纯粹数学与应用数学专著 第26号

自然边界元方法的数学理论

余德浩 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助项目

纯粹数学与应用数学专著　第26号

自然边界元方法的数学理论

余德浩　著

科　学　出　版　社

1 9 9 3

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了自然边界元方法的数学理论，总结了作者十余年来在这一方向的研究成果，包括椭圆边值问题的自然边界归化原理、强奇异积分的数值计算、对调和方程边值问题、重调和方程边值问题、平面弹性问题和 Stokes 问题的应用，以及自然边界元与有限元耦合法等内容．

本书可供高校计算数学、计算力学、应用数学专业的师生，从事数值计算的科研人员和工程技术人员阅读参考．

纯粹数学与应用数学专著　第 26 号

自然边界元方法的数学理论

余 德 浩 著

责任编辑　林　鹏

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1993 年 1 月第 一 版　　开本：850×1168　1/32

1993 年 1 月第一次印刷　　印张：15 7/8

印数：平 1—1 300　　插页：精 2

　　　精 1—500　　字数：417 000

ISBN 7-03-003131-8/O・576（平）

ISBN 7-03-003132-6/O・577（精）

定　价：平　　装 11.70 元

　　　　布面精装 14.70 元

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

序　言

边界元方法作为一种重要的数值计算方法近 20 年来得到了迅速发展，并在科学和工程计算的众多领域获得了广泛应用．国内外已有关于边界元方法及其应用的大量文献问世．本书介绍的自然边界元方法则是与国际流行的边界元方法完全不同的、有许多独特优点的一种新型边界元方法．这一方法是由我国学者首创并发展的．早在 70 年代中期，作者的导师冯康教授就已明确提出了自然边界归化的思想，当时这类边界归化被称为正则边界归化．作者正是基于他的开创性的工作及在他的直接指导下开始从事这一方向的研究并系统地发展了这一方法的．现在自然边界元方法已成为边界元方法的一个新的分支，引起了国内外同行广泛的关注和兴趣，这里自然应强调冯康教授对此作出的重要贡献．

本书的读者对象主要是学习或从事计算数学、计算力学、应用数学及其它相关专业工作的研究生、大学高年级学生、大学教师及科学工作者，也可供对应用边界元方法感兴趣的工程技术人员参考．全书共分六章．第一章概述自然边界归化的一般原理、强奇异积分的数值计算方法以及自然边界元方法的收敛性与误差估计．第二章至第五章分别讨论了调和方程边值问题、重调和方程边值问题、平面弹性问题及 Stokes 问题的自然边界归化和自然边界元方法，包括解的复变函数表示、典型域上的自然积分方程和 Poisson 积分公式、自然积分算子的性质、自然积分方程的数值解法等内容．第六章介绍了自然边界元与有限元耦合法，以及无穷远边界条件的近似．

本书系统总结了作者本人十余年来研究自然边界元方法所取得的一系列已发表的以及许多从未发表过的成果．书中的部分内容近年来也曾在中国科学院研究生院及其它一些高等院校讲授

过．由于迄今为止，自然边界归化仅有关于二维问题的结果，故本书也仅限于讨论二维区域上的自然边界元方法．本书并不追求完备，因此对国际流行的一般的边界元方法及其应用方面的许多内容，只在第一章中一带而过，并不作详述．读者完全可以从其它书籍中读到那些内容．

本书的撰写从一开始就得到我国计算数学界冯康、周毓麟、石钟慈三位学部委员以及林群、韩厚德等教授的关心和鼓励．早在1984 年夏包括上述 5 位教授在内的博士学位论文答辩委员会就已建议作者将有关成果写成专著出版，并认为这“将是一件很有价值的工作．”也正是根据冯康教授的建议，本书的书名由原定的“正则边界元方法的数学理论”改为“自然边界元方法的数学理论”，因为“自然边界元方法”这一术语更能反映这一方法的本质特性，从而冯康教授为这一方法也为本书确定了一个更为恰当的名称．清华大学韩厚德教授曾仔细审阅了本书初稿，并提出了许多富有建设性的意见．作者谨在此向他们表示衷心的感谢．

作者的研究工作及本书的出版得到国家自然科学基金、中国科学院数学特别支持费和中国科学院科学出版基金的支持．科学出版社第一编辑室对本书的撰写始终给予殷切关注并为本书的出版付出了辛勤劳动，谨此深表谢忱．

余德浩

1992 年 3 月于北京

目　　录

第一章　自然边界元方法的一般原理

§1. 引　　言

许多物理问题可通过不同途径归结为不同形式的数学模型.它们或是表现为偏微分方程的边值问题，或是表现为区域上的变分问题，或是归结为边界上的积分方程. 这些不同的数学形式在理论上是等价的，但在实践中并不等效，它们分别导致有限差分法、有限元方法和边界元方法等不同的数值计算方法.

边界元方法是在经典的边界积分方程法的基础上吸取了有限元离散化技术而发展起来的一种偏微分方程的数值解法. 它把微分方程的边值问题归化为边界上的积分方程然后利用各种离散化技术求解. 对微分方程作边界归化的思想早在上世纪就已出现，但将边界归化应用于数值计算并为此目的深入研究边界归化理论则是从本世纪 60 年代才开始的. 随着电子计算机的广泛应用,也使得有限元方法蓬勃地发展，人们将有限元技术与经典的边界归化理论相结合，为边界积分方程法在工程技术和科学计算中的应用打开了新局面. 于是到 70 年代后期,边界积分方程法开始被称为边界元方法，并被许多数学家和工程师看作继有限元方法之后出现的一种新的、重要的数值计算方法. 大量的理论和应用研究正是在此期间开始的. C. A. Brebbia, G. C. Hsiao, W. L. Wendland, J. C. Nedelec 以及我国的冯康、杜庆华等人对这一方法的发展与推广都作了大量的工作. 边界元方法已被广泛应用于弹性力学、断裂力学、流体力学、电磁场和热传导等领域的科学研究和工程技术的数值计算.

边界元方法的主要优点是将所处理问题的空间维数降低一维. 它只须对边界进行单元剖分，只要求出边界节点上的解函数

值就可计算区域内任意点的解函数值. 这对于无界区域上的问题特别有意义. 边界元方法也有其局限性. 由于数学分析的复杂性,边界元方法对变系数、非线性问题的应用受到了限制. 在数值计算方面,也由于得到的刚度矩阵的非稀疏性而增加了一些困难. 但尽管如此, 用边界元方法计算许多工程问题的成功仍引起人们对这一方法的充分重视. 十余年来边界元方法的研究和应用不断取得新的成果, 每年都有大量文献出版. 这一方法与有限元法的结合也为进一步开拓其应用范围提供了可能.

边界归化有很多途径. 我们可以从同一边值问题得到许多不同的边界积分方程. 这些积分方程可能是非奇异的, 可能是弱奇异的,可能是 Cauchy 型奇异的,也可能是强奇异的. 这些差异是因边界归化途径不同而产生的. 不同的边界归化途径可能导致不同的边界元方法. 国际流行的边界元方法通常被分为间接法与直接法两大类. 间接法从基本解及位势理论出发得到 Fredholm 积分方程, 它引入了新变量. 直接法则从 Green 公式及基本解出发, 并不引入新变量. 这两类边界归化得到的边界积分方程通常并不保持原问题的自伴性等有用的性质.

本书介绍的自然边界元方法则不同. 它是由 Green 函数和 Green 公式出发, 将微分方程边值问题归化为边界上强奇异积分方程(或称为超奇异积分方程), 然后化成相应的变分形式在边界上离散化求解的一种数值计算方法. 由于自然边界归化保持能量不变,原边值问题的许多有用的性质, 例如双线性型的对称性、强制性等均被保持, 从而自然积分方程的解的存在唯一性及稳定性等结果也就随之而得. 这一优点也保证了自然边界元方法与经典有限元方法能自然而直接地耦合. 这正是自然边界元与有限元耦合法与其它类型的耦合法相比所具有的最根本的优越性. 与一般边界归化得到的边界积分方程也取决于归化途径及所选择的基本解不同,自然积分方程是由原边值问题唯一确定的,它准确地反映此边值问题的解的互补的微分边值之间的本质的关系. 我们可以通过各种不同的途径,例如本书中使用的 Green 函数法、Fourier

变换或 Fourier 级数法及复变函数论方法等来推求自然积分方程，但殊途同归，对同一边值问题只能得到同一个自然积分方程。因此可以说，自然边界归化在各种边界归化中占有特殊的地位并具有许多优越性。至于积分核的强奇异性今天已不成为困难。本章给出了求解强奇异积分方程及计算强奇异积分的一些简单易行的数值方法。通过分部积分将强奇异积分化为只有较低奇异性的积分来处理则是另一类自然而适用的方法。自然积分算子产生光滑性降阶即作为正数阶拟微分算子的特性恰好保证了积分方程的解的很好的稳定性。

从数值计算的角度也将看到自然边界元方法的许多优点，如刚度矩阵的对称正定性，近似解的稳定性，以及在处理无穷区域及断裂区域时仍保持理想的精度，等等。特别是对于圆周边界的情况，自然边界元刚度矩阵还有某种循环性，于是我们并不需要计算全部矩阵系数，而只要计算大约半行系数就可以了。这样，与一般边界元方法由于刚度矩阵系数计算的复杂性使得边界元降维的优点在很大程度上被抵消不同，自然边界元方法确实使计算量大为减少。

自然边界元方法也有其明显的局限性。其困难主要是解析上的。因为对一般区域而言，Green 函数往往难以求得。其它可用以求得自然积分方程的途径也有同样的局限性。因此我们仅对少数典型区域应用自然边界元方法，而对一般区域则应用自然边界元与有限元耦合法。其实，所有边界元方法都有局限性。与有限元方法耦合对于所有边界元方法都是极其重要的。从这个观点看，自然边界元方法的优越性就极为明显了，因为唯有自然边界元与有限元的耦合是基于同一变分原理的自然而直接的耦合。这种耦合综合了自然边界元方法与经典有限元方法的优点，既克服了自然边界元方法对区域的局限性，又使经典有限元方法能适用于无界区域及裂缝区域。正如冯康教授所指出的，边界元方法应作为有限元方法的一个组成部分，完全适合在有限元方法的框架内发展(见[72])。这正是我们研究自然边界元方法的出发点。

本章将首先概述通常的边界归化方法及基于这些边界归化的边界元方法，以便使读者对一般的间接法和直接法也有所了解。从第3节起即转入本书主题，依次介绍自然边界归化的基本思想，强奇异积分的数值计算，自然边界元解的收敛性及误差估计等内容。

§2. 边界归化与边界元方法

边界元方法是将区域内的微分方程边值问题归化到边界上然后在边界上离散化求解的一种数值计算方法，其基础在于边界归化，即将区域内的微分方程边值问题归化为在数学上等价的边界上的积分方程。边界归化的途径很多，可以从同一边值问题得到许多不同的边界积分方程。不同的边界归化途径可能导致不同的边界元方法。下面我们简要介绍通常采用的两种边界归化方法，即间接归化法及直接归化法。

§2.1 间接边界归化

间接边界归化是从基本解及位势理论出发得到 Fredholm 积分方程。这是经典的边界归化方法。此时积分方程的未知量不是原问题的解的边值而是引入的新变量，因此这种归化被称为间接归化。今以二维调和方程边值问题为例来说明之。

考察以逐段光滑的简单(无自交点)闭曲线 Γ 为边界的平面有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 内的调和方程第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \Omega\text{ 内},\\ u=u_0, & \Gamma\text{ 上}\end{cases} \tag{1}$$

及第二边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \Omega\text{ 内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g, & \Gamma\text{ 上},\end{cases} \tag{2}$$

其中 n 为 Γ 上的外法线方向。边值问题(1)存在唯一解，而边值问

题(2)在满足相容性条件

$$\int_{\Gamma} g ds = 0$$

时，在差一个任意常数的意义下有唯一解。

类似地考察Ω的补集的内部 Ω' 上的调和方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \Omega' \text{ 内}, \\ u = u_0, & \Gamma \text{ 上}\end{cases} \tag{3}$$

及第二边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \Omega' \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \Gamma \text{ 上}.\end{cases} \tag{4}$$

边值问题(3)及(4)的解的唯一性依赖于 u 在无穷远的性态，即必须对解在无穷远处的性态作一定的限制才能保证解的唯一性。

为了建立解的积分表达式，要用到如下 Green 公式

$$\iint_{\Omega} v \Delta u dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2 \tag{5}$$

及由此推出的 Green 第二公式

$$\iint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \tag{6}$$

今后常简记 $x = (x_1, x_2)$, $dx = dx_1 dx_2$. 又已知二维调和方程的基本解为

$$E = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \tag{7}$$

其中 $r = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $y = (y_1, y_2)$ 为平面上某定点. 基本解 E 满足

$$-\Delta E = \delta(x - y). \tag{8}$$

这里 $\delta(\cdot)$ 为二维 Dirac-δ 函数，其定义如下：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

且

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \delta(x)dx = 1.$$

它是一个广义函数，对任意连续函数 $\varphi(x)$，满足

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

(参见 [4]，[75].)

下面的定理给出了上述边值问题的解的积分表达式.

定理 1.1 设 u 为 Ω 和 Ω' 中二次可微函数，分别有边值

$$u|_{\mathrm{int}\Gamma},\ u|_{\mathrm{ext}\Gamma},\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\mathrm{int}\Gamma},\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\mathrm{ext}\Gamma},$$

且满足

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \Omega\cup\Omega' \text{ 内},\\ \text{当}|x|\text{大时}:\ u(x)=O\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & |\mathrm{grad}\, u(x)| = O\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right),\end{cases} \tag{9}$$

于是，若 $y\in\Omega\cup\Omega'$，则

$$u(y) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left\{[u(x)]\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y| - \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right]\ln|x-y|\right\}ds(x), \tag{10}$$

若 $y\in\Gamma$，则

$$\frac{1}{2}\{u(y)|_{\mathrm{int}\Gamma} + u(y)|_{\mathrm{ext}\Gamma}\} = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left\{[u(x)]\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y| - \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right]\ln|x-y|\right\}ds(x), \tag{11}$$

其中规定法线方向总是指向 Ω 的外部，即由 Ω 指向 Ω'，$\mathrm{int}\,\Gamma$ 及 $\mathrm{ext}\,\Gamma$ 分别表示 Γ 的内侧及外侧，

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\mathrm{int}\Gamma} - \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\mathrm{ext}\Gamma},$$