充液刚体动力学

[苏] H.H 莫依舍夫
B.B 鲁苗采夫 著
韩子鹏 译

宇航出版社

充液刚体动力学

［苏］ H.H 莫依舍夫
B.B 鲁苗采夫 著
韩子鹏 译

宇 航 出 版 社

（京）新登字 181 号

内 容 简 介

本书是在充液刚体动力学领域中的一本专著，书中系统而全面地介绍了充液刚体动力学的主要问题。全书共分两大部分，第一部分讲述充液刚体的动力学和运动稳定性，包括充液刚体运动方程的建立、最简单的运动情况、充液刚体对部分变量的运动稳定性和稳态运动稳定性等四章；第二部分讲述充液刚体和腔内液体的振动，其中包括振动理论问题的提法和一些简单的振动例子、振动方程的一般特性、液体表面效应的影响和粘性液体及充粘液刚体的振动等五章。

对于许多涉及充液刚体运动的科技领域，例如对充液卫星，液体燃料火箭，充液炮弹和炸弹，水中的油船，带油箱的飞机……等运动特性和稳定性的研究都要用到充液刚体动力学的知识。由于本书内容丰富，系统性强，理论严格，推导详细，故是从事这些技术领域充液刚体运动理论研究和应用研究的一本极好的入门书和参考书。

[redacted]力学

[redacted]依舍夫

[苏[redacted]

B. [redacted]

[redacted] 译

责任编辑：张家新

*

宇航出版社出版发行

北京和平里滨河路 1 号（100013）

发行部地址：北京阜成路 8 号（100830）

各地新华书店经销

南京理工大学印刷厂印刷

*

开本：850 × 1165　1/32 印张：10.75 字数：280 千字

1992 年 10 月第 1 版第 1 次印刷　印数：1 －1000 册

ISBN 7-80034-696-X/O.018　定价：5.80元

前　言

“充液刚体动力学”是一门理论艰深而又十分有趣的科学，早在上一世纪起就有许多著名的数学力学家作过研究，例如开尔文、亥姆霍茨、斯托克斯、格林希尔……等以及后来的李雅普诺夫、儒可夫斯基、莫依舍夫、鲁苗采夫、斯图尔森等。但早期的研究基本上是纯理论的探讨，实际应用较少，只是近几十年来由于出现了许多充液运动体，特别是充液飞行器，例如水中的油船，飞机的油箱，液体燃料火箭，充液炮弹和炸弹、充液卫星……等，促进了对此问题的研究，同时也使这个力学分支有了广泛的实际应用价值。在一些国家里已有许多学者从事这一课题的研究，有的甚至设计了专门试验装置（例如充液陀螺试验台）进行实验研究。我国开展这一问题研究的时间较晚，但近十几年已有了较大的发展，并被国家列入需进一步研究的高技术范畴。

液体在刚体容腔内的运动受到刚体运动的影响，反过来它又影响刚体的运动，故充液刚体是十个分复杂的力学系统。在理论上它涉及到流体力学和刚体力学的许多方面，国内外已有不少学者撰文探讨此领域中的一些问题，但目前只发现原苏联学者 A. A 莫依舍夫和 B. B 鲁苗采夫所著《充液刚体动力学》是一本系统而全面讲述这一专题的书籍。尽管该书出版年代较早，目前有关充液刚体运动规律的研究也有了新的发展，但此书仍不失为进行此课题研究的入门书籍和重要的参考文献。该书在出版后三年即被译成英文。由于科研工作需要，我们在参考此书时已将其译出，为使这项工作有意义，现将其出版，供从事这一课题研究的同志参考。

在出版此书时得到宇航出版社邱光纯副总编的大力支持，洪

友诚、帅家其教授，余春华讲师在百忙之中为本书在技术上进行了审校，张燕萍、王光净小姐承担了本书的排版打印，在此特向这些同志表示衷心的感谢。由于译者水平所限，错误缺点在所难免，敬请读者不吝指教。

译者

1992年10月

目　录

第一部分

充液刚体的动力学和稳定性

第一章　充液刚体的运动方程

本章将充液刚体作为一个力学系统看待并导出其运动方程。以哈密顿-奥斯特洛格拉德斯基（Гамилътон—Остроградский）最小作用原理作为动力学基础。动力学问题的变分表述具有一些明显的优点，例如，从建立所导出方程和边界条件的必要性和充分性观点上讲，将刚体和液体作为一个系统研究可以达到十分简练的程度。本章将解释以各种不同形式，特别是以拉格朗日（Лагранж）方程形式表示的方程组的力学意义，还要研究运动方程的求解以及这些解成立的条件，最后研究充有粘性液体的充液刚体运动方程。

§1　哈密顿-奥斯特洛格拉德斯基原理

众所周知，哈密顿-奥斯特洛格拉德斯基最小作用变分原理可以作为完整系统的力学基础，按照这个原理，对于具有理想几何约束的任何力学系统的实际运动有下式成立

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\sum_{\nu}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}'_\nu)\mathrm{d}t=0 \tag{1.1}$$

在这里以及以后都用 t 表示时间，t_0 和 t_1 为积分限，T 为系统的动能，$\boldsymbol{F}_\nu$ 是给定的、作用在第 ν 个点上的主动力向量，并且求和遍及系统所有的点。$\boldsymbol{r}'_\nu=\sum_{i=1}^{3}x'_{\nu i}\boldsymbol{i}'_i$ 是系统中任一点相对于某个固定直角坐标系（惯性坐标系）$O'x'_1x'_2x'_3$ 原点 O' 的径矢。平行于 x'_s 轴的单位矢量

用 $i'_s(s=1,2,3)$ 表示。符号 δ 表示它后面相应的量在系统可能位移中的变分或改变量，任何为加在系统上的约束所允许的虚拟运动以及真实运动都是在系统的两个确定位置之间同时($\delta t=0$) 发生的。因此，在两个端点位置上，系统所有点的径矢的变分变为零，也即在 $t=t_0, t=t_1$，时 $\delta r'=0$。

式(1.1)可以从达朗贝尔—拉格朗日(Даламбер-Лагранж)原理积分得出，后者对于一切具有理想约束的质点系都是正确的。因此，哈密顿-奥斯特洛格拉德斯基原理对于任何具有完整约束并包含连续介质在内的力学系统也是正确的，故可利用它来导出充液刚体的运动方程。

我们将研究绝对刚体的运动，所谓绝对刚体是指其上任何两点之间的距离在全部时间内保持不变的刚体。再假设刚体具有一个或几个容腔，它们以同一种不可压理想液体部分填充或全填充。为简单计，以下将限于研究只有一个容腔的情况，因为对有几个容腔的情况只是应在运动方程中将与液体有关的量对所有容腔求和，而不会带来原则上的困难。以下将把刚体和液体作为一个力学系统来研究。

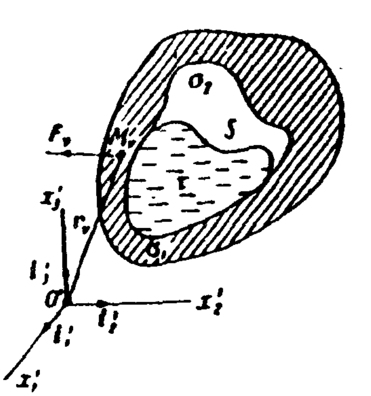

图 1

用 ρ 表示液体的密度常数，τ 为给定瞬时液体所占据空间的体积，S' 为该空间域 τ 的边界，σ 为容腔壁面。(见图1)。

显然，如果液体完全充满容腔，则 S' 与 σ 一致；如果液体仅仅是部分填充容腔，则 S' 由液体自由表面 S 和在给定瞬时液体浸润表面 σ_1 组成，σ_1 仅是 σ 的一部分，也即

$$S' = S + \sigma_1 \qquad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

式中 σ_2 为给定瞬时表面 σ 中与液体不相接触的那一部分。

在这种情况下，容腔的其余部分要么被压力为 p_0，边界面为 $S + \sigma_2$ 的空气填充，要么是压力为零($p_0 = 0$)的真空。容腔内的空气压力 p_0 可认为是常量，而质量可以忽略不计。

其次再假设表面 S' 是光滑的，或是由有限块光滑表面组成的。

因为假设液体是不可压缩的，故在它的每一点上，在任何瞬时径矢的变分均应满足不可压缩性条件

$$\operatorname{div} \delta r' = \frac{\partial \delta x'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \delta x'_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial \delta x'_3}{\partial x'_3} = 0$$

将此方程乘以拉格朗日不定乘数[1] $p(r', t)$，沿液体体积 τ 积分后再将结果加到式(1.1)中，就可将所研究的力学系统的哈密顿-奥斯特洛格拉德斯基原理写成如下形式

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta T + \sum_{\nu} F_\nu \cdot \delta r'_\nu + \int_\tau p \operatorname{div} \delta r' \mathrm{d}\tau] \mathrm{d}t = 0 \qquad (1.2)$$

符号 $\int_\tau (\cdots) \mathrm{d}\tau$ 表示对液体所占体积 τ 取的三重积分。以后还将以类似的形式来写沿某个表面 S 或某条曲线 s 所取的二重积分或曲线积分。

由分析力学知，拉格朗日乘子正比于约束反力。在现在的情况下，约束就是不可压缩性方程，因此，拉格朗日乘子 $p(r', t)$ 与流体动压力 p 是相同的，而此动压力可看作是约束反力，这就是不可压缩性条件[1,2]。

§2 运动学和矢量分析中的一些公式

除不动坐标系外，再引进一个活动直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$，其原点在刚体的某个点 O 上并且与刚体固连，此外它还与不动坐标系同为右手或左手坐标系。动坐标系三轴上的单位矢量用 $i_s(s = 1,2,3)$ 表示。系统内任一点相对于 O 点的径矢为

$$r = \sum_{s=1}^{3} x_s \boldsymbol{i}_s$$

并且

$$r'_\nu = r'_O + r_\nu \tag{1.3}$$

式中 r'_O 为点 O 相对于不动点 O' 的径矢(见图 2)。

动坐标系 $O\ x_1x_2x_3$ 的位置也就是与其相连的刚体在空间 $O'x'_1x'_2x'_3$ 中的位置，可以由矢量 $r'_O = \sum_{s=1}^{3} x'_{Os}\boldsymbol{i}'_s$ 以及定坐标系与动坐标系各轴间夹角的余弦 $\gamma_{sr} = \boldsymbol{i}'_s \cdot \boldsymbol{i}_r (s, r = 1,2,3)$ 来确定。这九个量 γ_{sr} 之间有如下的联系

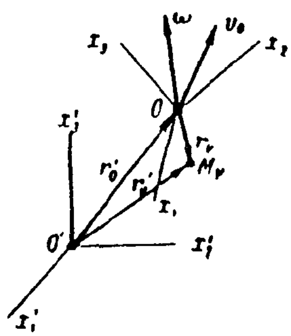

图 2

$$\sum_{r=1}^{3} \gamma_{sr}^2 = 1 \qquad \sum_{j=1}^{3} \gamma_{sj}\gamma_{rj} = 0 \qquad (s \neq r = 1,2,3)$$

因此在这九个量 $\gamma_{sr}(s, r = 1,2,3)$ 中只有三个是独立的。

以后称我们的力学系统相对于定坐标系的运动为绝对运动，而称相对于动坐标系的运动为相对运动。根据速度合成定理，系统中任意点的绝对速度矢量 v 可以表示成如下形式

$$v = v_0 + \omega \times r + u \tag{1.4}$$

式中 v_0 是 O 点的速度矢量，ω 是刚体的瞬时角速度矢量，u 是相对速度矢量。按照定义 $u = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，并且是在动坐标系里、在 $\boldsymbol{i}_s$ 固定的条件下对时间的导数。对于刚体上的点来说 $u = 0$，这是显然的。

必须提醒一下，定坐标系里的某个向量 a 对时间的导数 $(\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t})'$ 与局部导数 $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ 有如下的关系：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$$

特别是由此可见，对于定坐标系轴上的单位矢量 $\boldsymbol{i}'_s = \text{const}$，我们得到动坐标系里的泊松（Пуассон）微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'_s}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'_s = 0 \qquad (s = 1,2,3) \tag{1.5}$$

我们约定，任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 在动坐标系轴上的投影以 $a_i(i = 1,2,3)$ 表示。

从力学系统在实际运动中的瞬时位置向同一时刻系统在虚拟运动中的位置的转换，可以用赋予作为一个刚体的整个系统以无穷小平移 $\delta\boldsymbol{l}$ 和无穷小转角 $\delta\boldsymbol{\theta}$，以及赋予不可压流体质点以与 $\delta\boldsymbol{l}$ 和 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 无关的位移 $\delta_1\boldsymbol{r}(\delta x_1,\delta x_2,\delta x_3)$ 来实现。符号 δ_1 表示在 $\boldsymbol{i}_s(s = 1,2,3)$ 固定条件下的变分。显然，§1中在定坐标系里写出的不可压方程根据式(1.3)等价于下面的方程

$$\mathrm{div}\delta_1\boldsymbol{r} = \sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\,\delta x_s}{\partial x_s} = 0$$

用 $\boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}$ 表示刚体在虚拟运动中的平移速度和角速度矢量，我们将得到 $\delta\boldsymbol{v}_0$ 和 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 用 $\delta\boldsymbol{l}$ 和 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 表示的表达式。用 $\boldsymbol{i}_s^*$ 表示虚拟运动中动坐标系的单位矢量并且 $\boldsymbol{i}_s^* = \boldsymbol{i}_s + \delta\boldsymbol{i}_s$，$\delta\boldsymbol{i}_s = \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{i}_s(s = 1,2,3)$，见图 3。则，例如，在虚拟位置处矢量 $\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}$ 在 x_1 轴上的投影为

$$\omega_1 + \delta\omega_1 = (\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{i}_1^* = \omega_1 + \omega_2\delta\theta_3 - \omega_3\delta\theta_2 + \frac{\mathrm{d}\delta\theta_1}{\mathrm{d}t}$$

因为精确到二阶小量，故

$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1^* = 1 \quad \boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_1^* = \delta\theta_3 \quad \boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_1^* = -\delta\theta_2 \quad \delta\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{i}_1^* = \delta\theta_1$$

类似地还可得到其它两个等式，从这些等式得出矢量 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 的表达式

$$\delta\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \delta\boldsymbol{\theta} \tag{1.6}$$

令 $\boldsymbol{r}'_O + \delta\boldsymbol{r}'_O$ 是物体在虚拟运动中 O 点的径矢，则例如有

$v_{01} + \delta v_{01}$

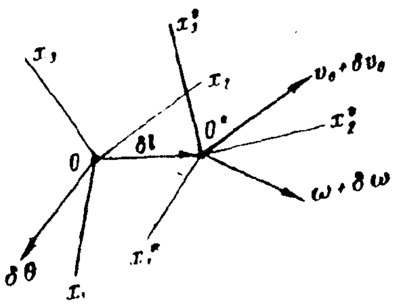

图 3

$$= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}'_O}{\mathrm{d}t}\right)' \cdot \boldsymbol{i}_1^*$$

$$= v_{01} + v_{02}\delta\theta_3 - v_{03}\delta\theta_2 +$$

$$\omega_2\delta l_3 - \omega_3\delta l_2 + \frac{\mathrm{d}\delta l_1}{\mathrm{d}t}$$

因为只精确到二阶小量，故

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_O}{\mathrm{d}t}\right)' \cdot \boldsymbol{i}_1^*$$

$$= v_{01} + v_{02}\delta\theta_3 - v_{03}\delta\theta_2$$

$$\delta\boldsymbol{r}'_O \cdot \boldsymbol{i}_1^* = \delta l_1$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}'_O}{\mathrm{d}t}\right)' \cdot \boldsymbol{i}_1^* =$$

$$\frac{d\,\delta l_1}{d\,t} + \omega_2\delta l_3 - \omega_3\delta l_2$$

类似地可得到其它两个等式，由这些等式就得出矢量 $\delta\boldsymbol{v}_O$ 的表达式

$$\delta\boldsymbol{v}_O = \frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \delta\boldsymbol{l} + \boldsymbol{v}_O \times \delta\boldsymbol{\theta} \tag{1.7}$$

我们指出，式 (1.6) 和 (1.7) 也可用 另外的方法求得，例如可令虚坐标 δl_i 和 $\delta\theta_i$ 变分的导数与虚速度 δv_{Oi} 和$\delta\omega_i$[3] 相等来求得。由等式 (1.3) 得到 $\delta\boldsymbol{r}' = \delta\boldsymbol{r}'_O + \delta\boldsymbol{r}$，但因 $\delta\boldsymbol{r}'_O = \delta\boldsymbol{l}$ 故

$$\delta\boldsymbol{r} = \sum_{S=1}^{3}(x_S\delta\boldsymbol{i}_S + \delta x_S\boldsymbol{i}_S) = \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r} + \delta_1\boldsymbol{r}$$

所以

$$\delta\boldsymbol{r}' = \delta\boldsymbol{l} + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r} + \delta_1\boldsymbol{r} \tag{1.8}$$

下面再介绍一些要常用到的矢量分析公式，以供参考[4]。

令 S' 为任意一个有界域 τ 的封闭面。假设 S' 是光滑曲面或是由有限块光滑曲面组成，其中每一块都有连续的法线和曲率。又设在域 τ 内给定某两个单值、有界、对坐标具有一阶连续偏导数的矢量函数 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 和标量函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$，则有高斯 - 奥斯特洛格拉德斯基定理成立。

通过封闭面的矢量通量等 于矢量散度的体积分

$$\int_{S'} a_n dS = \int_\tau \mathrm{div}\,a\, d\tau \tag{1.9}$$

式中$a_n = a \cdot n$是矢量a在表面S'外法线方向上的投影，外法线方向由单位矢量n确定。特别是还有如下的公式

$$\int_{S'} \varphi n_i dS' = \int_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\tau \qquad \int_{S'} n_i dS = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

此外又设在区域τ内给定连续的、并且具有二阶连续导数的标量函数$\varphi(r)$和$\psi(r)$，在此条件下格林(Грин)定理成立。格林第一定理的公式为

$$\int_\tau (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi) d\tau + \int_\tau \varphi \Delta\psi d\tau = \int_{S'} \varphi \frac{d\psi}{dn} dS \tag{1.10}$$

格林第二定理的公式为

$$\int_\tau (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) d\tau = \int_{S'} \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right) dS \tag{1.11}$$

式中$\nabla = \sum_{S=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_S} i_S$为哈密尔顿（Гамильтон）算子，并且$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi$，$\Delta = \sum_{S=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_S^2}$为拉普拉斯(Лаплас)算子，$\frac{d\varphi}{dn} = \sum_{S=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_S} n_S$是函数$\varphi$沿法线$n$的导数。

现在我们研究由封闭曲线(边界线)s限定的某个表面S，并给封闭曲线s记上一个确定的绕行方向。对每一个表面元dS建立法线n，法线n的方向这样确定，使它能与边界线的绕行方向一起构成与坐标系相同的右手系。此时有斯托克斯(Стокс)定理成立，即

$$\int_s \mathrm{rot}_n a\, dS = \int_s a \cdot dS \tag{1.12}$$

式中矢量a的旋度由下式确定

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\, a &= \nabla \times a \\ &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) i_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) i_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) i_3\end{aligned}$$

等式右边的积分称为矢量a的环量。

斯托克斯定理有如下推论：