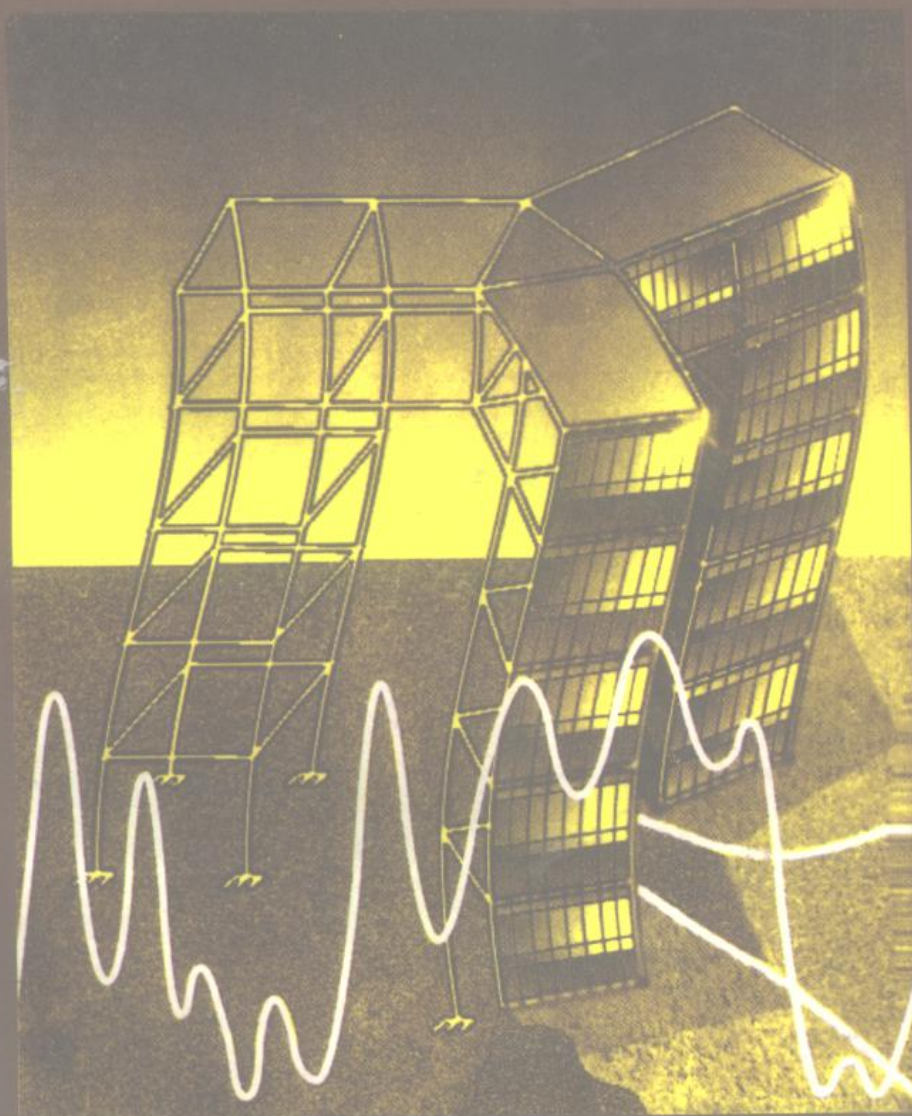


结构随机振动

庄表中 梁以德 张佑启 编著



国防工业出版社

0323
2-4

381834

结构随机振动

庄表中 梁以德 张佑启 编著



国防工业出版社

· 北京 ·

(京)新登字 106 号

图书在版编目(CIP)数据

结构随机振动/庄表中等编著. —北京:国防工业出版社,1995.3

ISBN 7-118-01370-6

I. 结… II. 庄… III. 结构振动-随机振动 IV. ①0327
②0324

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 11199 号



国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 15 1/4 353 千字

1995 年 3 月第 1 版 1995 年 3 月北京第 1 次印刷

印数:1 2000 册

定价:20.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

前言

本书是过去十几年里作者们在科学研究中的成果和解决工程问题积累的资料以及讲授结构动力学和随机振动等课程中的收获按照学科系统组合成的著作,本书特点是内容深入浅出、理论严密、思想新颖、涉及知识面广、始终注意工程中的应用。

本书分三部分共十三章,每部分均有主要文献,前十章均有习题,书末有附录、习题答案。第一部分有四章,为了照顾对随机振动有关的基础知识尚不熟悉的读者,因而十分简洁地介绍了随机振动的特征,振动问题的模型,系统动态特性的表示方法,有限元法在结构振动方程中的应用,概率统计在结构力学中的应用与随机过程各域信息。这部分中的例题习题在风格上不同于数学著作中的题目,而是结合随机振动的实例进行分析计算,会使读者面貌一新。第二部分有六章是讲随机振动理论和应用,主要对线性系统受平稳随机激励的振动按输入、输出的多少进行分类,十分紧凑地导出了随机振动的激励、系统、响应三者关系,这些关系以代数形式出现,让工程师们使用也十分方便。这部分中为了迎合研究确定性振动时的传统习惯,又按自由度由少到多安排了单自由度、多自由度、弹性体系统各章,着重讨论应用并对实例进行分析;还对非平稳激励引起的非平稳随机振动和非线性系统发生的随机振动进行了介绍并附有应用例题,这样,本书较全面地把结构随机振动理论中主要的和基本的原理、公式、方法、应用实例都介绍给读者。第三部分有三章,专门介绍工程中的随机振动问题,按风振、地震和振动控制分章;由这些章的内容可见,将随机振动理论充分应用于结构工程之中,能解决的问题既广泛又深入,概念清楚、精确度高、更符合工程实际。

本书得到香港裘槎基金会资助。张佑启教授最初制定内容时得到梁以德教授和庄表中教授的支持,在共同研究和合作下完成了全书。之所以能够完成此书还要感谢郭大江博士的协助和黄坚女士的描图打字等许多工作;我们十分感谢许多朋友和学者的建议,感谢构成这个研究领域的很多著者,感谢本书参考文献中列出的各位作者。

1. 绪论	1
2. 随机振动的特征	10
3. 振动问题的模型	20
4. 系统动态特性的表示方法	30
5. 有限元法在结构振动方程中的应用	40
6. 概率统计在结构力学中的应用	50
7. 随机过程各域信息	60
8. 线性系统受平稳随机激励的振动	70
9. 非线性系统发生的随机振动	80
10. 非平稳激励引起的非平稳随机振动	90
11. 风振	100
12. 地震	110
13. 振动控制	120
附录	130
习题答案	140

目 录

第一篇 有关的基本知识

第一章 绪论	1
1.1 随机振动的特征	1
1.2 随机振动的发展概况	2
1.3 振动问题的模型	2
1.4 系统动态特性的表示方法	5
习题	10
第二章 有限元法在研究振动问题中的应用	13
2.1 引言	13
2.2 有限元法分析的基本步骤	13
2.3 单元的运动方程	14
2.4 单元坐标系转换为全系统的坐标系	16
2.5 各物理量在总体坐标系中的表示	18
2.6 全系统的振动方程	20
2.7 结构振动的综合分析	26
2.8 八音盒音片振动频率的计算	27
习题	32
第三章 概率和统计在振动力学中的应用	34
3.1 随机变量及概率分布函数	34
3.2 一维概率密度函数及其类型	35
3.3 多维随机变量的概率密度函数	38
3.4 随机变量的数字特征	41
3.5 复随机变量	45
3.6 高斯分布的一些特性	45
3.7 随机变量的代数运算	48
习题	51
第四章 随机过程及其各域信息	54
4.1 随机过程的概念	54
4.2 随机过程在时域和幅域的描述	55
4.3 相关函数	56
4.4 平稳随机过程和各态历过程	59
4.5 平稳随机过程的谱表示	64

习题	71
----------	----

第二篇 随机振动的理论与应用

第五章 随机振动响应各域信息的计算公式	73
5.1 引言	73
5.2 计算响应平均值的公式	74
5.3 响应的自相关函数	75
5.4 响应的自功率谱密度函数	76
5.5 响应均方值的计算方法	77
5.6 互相关函数	78
5.7 互谱密度函数	79
5.8 多输入多输出线性振动系统响应各域信息计算公式的矩阵表示	80
习题	86
第六章 单自由度线性系统的平稳随机振动	89
6.1 引言	89
6.2 初始条件是随机时的振动响应	89
6.3 系统受基础运动随机激励	90
6.4 系统受随机激励时的受迫振动	93
6.5 单自由度小阻尼系统有共振型态时计算响应的近似法	94
6.6 响应概率特征的实际应用	96
习题	97
第七章 多自由度线性系统的平稳随机振动	99
7.1 两自由度线性系统的平稳随机振动	99
7.2 多自由度线性系统的平稳随机振动	103
7.3 计算响应均方值的数值积分法	107
习题	111
第八章 弹性体的随机振动	114
8.1 引言	114
8.2 弦的随机受迫振动	114
8.3 梁的随机振动	119
8.4 薄板的随机振动	128
习题	130
第九章 非平稳随机振动	132
9.1 引言	132
9.2 单自由度系统的动态挠度和稳态挠度	133
9.3 慢变的平稳随机过程	135
9.4 有关的积分公式	136
9.5 部分分式	136

9.6 计算举例	137
9.7 复合指数调制的函数	142
9.8 多自由度线性系统的非平稳随机振动	143
9.9 斜拉桥缆索的非平稳随机振动	144
9.10 控制斜拉杆动应力的方法	148
习题	150
第十章 非线性系统的随机振动概述	151
10.1 引言	151
10.2 马尔柯夫过程	153
10.3 解非线性随机振动问题的 FPK 方程	155
10.4 多维马尔柯夫随机过程的 FPK 方程	163
10.5 解非线性系统随机振动的其它方法简介	167
习题	168

第三篇 工程中的随机振动问题

第十一章 结构随机风振	170
11.1 引言	170
11.2 风对结构形成的风压	170
11.3 顺风向脉动风的概率特征	174
11.4 结构顺风向随机风振响应	177
第十二章 结构受地震的响应分析	180
12.1 引言	180
12.2 关于地面运动的描述	180
12.3 用振子响应谱计算结构的地震响应	185
12.4 用随机振动理论计算结构受地震的响应	190
12.5 对地震响应影响的其它问题	194
第十三章 结构振动的控制	197
13.1 引言	197
13.2 振源的类型与分析	200
13.3 积极隔振	200
13.4 消极隔振	205

附录

附录 A~附录 J	213
参考文献	226
习题答案	229

第一篇 有关的基本知识

第一章 绪 论

1.1 随机振动的特征

物体在平衡位置附近的往复运动称为振动。振动是普遍存在的自然现象,这种现象在日常生活中经常遇到,如钟表的摆动、车辆行驶中的颠簸、心脏的跳动等,还在各个工程领域中也常常遇到,如大风对高层建筑物的作用、海浪对船舶和近海工程的作用、车辆对柔索桥的作用等都会发生振动,这些实际物体的振动在设计阶段就必须予以考虑,否则不能保证建造对象的安全、可靠和使用优良。



图 1.1

若从上述这些实际振动问题的数学性质之不同进行分类,可分为确定性振动和随机振动两类。

确定性振动,指那些用确定的数学关系式表示振动过程中力与运动量之间关系和运动规律的振动。例如图 1.1 所示钟摆,若将钟摆偏离竖直的平衡位置 θ_0 ,以后自由释放,则摆将作自由振动,振动微分方程为

$$J\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \quad (1.1)$$

在(1.1)式中 J 是转动惯量,当摆角较小时,取 $\sin\theta \approx \theta$,则钟摆的运动规律为

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left[\sqrt{\frac{mgl}{J}} t + \varphi \right] \quad (1.2)$$

由此式可确定钟摆在任意时刻 t 的位置 $\theta(t)$,也可以知道此时刻的角速度 $\dot{\theta}(t)$ 与角加速度 $\ddot{\theta}(t)$,除了上面(1.1)、(1.2)两式是确定性的以外,振幅 θ_0 、圆频率 $\omega_0 = \sqrt{mgl/J}$ 、周期 $T = 2\pi/\sqrt{mgl/J}$ 、初相位 φ ,这些有意义的物理量也都是确定性的,这类确定性振动是传统的振动理论^[1,2]所研究的内容,至今已有 200 年的历史,许多问题已研究得相当深入,应用也十分广泛。

随机振动指不能用确定性函数描述运动规律,必须用概率、统计方法表述随机过程重要特征的一种振动。例如,由于道路高低的不规则性,使车辆在行驶中发生颠簸,这种振动不可预测,在相同条件下也不重复,具有明确的随机性,即车辆在行驶中的竖向位移、速度、加速度、振动频率、周期等都不是确定性的量而是随机变量。

随机性是自然界与人为现象所固有的,但随机性的程度则各有不同。当随机性程度较小时,人们近似地把它放在确定性范畴内处理,即(1.1)、(1.2)两式中的量均用平均值替代,而不计较平均值附近的变化,用这种方法所得结果仅是一种估算。当随机性程度不是

较小时(如汽车行驶振动、飞机滑跑振动等)或需要高精度描述结构振动的性态(如航天飞机的响应、水下发射的导弹离开水面的时刻等),或机理尚不清楚的研究工作(如结构随机疲劳的寿命预估、脑电波的处理等)则必须用随机过程理论而不能用确定性振动理论,这些必须用随机振动方法处理的振动问题,若从 1959 年左右算起至今仅有 30 几年历史^[3~7],还有很多问题需要研究和推广应用。

1.2 随机振动的发展概况

概率方法的核心是对不确定性问题进行系统处理,早期不确定性问题的定量工作发生在赌博方面,后期在产品检验上有大量的应用,导致概率理论作为一门严格的数学学科迅速发展,它包括随机变量及其推广的随机过程理论。这一理论最早被 Brown 在物理中找到了它的应用,Brown 在 1827 年观察到悬浮在液体中的极细微粒子,因连续地受到分子的碰撞而作曲折无规则的运动,随后 Einstein(1905)提出用概率的规律进行分析,用微分方程的方法得到若干结果,著名的美国控制论之父 Wiener(1923)把 Brown 运动正式作为随机过程来研究,很快地由他及其后继者把随机过程理论发展成现代的体系。随机过程理论在工程上最有意义的应用首先发生在通信领域,Rice(1944)用随机过程来处理信号中的噪声,之后,由于导弹和航天技术的发展,人们很快地认识到随机过程理论在结构、机械、电子系统中有广泛的应用,促使科技人员研究在随机振动环境中如何保证结构或机电系统具有最大的可靠性。美国最先于 1959 年和 1963 年^[3~5],在麻省理工学院举行两次国际性随机振动报告会,就随机振动的数学理论、振动引起的损坏、环境测量、结构在随机载荷下的响应、随机振动模拟试验以及其它等方面的问题提出了一些理论分析、研究方法和解决实际问题的若干途径。从此随机振动专著相继出现^[3~17],一些振动书籍也均有一章介绍随机振动^[18~20]。在 20 世纪 60 年代,由于数据整理上烦琐和费时,随机振动的研究较多停留在理论和概念上,要推广到应用于结构物、车辆系统等领域还有许多困难。自从 1965 年 Cooley 提出了 FFT 之后,在文献[21]中较完整地介绍了用 $\frac{N}{2} \lg_2 N$ 次运算代替 N^2 次运算,使运算速度发生大数量级的变化,又随着计算技术与大规模集成电路的迅速发展、信号与信息处理(如日本 7T18S, JEF-16AN, 美国 HP5423 等信号处理机)进入了一个新的阶段,国内外又有许多软件(如南京的 CRSA)用计算机直接对振动信号进行处理,这样使得宇航、车辆、建筑、结构、机构等随机振动问题得到迅速有效的分析和图象显示,已形成一门重要的学科。

1.3 振动问题的模型

1.3.1 系统的力学模型

结构和机械的振动问题是宇航、交通、机械、土建、水利等工业部门经常遇到的问题。

任何结构、机器或它们的零部件,因为都具有弹性和质量,所以都可能发生振动,称为机械振动系统,简称系统。由于系统振动时不可避免地会遇到阻尼,因此,振动系统的力学模型可看作由弹簧、质量块和阻尼器各元件按特定方式组合而成,则弹性、质量和阻尼是

振动系统的基本参数。最常见的弹性力与变形成一次方关系的弹簧称线性弹簧；若不是一次方关系的称非线性弹簧。阻尼力与速度成一次方关系的阻尼器称线性阻尼器；若不是成一次方关系的称非线性阻尼器。全部由线性元件组成的系统称线性系统，若不是全部由线性元件，即有几个或全部是非线性元件的系统称非线性系统。若系统在振动过程中各元件的参数不随时间而变的称为时不变系统(又称定常系统)；相反的称为时变系统(又称非定常系统)。若系统具有有限个集中参数元件组成时称离散系统，它的具体形式很多：如单自由度系统(质量块被弹簧悬挂的振动系统，见图 1.2)；两自由度系统(鸣钟作为双摆的振动，见图 1.3)；有限多自由度系统(建筑结构的剪切振动，见图 1.4)。若系统需无限多个独立坐标才能确定其位置的称为连续参数(或分布参数)系统，如弹性梁、板、壳、结构物的振动。

对实际问题，用科学方法抽象成与结构大体上相符合的系统模型是研究工作中的重要一步。

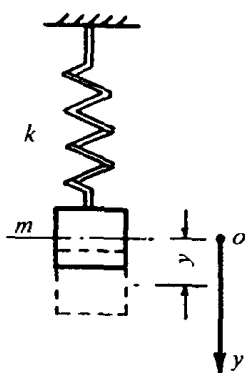


图 1.2

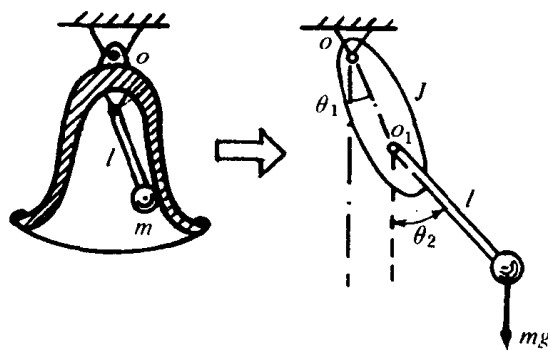


图 1.3

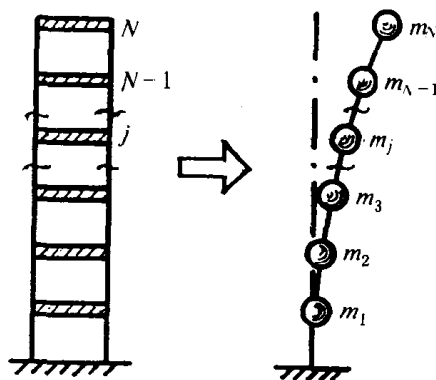


图 1.4

1.3.2 激励的数学模型

通常把作用到系统上的外来扰动称为激励(有单个或多个输入之分)，激励的物理量

可以是力、压力、位移、速度、加速度等或这些量的组合。激励的数学形式有确定性和随机性的两类,后者是随机过程,需用概率统计方法以各域信息描述,对地震、风震、海浪激励、路面颠簸均需主要用频域的信息描述。

1.3.3 响应的类型

系统对外界激励的反应称为响应(有单个或多个输出之分)。响应的各个输出可以是力、应力、应变、速度、加速度、跃变度、稳定度、灵敏度、电流、电压等及其它要研究的参数。

对于线性时不变系统受确定性激励的响应一定是确定性的函数;对于线性时不变系统受平稳随机激励的响应一定是平稳随机过程等,响应是随机过程时需用各域信息表示,响应是随机过程的振动就是随机振动。

1.3.4 激励、系统、响应之间的联系

图 1.5 表示激励、系统、响应三者关系的示意图,三者中哪一个未知的一般可分成三种类型:

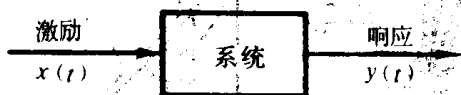


图 1.5

(1)响应“预测”问题。即激励和系统特性已知,要确定响应的各个概率特征及其它域的信息。例如未来的某级地震对结构物的影响,风激励下电视台天线铁塔的安全度和疲劳寿命预估等。

(2)激励“测量”问题。系统特性和响应已知,去推断有关激励的资料。例如探查道路(或铁路)凹凸不平度的统计特征,高大烟囱上端风激励的特征,振动系统的振源鉴别等。

(3)系统“识别”问题。激励和响应已知,需要识别、估价系统的动态特性。例如识别车辆的悬挂特性,建筑物的抗震特性以及桩柱、桥墩的故障诊断。

由于激励可以有多种形式(如确定性还是随机性?随机的又可以分为平稳的还是非平稳的?是正态分布的还是非正态分布的?……),系统也有各种类别(如线性还是非线性?时变还是时不变?),因而,不同的激励作用到不同的系统中去,经组合排列来看就有很多种情形,对每种情形就有不同的响应计算公式。一般,确定性振动是建立了激励、系统、响应三者的微分方程的形式;而随机振动虽然也可以建立微分方程的形式,确切的说是随机微分方程在数学上求解就显得烦琐,因而寻求不同情形下转化为用不同方式建立激励、系统、响应三者之间的关系;如线性时不变系统受平稳随机激励可得激励、系统、响应三者在频率域内的代数关系;非线性系统受非平稳随机激励时,可得到求响应条件概率密度的偏微分方程关系本书第八章的 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程等。

1.3.5 机—电模拟

目前,利用电路来模拟机械振动已相当成功,对离散系统的模拟精度已相当高,但对分布参数系统,一般还不能精确模拟。

用电路模拟力学系统并建立与力学模型等效的电路给研究工作带来许多方便。力学中的弹性(k)元件、阻尼(c)器和质量(m)块对应着电学中振荡线路的电容(c)元件、电阻

(R)元件以及电感(L)元件,图 1.6(a)为一机械的并联系统与图 1.6(b)为一串联电路二者等效,又机械系统中的位移、速度、力对应着电路中的电量、电流、电压。

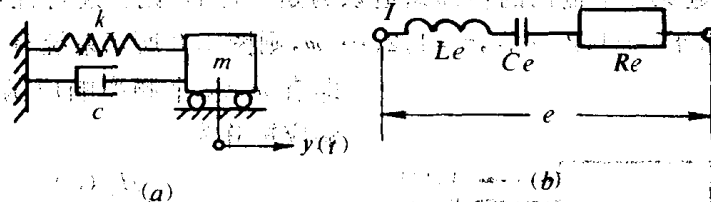


图 1.6

图 1.7(a)为两自由度机械系统模型,假定力作用在左端两个质量之间,那么图 1.7(b)便是它的等效电路。

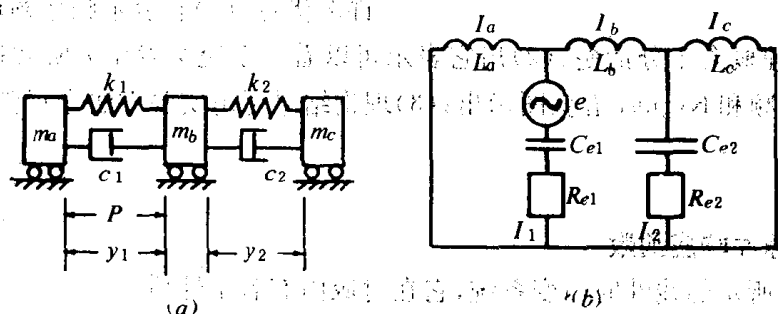


图 1.7

还可以有多自由度系统的等效电路^[22]。

1.4 系统动态特性的表示方法

1.4.1 频率响应函数

在线性时不变系统中,输入和输出之间存在着传递关系,见图 1.5。现在对具有粘性阻尼的单自由度振动系统求频率响应函数 $H(\omega)$, 振动微分方程为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x(t) \quad (1.3)$$

式中 m, c, k 分别表示质量、阻尼和刚度系数,当输入 $x(t)$ 为单位正弦激励时,即

$$x(t) = e^{i\omega t} \quad (1.4)$$

则稳态输出为输入的 $H(\omega)$ 倍,即

$$y(t) = H(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

将(1.4)式和(1.5)式代入(1.3)式,得频率响应函数

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega c} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \lambda^2 + i2\zeta\lambda} \quad (1.6)$$

式中 $\lambda = \omega/\omega_n$ 为频率比, $\zeta = c/2\sqrt{km}$ 为无量纲阻尼系数,由(1.6)式可见, $H(\omega)$ 是 λ 和 ζ 的复函数(式中有虚数 $i = \sqrt{-1}$),它的模的因次是位移与力之比,其它形式见附录

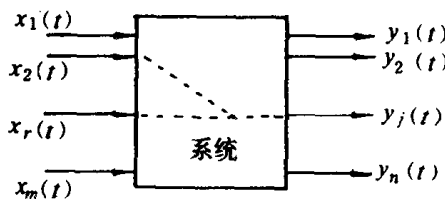
A。

若振动系统的模型为 m 个输入和 n 个输出,激励与响应之间的传递如图 1.8 所示,一般的 n 自由度系统就有这种多输出的情形,它的振动方程用矩阵形式表示,即

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{x(t)\} \quad (1.7)$$

若第 r 个输入引起第 j 个输出的传递通道认为是线性的,则传递特性可用频率响应函数表示为 $H_{jr}(\omega)$,由于 $j=1,2,\dots,n, r=1,2,\dots,m$,则图 1.8 所示系统有 $m \times n$ 个传递通道,

即有 $m \times n$ 个频率响应函数,它们构成频率响应矩阵为



$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & \cdots & H_{1m}(\omega) \\ \vdots & H_{jr}(\omega) & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & \cdots & H_{nm}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

图 1.8

以频率响应函数表示系统的动态特性有

许多优点:(1)它表示频率领域内阐明系统的动态特性,物理概念十分清楚;(2)用它表示可以看出系统会发生 n 阶共振,且可用幅频、相频、虚频、实频和 Nyquist 五张图示出;(3)理论结果可用实验方法进行验证。因而受到工程界的欢迎。

1.4.2 脉冲响应函数

对图 1.5 所示的线性时不变系统,它在时域内有若干性质:

(1)若输入 $x(t)=x_1(t)$,则输出 $y(t)=y_1(t)$;若输入延滞了时间 τ ,即 $x(t)=x_2(t+\tau)$,则输出也一定延滞了时间 τ ,即 $y(t)=y_2(t+\tau)$ 。这个性质可以从方程(1.3)式得到证明,它说明输入对系统作用引起的结果与输入的起始时刻无关,只与输入的起始时刻到给定观察时刻之间的时间间隔有关。

(2)叠加原理是适用的,即以 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ 作为输入,则输出为 $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ 。

(3)若输入 $x(t)=\delta(t)$ (见附录 B),则响应为 $y(t)=h(t)$ 称为脉冲响应函数,见图 1.9(a)、(b)所示。 $h(t)$ 完全取决于系统的物理参数(m, k, c)。

(4)若系统受任意输入 $x(t)$,见图 1.9(c),可用一组直方图来逼近,在一个无限小微段 $d\tau$ 上具有量值 $x(\tau)$,而其余地方为零时,则可以看成为一个数量等于 $x(\tau)d\tau$ 的脉冲,此时系统的响应为 $h(t-\tau) \cdot x(\tau)$ 。由于实际作用的输入 $x(t)$ 可以看作许多小矩形的累加作用,则根据叠加原理,系统的总输出 $y(t)$ 为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau \quad (1.9)$$

上式就是著名的杜哈曼积分。由此式也可以看出 $h(t)$ 起着传递的作用,所以 $h(t)$ 是在时域内描述系统动态特性的一种形式,而且还可以看出(1.9)式表示了激励 $x(t)$ 和系统 $h(t)$ 与响应 $y(t)$ 三者之间的积分关系。

对图 1.8 所示的多输入多输出系统,第 r 个输入到第 j 个输出的传递通道以脉冲响应函数 $h_{jr}(t)$ 表示,则有矩阵

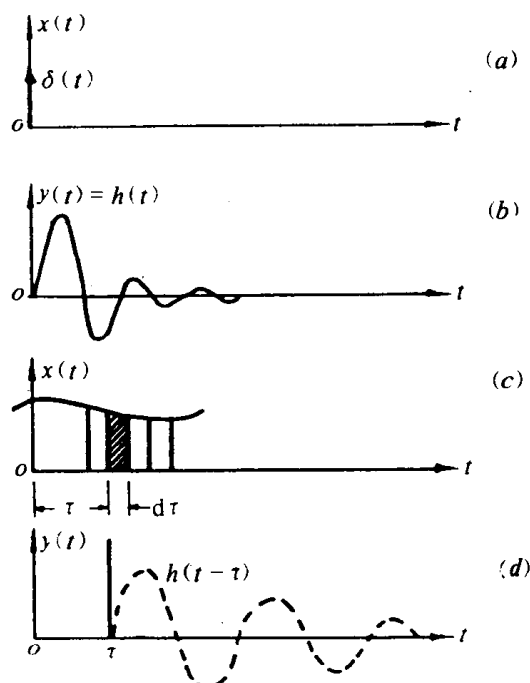


图 1.9

$$[h(t)] = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & \cdots & h_{1m}(t) \\ \vdots & h_{jr}(t) & \vdots \\ h_{n1}(t) & \cdots & h_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

脉冲响应函数和频率响应函数都能表示线性系统的动态特性,两者存在着富里哀变换的关系^[23],因而可以互求,即

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.11)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.12)$$

或矩阵形式

$$[H(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t)]e^{-i\omega t} dt \quad (1.13)$$

$$[h(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega)]e^{i\omega t} d\omega \quad (1.14)$$

上面式中系数 $\frac{1}{2\pi}$ 的放置方法,各著作上有不同的形式。

例 1.1 刚柱受冲击波作用,可看作一单自由度振动系统,已知此刚性柱体对于垂直图面并通过 O 点的轴的惯性矩为 J 。其它尺寸及物理量符号见图 1.10 所示,求表征此系统动态特性的频率响应函数和脉冲响应函数。

[解] 设冲击波对刚柱绕 O 点的力矩为 $M(t)$,则系统为单自由度,它的振动方程式为

$$J_0 \ddot{\varphi} + Cl^2 \dot{\varphi} + kl^2 \varphi = M(t) \quad (a)$$

设 $M(t) = e^{i\omega t}$, 则 $\varphi(t) = H_\varphi(\omega)e^{i\omega t}$, 经代入上式得频率响应函数

$$H_\varphi(\omega) = \frac{1}{kl^2 - J_0\omega^2 + i\omega cl^2} \quad (b)$$

脉冲响应函数为

$$\begin{aligned} h_\varphi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{kl^2 - J_0\omega^2 + i\omega cl^2} \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 + \zeta^2} J_0} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \end{aligned} \quad (c)$$

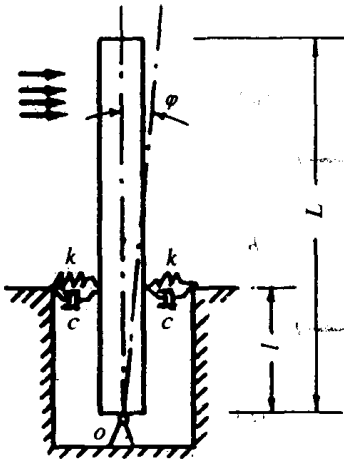


图 1.10

式中 $\omega_n = \sqrt{kl^2/J_0}$, $\zeta = cl^2/2\omega_n J_0$.

例 1.2 图 1.11(b) 所示, 滑车 (假设无质量) 以弹簧和阻尼器与两个动基础相连, 若

基础的运动分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 求此系统的

频率响应矩阵。此系统模型的实际问题, 如: 潜艇内的悬挂物, 由于艇壳上下端受海浪激励发生位移分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 求悬挂物的振动; 飞机机身受湍流激励, 机身主骨架顶部及底部分别以不同方式进行振动等。

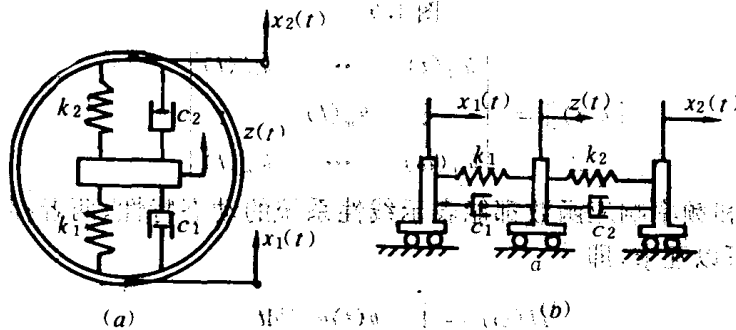


图 1.11

[解] 此例研究对象为小车 (假设无质量) a , 它受到二个输入、一个输出, 则运动方程按力平衡为

$$k_1(z - x_1) + c_1(\dot{z} - \dot{x}_1) = -k_2(z - x_2) - c_2(\dot{z} - \dot{x}_2) \quad (a)$$

对上式经过整理得

$$(c_1 + c_2)\dot{z} + (k_1 + k_2)z = k_1x_1 + c_1\dot{x}_1 + k_2x_2 + c_2\dot{x}_2 \quad (b)$$

分别求二个频率响应函数, 首先设 $x_1 = e^{i\omega t}$, $x_2 = 0$, 则

$$z = H_{z1}(\omega)e^{i\omega t} \quad (c)$$

经代入 (b) 式, 得 x_1 激励引起小车响应 z 的频率响应函数为

$$H_{z1}(\omega) = \frac{k_1 + i\omega c_1}{k_1 + k_2 + i(c_1 + c_2)\omega} \quad (d)$$

再设 $x_2 = e^{i\omega t}$, $x_1 = 0$, 则

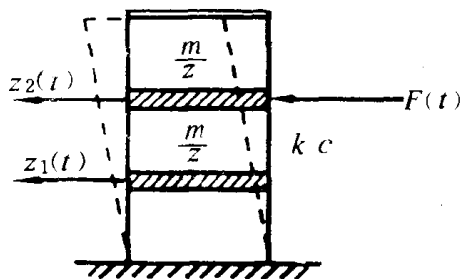


图 1.12

例 1.3 图 1.12 所示三层楼建筑物, 质量各一半分布在第三层和第二层, 各层之间抗剪刚度均相等, 求在第三层楼板上受力激励 $F(t)$ 后, 对第二层楼板绝对位移 $z_1(t)$ 的频率响应函数。

[解] 本题属于两自由度剪切振动, 受单个输入 $F(t)$, 系统的方程为

$$\begin{cases} \frac{m}{2} \ddot{z}_1 = -c\dot{z}_1 - kz_1 + k(z_2 - z_1) + c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \\ \frac{m}{2} \ddot{z}_2 = -c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k(z_2 - z_1) + F(t) \end{cases} \quad (a)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + 2\zeta\omega_n \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \omega_n^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \frac{2}{m} \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} \quad (b)$$

式中 $\omega_n = 2k/m$, $\zeta = c/\sqrt{2mk}$, 设 $F(t) = e^{i\omega t}$, 则

$$\begin{cases} z_1(t) = H_{z_1 F}(\omega) e^{i\omega t} \\ z_2(t) = H_{z_2 F}(\omega) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (c)$$

经代入(b)式后, 得

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 4i\zeta\omega\omega_n + 2\omega_n^2 & -2i\zeta\omega\omega_n - \omega_n^2 \\ -2i\zeta\omega\omega_n - \omega_n^2 & -\omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{z_1 F}(\omega) \\ H_{z_2 F}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2}{m} \end{Bmatrix} \quad (d)$$

可解得 $F(t)$ 对 $z_1(t)$ 的频率响应函数为

$$H_{z_1 F}(\omega) = \frac{2}{m\omega_n^2} \frac{2i\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + 1}{\left[-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 4i\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + 2 \right] \left[-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right] - \left(2i\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right)^2}$$

1.4.3 阶跃响应函数

若系统所受激励为图 1.9(c) 的特殊情形, 即

$$x(t) = \mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

见图 1.13 所示, 则此时系统的响应称为阶跃响应函数, 记作 $k(t)$, 参照(1.9)式

$$k(t) = \int_{-\infty}^t \mu(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (1.15)$$

因为 $\tau < 0$ 时 $\mu(\tau) = 0$, 故上式可化为

$$k(t) = \int_0^t \mu(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1.16)$$

而当 $\tau > 0$ 时, $\mu(\tau) = 1$, 故

$$k(t) = \int_0^t h(t - \tau) d\tau \quad (1.17)$$

若令 $t - \tau = \theta$, 则有

$$k(\theta) = - \int_0^t h(\theta) d\theta \quad (1.18)$$

上式表示了阶跃响应函数和脉冲响应函数之间存在的关系, 所以说, 阶跃响应函数也可以表示系统的动态特性。

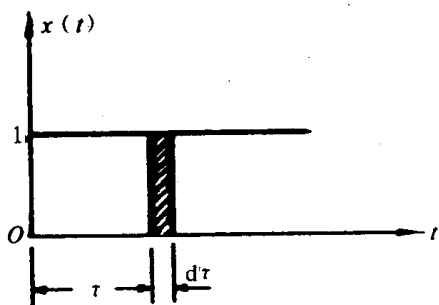


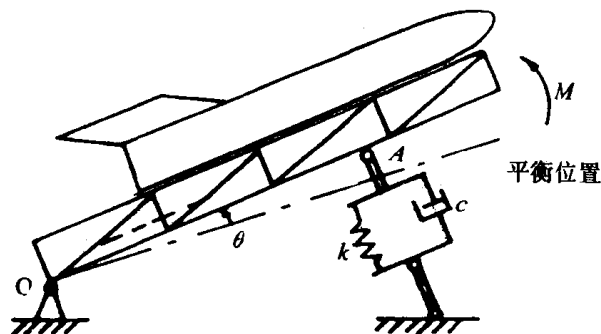
图 1.13

对图 1.8 所示多输入多输出系统, 第 r 个输入到第 j 个输出的传递通道也可以用阶跃响应函数 k_{jr} 表示, 所以有矩阵

$$[k(t)] = \begin{bmatrix} k_{11}(t) & \cdots & k_{1m}(t) \\ \vdots & k_{jr}(t) & \vdots \\ k_{n1}(t) & \cdots & k_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

习 题

1.1 导弹发射架 OA 绕 O 点的转动惯量为 J_0 , 在 A 点用刚度系数为 k 、阻尼系数为 c 的构架支撑, 已知 $OA=l$, 导弹起飞时发射架受扰动发生的激励力矩为 M , 若研究的响应为发射架的转角 θ , 求此系统的脉冲响应函数和频率响应函数。



习题图 1.1