = 0. \tag{1.1}$$

其中 k 是一個實常數,可以叫作彈簧常數. 當 y 不隨時間變化時, dy/dt 等於零. 根據方程(1.1)必定要有 $y = 0$. 因此,系統的平穩狀態,或者平衡狀態,就相當於 $y = 0$ 的狀態.

方程(1.1)的解是

$$y = y_0 e^{-kt}, \tag{1.2}$$

這裏, y_0 是 y 的初始值,或者說

$$y(0) = y_0, \tag{1.3}$$

這樣，y_0 也就是系統的離開平衡狀態的初始擾動．對於正的 k 值和負的 k 值，在圖 1.1 裏畫出了系統在 $t>0$ 時的運動狀態．我們看到，在 $k>0$ 的情況下，y 隨着時間的增加而逐漸減小．當時間無限增大時，$y\to 0$．因此，對於 $k>0$ 的情形，系統的擾動就會最後消失掉．於是我們就可以說，系統是穩定的．在 $k<0$ 的情況下，系統的運動隨着時間的增加而不斷地增大，而且不論初始的擾動位移多麽微小，系統的擾動都會逐漸增長到非常大的數值，這也就是說，一旦受到擾動，系統就永遠不能再回到平衡狀態上去了．這樣的系統就是不穩定的．

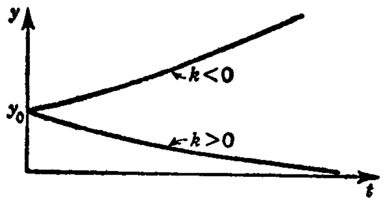

圖 1.1

對於階數更高的系統來說，微分方程裏含有更高階的導數．n 階系統的微分方程就是：

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0 y=0. \tag{1.4}$$

對於實際的物理系統而言，各個系數 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 都是實數．在這種情況下，方程(1.4)的解可以寫成

$$y=\sum_{i=1}^{n} y_0^{(i)}e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t+\varphi_i), \tag{1.5}$$

其中 α_i, β_i 都是實數並且和系數 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 有關．各個 φ_i 都是相角．而且也和系數 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 有關．這樣一來就可以看出：只有當所有的 α_i 都是負數的時候系統的運動才是穩定的．如果某一個 α_i 是正數，擾動就會越來越大，因而系統也就是不穩定的．

從以上的一些例子可以看到：關於常系數綫性系統的運動狀態，我們可以問一個嚴格的問題——系統的穩定性的問題．不言而喻，在一個工程設計中，通常的要求就是穩定性．只要確定了微分方程的系數，我們就可以答覆系統是否穩定的問題．在由方程(1.1)所描述的簡單的一階系統的情況中，k 的符號是唯一的有決定性意義的資料．

1.2 變系數綫性系統

如果在所研究的系統中有一個可變化的參數，變動這個參數就可以使系統的平穩狀態或平衡狀態相應地改變．很自然地就可以想到：描述系統運動狀態的微分方程的系數也是這個參數的函數．例如，作用在飛機上的空氣動力就是飛機速率的函數，如果飛機的速率由於加速度或減速度而發生改變的話，那麽，即使飛機本身的慣性性質保持不變，作用在飛機上的空氣動力也還是要改變的．由於這個緣故，如果我們想計算飛機的離開水平飛行路綫的擾動運動的話，基本的微分方程就會是一個變系數的方程．

讓我們再回到方程(1.1)所描述的一階系統的簡單的例子上去．如果彈簧系數 k 是飛機的速率的函數，而且假定飛機有一個不變的加速度 a，那末，k 就是速率 $u=at$ 的函數．因此，微分方程就可以寫成以下的形式：

$$\frac{dy}{dt}+k(at)y=0. \tag{1.6}$$

這個方程的解就是：

$$\log \frac{y}{y_0} = -\frac{1}{a}\int_0^{at} k(\xi)d\xi, \tag{1.7}$$

其中 y_0 是初始擾動. 如果 k 總是正數,那末, $\log(y/y_0)$ 就總是負數. 而且當時間增大的時候, $\log(y/y_0)$ 這個負數的絕對值也就會越來越大. 因此, y 就永遠小於 y_0,而且最後趨於消失. 所以系統是穩定的. 如果 k 總是負數, $\log(y/y_0)$ 就是一個隨着時間增大的正數. 即使初始擾動 y_0 非常微小, y 的數值最後也會變成很大,所以系統就是不穩定的. 這樣一些系數不改變符號的變系數系統的特性和常系數系統的特性是非常相近的.

然而,有趣味的是 k 既有正值也有負值的情形. 我們假定 $k(at)$ 先取正值,然後取負值,最後又再取正值. 如果以 $u_1 = at_1$ 表示 k 的第一個零點,以 $u_2 = at_2$ 表示第二個零點,那末,依照我們以前的觀念來看,在 u_1 到 u_2 的速度範圍之內,系統是不穩定的(圖 1.2). 設 $y_{\min}$ 是 y 的極小值, $y_{\max}$ 是 y 的極大值. 根據方程(1.7)就有:

$$\log \frac{y_{\min}}{y_0} = -\frac{1}{a}\int_0^{u_1} k(\xi)d\xi \tag{1.8}$$

以及

$$\log \frac{y_{\max}}{y_0} = -\frac{1}{a}\int_0^{u_2} k(\xi)d\xi. \tag{1.9}$$

從工程的觀點來看,有興趣的首要的問題就是: $y_{\max}$ 多麼大? 是不是它已經大到使系統不能正常運轉的程度? 我們注意到這樣一個事實:爲了回答以上的問題,除了 k 和 u 的函數關系之外,我們還需要知道兩件事. 這兩件事就是:加速度 a 多麼大? 初始擾動 y_0 的大小是多少? 因爲對於固定的 a 值來說, $y_{\max}$ 和 y_0 成比例. 但是更重要的情况是:對於固定的初始擾動來說,我們可以用增大加速度 a 的辦法使偏差的極大值 $y_{\max}$ 大大地減小. 這個事實可以從方程(1.9)看出來. 這個事實的實際意義就是:如果儘可能迅速地通過"不穩定區域",就可以使不利的效果減少到最低的程度.

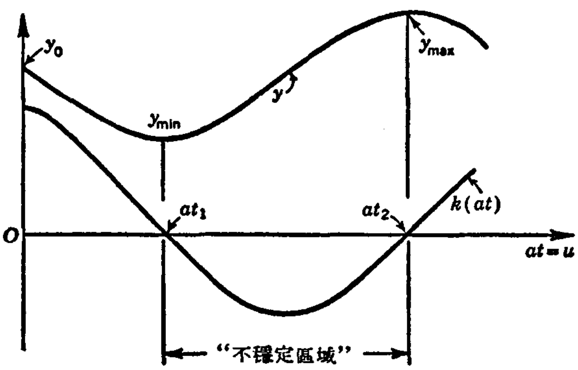

圖 1.2

由以上的討論我們知道,對於一般的變系數綫性系統來說,簡單地提出這些系統是否穩定的問題是沒有明確的意義的. 更有意義的問題的提法是:在給定的擾動和給定的外界條件之下,對於一個確定的準則(判斷標準)來說,這個系統的運行狀態是否使人滿意? 在我們的簡單的一階系統的例子裏,正常運行的確定的判斷準則就是 $y_{\max}$;給定的擾動就是 y_0;給定的外界條件就是加速度 a. 因此,由於從常系數系統進展到變系數系統,問題的特點就已經大大地改變了.

爲了避免發生誤解起見,必須指出:以上的討論只是爲了說明常系數綫性系統和變系數系統在基本的數學性質上的區別而已,並不是說,在實際的工程問題中對於常系數綫性

系統只要求它們穩定就够了，而對於這些系統的其他方面的性能(例如，過渡過程中的狀態、可能發生的最大偏差 y_{max} 等等)也還是要加以考慮的．同樣地，在實際的工程問題裏對變系數綫性系統提出的問題也可以是多方面的．總之，希望讀者不要把實際的工程問題和理論的說明混淆起來．

1.3 非綫性系統

如果在方程(1.1)所描述的簡單的一階系統裏，彈簧系數 k 是擾動量 y 本身的函數，那麼微分方程就成為

$$\frac{dy}{dt} + f(y) = 0, \tag{1.10}$$

其中 $f(y) = k(y)y$. 我們看到這個方程是非綫性的．方程(1.10)所描述的系統也就是非綫性系統的最簡單的例子．把方程(1.10)積分，就可以用下列的關系式算出方程的解 $y(t)$:

$$t = -\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \tag{1.11}$$

這裏的 y_0 仍然是初始擾動．

另外一方面，把方程(1.10)逐次地求導數就得出：

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} &= 0, \\ \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dt^2} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&, \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

因此，如果 y_1 是函數 $f(y)$ 的零點，並且 $f(y)$ 在 y_1 點是正則的，所以，$f(y)$ 對於 y 的所有階的導數在 y_1 點都是有限值．我們還可以假定 $f(y)$ 在 y_1 點附近可以寫成

$$f(y) = (y - y_1)^m[c_m + c_{m+1}(y - y_1) + \cdots]$$

的形狀，其中 $m \geqslant 1$，而且 $c_m \neq 0$．因此，根據(1.10)和(1.12)就得出：

$$\text{在 } y = y_1 \text{ 處} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^3y}{dt^3} = \cdots = 0. \tag{1.13}$$

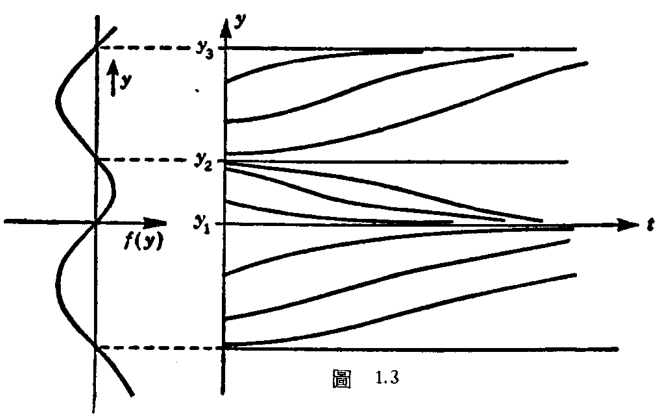

圖 1.3

這個事實的意思就是：y 漸近地趨近於 y_1．事實上，如果 $y_0 > y_1$，而且 $f(y_0) > 0$，那末，y 最後就會變成 y_1．如果 $y_0 < y_1$ 而 $f(y_0) < 0$，那麼當 $t \to \infty$ 時，y 還是變為 y_1．在 $f(y)$ 的其他的零點附近，y 的運動狀態也還是這種型式的(圖 1.3)．

如果初始擾動 y_0 與 $f(y)$ 的某一個零點相重合的話，那末，以後 y 就保持着這個數值，並不隨時間變化．因此，$f(y)$ 的各個零點都是平衡位置．

如果在某一個零點上 $df/dy>0$,就像 y_1 點的情形,離開這個平衡位置的微小偏離必定會逐漸消失,因而系統最後還會回到初始狀態上去. 這樣,我們就可以說,對於微小擾動而言,在 y_1 點系統是穩定的. 可是,如果在某一個零點上 $df/dy<0$,就像 y_2 點的那種情形,離開這個平衡點的任何一個微小擾動都會使得系統變動到相鄰的平衡位置 y_1 或 y_3 上去. 因此,y_2 是一個不穩定的平衡狀態.

我們已經看到,甚至於像方程(1.10)所描述的這樣一個非常簡單的非綫性系統,它的運動狀態已經是很複雜的了. 這樣的系統可以同時具有穩定性和不穩定性,因此,對於這一類系統一般地提出是否穩定的問題是毫無意義的. 與其這樣,倒不如對每一個特殊的問題進行個別的考慮. 不過,這裏應該指出:我們也可以在某種確定的意義下討論非綫性系統的穩定性問題,譬如:系統在李雅普諾夫(А. М. Ляпунов)意義下或其他與此類似的意義下的穩定性問題[2-4].

關於非綫性系統運動狀態的穩定性問題,讀者可以參閱有關的專門文獻[1)].

1.4 工程近似的問題

幾乎可以肯定地這樣說:只要加以足够精密的分析,任何一個物理系統都是非綫性的. 我們說某一個實際的物理系統是綫性系統,其意思只是說它可以充分精確地用一個綫性系統加以近似地代表而已,並且,所謂"充分精確"的意思就是說:實際系統與理想化了的綫性系統的差別,對於具體研究的問題來說已經小到無關緊要的程度. 只有當具體的條件和具體的要求明確地給定以後,我們才能把一個實際的系統看作綫性系統或是非綫性系統. 在這個問題上並不存在一般所謂的絕對的判斷準則. 舉例來說,如果我們只想研究一個非綫性系統在它的某一個穩定平衡點附近的微小擾動運動的最後狀態的話,那末,根據李雅普諾夫的關於運動穩定性的第一近似的定理[2-4],在一定的條件下,原來的系統就可以用一個綫性系統很好地近似;但是,如果我們的問題是想研究系統的自激振盪的話,那末,就不能把系統的非綫性的性質忽略掉,因爲那樣一來就會把產生自激振盪的物理根源(和數學根源)丢掉了.

以上所說的處理分類問題的原則,對於把綫性系統分爲常系數系統和變系數系統兩類的情形也是適用的. 以方程(1.1)和方程(1.6)所描述的兩個簡單的系統爲例:如果加速度 a 非常小,也就是說飛行的速度幾乎不變,由方程(1.8)就可以看出來 $y_{\min}$ 比初始擾動 y_0 小得多,而且這樣的 $y_{\min}$ 發生在 t 的數值很大的一個時刻. 在一個有限的時間間隔之內,系統(1.6)的運動狀態和 k 是正値的系統(1.1)的運動狀態是十分相近的. 因此,在一定的場合之下,也可以用常系數系統很準確地近似一個變系數系統.

很明顯,常系數系統是最容易研究的. 很幸運的是:爲數很多的工程系統經過工程近似的手續之後,都可以看作常系數系統. 這也就是爲什麼在控制與調節的理論中,關於穩定性的這一部分理論特別發達的緣故. 事實上,目前的伺服系統理論所處理的基本上就是這一類系統[2)]. 因此,我們也就先從常系數綫性系統開始討論.

1) 參閱[1],第 4 章,§5,6.

2) 應當指出:近年來也對於非綫性調節系統和非綫性伺服系統進行了大量的研究. 參閱[5—9].

第二章
拉氏變換法

對於那些以時間 t 爲自變數的常系數綫性微分方程來說，用拉氏變換（拉普拉斯變換）求解的方法是非常有用的. 當然也可以用其他的一些方法求這類方程的解，可是，技術科學家們所以最樂於採用拉氏變換法的原因就是因爲這個方法能够把所有的問題歸結到一個一致的基礎上去. 這樣一來求解的手續就被標準化了，同時，對於問題也就可能有一個普遍適用的處理方法. 在很多教科書[1]裏都討論了拉氏變換的理論和實際的用法，這些工作並不是這一章的目的. 這一章的目的只是爲了查閱的便利而簡要地給出一些結果，這些結果都是我們在以後各章中的討論所必需的. 至於詳細的敘述和證明，讀者可以去參考註解裏所提出來的那些書籍.

2.1 拉氏變換和反轉公式

如果 $y(t)$ 是一個時間變數 t 的函數，它的定義區域是 $t>0$. 那末，$y(t)$ 的拉氏變換 $Y(s)$ 的定義就是[2]:

$$Y(s)=\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt, \tag{2.1}$$

這裏的 s 是一個具有正實數部分的複變數；$\Re s>0$（$\Re s$ 表示 s 的實數部分）. 對於其他的 s 值，我們用解析拓展的方法來定義函數 $Y(s)$. $Y(s)$ 的量綱是 y 的量綱和時間的量綱的乘積. s 的量綱是時間量綱的負一次方冪.

如果 $Y(s)$ 是已知的，那末，拉氏變換 $Y(s)$ 的原函數（也就是原來的函數）$y(t)$ 總是可以由下面的反轉公式計算出來：

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}Y(s)ds, \tag{2.2}$$

其中 γ 是任意的一個實數，只要它比所有的 $Y(s)$ 的奇點的實數部分都大就可以了. 在實際計算 $y(t)$ 時，我們可以按照 $Y(s)$ 的特點適當地變化積分的路綫. 從 $Y(s)$ 求 $y(t)$ 的步驟稱爲拉氏反變換.

2.2 用拉氏變換法解常系數綫性微分方程

既然拉氏變換是用對一個函數所作的一個積分運算所定義的，而這個函數又是只在

---

1) 例如: H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, "Operational Methods in Applied Mathematics" Oxford University Press, New York. 1941; 或者 R. V. Churchill, "Modern Operational Methods in Engineering" McGraw-Hill Book Company, Inc., New York. 1944. 如果想知道詳細的理論，可以參閱 G. Doetsch: "Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation", Verlag Julius Springer. Berlin, 1937; 或者 D. V. Widder: "The Laplace Transform", Princeton University Press, Princeton, N. J., 1946; 或者參閱[9—15].

2) 在這一本書裏，我們總是用大寫字母表示相當的小寫字母所代表的變數的拉氏變換.

$t>0$ 的時間間隔內定義的，所以拉氏變換法對於初值問題是特別適用的．所謂“初值問題”就是這樣一個問題：如果系統的初始狀態（也就是 $t=0$ 時的狀態）和 $t>0$ 時的驅動函數都是給定的，求在 $t>0$ 的時間間隔中系統的運動情況．我們來考慮一個 n 階的系統，假定 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 是各階導數的系數，而且對於這個系統有一個以非齊次項所表示的驅動函數 $x(t)$．於是，系統的微分方程就是：

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0y=x(t). \tag{2.3}$$

各個初始條件通常寫作：

$$\left.\begin{array}{c}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)_{t=0}=y_0^{(n-1)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (y)_{t=0}=y_0.\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

考慮到條件(2.4)，微分方程(2.3)就能够把系統在 $t\geqslant 0$ 時的運動狀態唯一地確定下來．

為了用拉氏變換法來解這個問題，我們把方程(2.3)的兩端，同時乘以 e^{-st}，然後再從 $t=0$ 積分到 $t=\infty$．既然規定

$$\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt=Y(s), \tag{2.1a}$$

我們就可以用部分積分的方法求出 $y(t)$ 的各階導數的拉氏變換：

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\frac{dy}{dt}\,dt=-y_0+s\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt=-y_0+sY(s),\\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\frac{d^2y}{dt^2}\,dt=-y_0^{(1)}-sy_0+s^2Y(s),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{最後}\\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\frac{d^ny}{dt^n}\,dt=-y_0^{(n-1)}-sy_0^{(n-2)}-\cdots-s^{n-1}y_0+s^nY(s).\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

根據這些結果，如果再把驅動函數 $x(t)$ 的拉氏變換寫成 $X(s)$，也就是說

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt, \tag{2.6}$$

那末，考慮到初始條件(2.4)，方程(2.3)就可以寫成：

$$\begin{aligned}&(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)\\ &\quad=a_ny_0s^{n-1}+(a_ny_0^{(1)}+a_{n-1}y_0)s^{n-2}+(a_ny_0^{(2)}+a_{n-1}y_0^{(1)}+a_{n-2}y_0)s^{n-3}\\ &\qquad+\cdots+(a_ny_0^{(n-1)}+a_{n-1}y_0^{(n-2)}+\cdots+a_1y_0)+X(s).\end{aligned} \tag{2.7}$$

如果我們再規定 $D(s)$ 和 $N_0(s)$ 分別是下列的兩個多項式：

$$D(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{2.8}$$

和

$$\begin{aligned}N_0(s)=a_ny_0s^{n-1}+(a_ny_0^{(1)}+a_{n-1}y_0)s^{n-2}+\cdots\\ +(a_ny_0^{(n-1)}+a_{n-1}y_0^{(n-2)}+\cdots+a_0y_0),\end{aligned} \tag{2.9}$$

於是方程(2.7)又可以寫作

$$Y(s)=\frac{N_0(s)}{D(s)}+\frac{X(s)}{D(s)}. \tag{2.10}$$

根據方程(2.9)我們看到,(2.10)的第一項$N_0(s)/D(s)$是與初始條件有關的. 我們把這一項寫作$Y_c(s)=N_0(s)/D(s)$. 多項式$N_0(s)$的次數最多也不會超過$n-1$次,因而它的次數總是比$D(s)$的次數低. 如果方程(2.4)所表示的初始條件全都等於零,$N_0(s)$也就隨之等於零了. 在這種情形下,$Y(s)$就只由第二項$X(s)/D(s)$確定. 第二項是與驅動函數有關的. 我們把這一項寫作$Y_i(s)=X(s)/D(s)$. 和普通的微分方程理論中所用的術語一樣,可以把第一項$N_0(s)/D(s)$稱爲補充函數,把第二項$X(s)/D(s)$稱爲特解. 應用反轉公式(2.2),就可以由方程(2.10)所表示的$Y(s)=Y_c(s)+Y_i(s)$得出眞正的解$y(t)$.

從以上的討論,我們可以看出,拉氏變換本身只是一個"翻譯"的手續,它把一個用時間變數t所描述的物理過程翻譯成用變數s所描述的過程,這樣的手續並不影響物理過程本身的性質,只不過是把這個過程的描述從"t的語言"翻譯成"s的語言"而已. 在t的語言裏用分析運算(微分或積分)所描述的過程,用s的語言來敍述就只要用簡單的代數運算(乘或除)就可以了;t的語言中的微分方程,用s的語言來表示就簡化爲代數方程,從而也就可以簡化計算的手續和表達的方式.

2.3 拉氏變換的"字典"(拉氏變換表)

當我們用拉氏變換法處理問題時,常常需要根據已知的拉氏變換函數$Y(s)$求出原函數$y(t)$. 我們當然可以利用反轉公式進行這項工作,可是反轉公式(2.2)中的積分運算常常是很繁複,很花費時間的;因此,對於那些常用的和典型的$y(t)$和$Y(s)$,人們已經編製了一些字典式的表格[1]. 利用這種變換表我們就可以根據已知的$Y(s)$查出相應的$y(t)$,也可以從已知的$y(t)$查出相應的$Y(s)$,這樣就大大地減輕了計算手續. 下面我們也給出一個最最簡略的拉氏變換的"字典"——一個很小的拉氏變換表:

表 2.1 拉氏變換的小"字典"

$Y(s)$	$y(t)$
$1/s$	1
$1/s^n$	$t^{n-1}/\Gamma(n)$
$1/(s-a)$	e^{at}
$a/(s^2+a^2)$	$\sin at$
$s/(s^2+a^2)$	$\cos at$
$a/(s^2-a^2)$	$\sinh at$
$s/(s^2-a^2)$	$\cosh at$
$s/(s^2+a^2)^2$	$\frac{t}{2a}\sin at$
$1/(s^2+a^2)^2$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$

在最常遇到的情形裏,驅動函數$x(t)$的拉氏變換$X(s)$的型式都是s的兩個多項式的比值,因此,由方程(2.10)所給出的完全解$Y(s)$也是s的兩個多項式的比值. 這樣一來,用求部分分式的方法就可以把$Y(s)$的表達式分解爲若干個簡單分式的和數. 對於每一個分式都可以用反轉公式(實際上很少這樣作)或者用比較好的查表方法求出原函數來.

1) 例如[12]以及第6頁註解中所提出的各本書中都有比較簡短的表.