高等學校教學用書

微積分學教程

第一卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥爾茨著
楊弢亮 葉彥謙譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥爾茨（Г. М. Фихтенгольц）著“微積分學教程”（Курс дифференциального и интегрального исчисления）第一卷1951年第三版（修訂版）譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立綜合大學數學系教學參考書。

本書第一卷中譯本分二分册出版。第二分册的內容是多元函數、函數行列式及其應用、以及微分學在幾何上的應用，末附以函數推廣的問題，由同濟大學楊弢亮及南京大學葉彥謙合譯。

本書第一卷第一分册、第二卷第一分册、第三卷第一、二分册由商務印書館出版，其餘各册改由本社出版。

微 積 分 學 教 程

第一卷 第二分册

書號229（課207）

菲 赫 金 哥 爾 茨 著

楊 弢 亮 葉 彥 謙 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

新 華 書 店 總 經 售

京 華 印 書 局 印 刷

北京南新華街甲三七號

開本 850×1092 1/28 印張 19 字數 249,000

一九五五年一月北京第一版 印數 1—5 000

一九五五年一月北京第一次印刷 定價¥ 15,000

第二分册目次

第五章　多元函數

§ 1. 基本概念

§ 2. 連續函數

§ 3. 多元函數的導數及微分

§ 4. 高級導數及高級微分

§ 5. 極值 最大值及最小值

第六章 函數行列式及其應用

§ 1. 函數行列式的性質

§ 2. 隱函數

§ 3. 隱函數理論的應用

§ 4. 換元法

第七章　微分學在幾何上的應用

§ 1. 曲線及曲面的解析表示法

§ 2. 切線及切面

§ 3. 曲線的相切

§ 4. 曲率

附錄 函數推廣的問題

微積分學教程

第五章　多元函數

§1　基本概念

149. **變量之間的函數關係、例題**　迄今為止我們祇研究過二變量的共同變動，但二變量之間存在着函數關係：由自變量的數值已能完全決定因變量或函數的數值。然而在科學上及生活上常會遇見出現有幾個自變量的情形，於是要想確定函數的數值，就必須先確定所有這些自變量在同一個時候各自所取的數值。

1）例如，圓柱體的體積 V 是它的底半徑 R 及高 H 的函數；這些變量之間的關係用公式

$$V=\pi R^2H$$

表示着。由這公式，若已知自變量 R 及 H 的數值，就可以決定對應的 V 的數值。

圓錐台的體積 V 顯然是三個自變量：兩底的半徑 R 及 r 以及高 H 的函數，表示這函數的公式是：

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

2）按照歐姆定律，電路中的電壓 V 與線路的電阻 R 及電流 I 有關，其關係式為 $V=RI$。若 V 及 R 當作是已給的，則由此可確定 I 為 V 及 R 的函數：

$$I=\frac{V}{R}.$$

3）設有放在汽缸的活塞下面的一定質量的氣體，其溫度不是固定

不變的;則這氣體的體積 v 及壓力 p 都與它的(絕對)溫度 T 有關係,其關係式稱爲克拉披隆(Клапейрон)公式:

$$pv=RT \quad (R=\text{常量}).$$

由此,例如認爲 v 及 T 是自變量,則它們的函數 p 就可寫成:

$$p=\frac{RT}{v}.$$

4)研究任何物體的物理狀態時往往需要觀察它的各種性質隨着點的變化。如:密度,溫度,電位等等。所有這些量都是'點的函數',換言之,就是點的坐標 x, y, z 的函數。若物體的物理狀態隨時間而變化,則在這些自變量內還要加上時間 t。在這情形我們就得到四個自變量的函數。

類似的例子讀者自己還可以任意舉出許多來。

要想對於幾個自變量的函數的概念給以準確的定義,我們先從最簡單的情形,當自變量有兩個時開始。

150. 二元函數及其定義域 凡說及二自變量 x 及 y 的變動,我們每一次都應當指出,它們可以同時取值的數對 (x, y) 是哪一些;這些數對所成的集 $\mathscr{M}$ 就是變量 x, y 的變動區域。

函數概念的定義與一元函數時所給出的定義有同樣的說法:

若對於集 $\mathscr{M}$ 中的每一對自變量的數值 (x, y)——依某一法則或規律——有一確定的 z 的數值(在 $\mathscr{Z}$ 內)與元對應,則變量 z(其變動區域爲 $\mathscr{Z}$)稱爲自變量 x, y 在集 $\mathscr{M}$ 中的函數。

在此處說及的是單值函數;很易推廣這一定義使適用於多值函數。

上面說及的集 $\mathscr{M}$ 就是函數的定義域。變量 x, y——對於它們的函數 z 而言——稱爲它的變元。與一元函數時相類似,z 與 x、y 之間的函數關係表示爲:

$$z=f(x, y),\ z=\varphi(x, y),\ z=z(x, y)\ \text{等等。}$$

若 (x_0, y_0) 是從 $\mathscr{M}$ 中取出的一個數對,則 $f(x_0, y_0)$ 就表示當 $x=x_0$,

$y=y_0$ 時函數 $f(x, y)$ 所取的一個特別(數字)值。

茲舉出幾個解析地(即用公式)給定的函數的例題,並指出它們的定義域。公式:

$$1)\ z=xy \text{ 及 } 2)\ z=x^2+y^2$$

確定對於一切數對 (x,y) 全無例外的函數。公式:

$$3)\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad 4)\ z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

僅被各別滿足不等式

$$x^2+y^2\leqslant 1 \text{ 或 } x^2+y^2<1$$

的那些數對 (x,y) 所適合(若我們祗想得到有盡的實數 z)。

由公式:

$$5)\ z=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b}$$

所確定的,是其數值分別滿足不等式

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -b\leqslant y\leqslant b$$

的 x 及 y 的函數。

在一切這些情形中我們都指出了公式適用的最廣闊的——自然的[46, 2°]——範圍。

今再考察這樣的例題。

6) 設三角形的各邊在周長保持為常量 $2p$ 的條件下任意變化着。若用 x 及 y 表示它的二邊,則第三邊就是 $2p-x-y$,於是三角形可以由邊 x 及 y 完全確定。問三角形的面積 z 與它們的關係怎樣?

依海倫(Герон)公式,這面積表示為:

$$z=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

至於這函數的定義域 $\mathscr{M}$,在這一次,就應受到引入這函數的具體問題的限制。因為三角形的每一邊是小於半周的正數,所以應當成立不等式

$$0<x<p,\ 0<y<p,\ x+y>p;$$

它們就表現了區域 $\mathscr{M}$ ❶的特徵。

這樣,雖然在一元函數的情形,作為變元的標準變動區域的祇是(有盡的或無窮的)區間,而在二元函數的情形,我們已碰到變元的各種各樣極其複雜的可能(和自然的)變動區域。

利用這些區域的幾何說明來考察它們,常使事情變成非常簡易。若在平面上取互相垂直的二軸,再用通常的辦法使它們上面的點各自和

❶ 雖然所得出的公式本身在更廣的範圍內,例如對於 $x>p$ 及 $y>p$,仍保持有意義。

x 或 y 的值相對應，那末大家知道由每一對 (x, y) 可以單值地確定平面上的一點，它以這些數值作爲自己的坐標，反之亦然。

於是，要表現出那些使函數有定義的數對 (x, y)，就祇需簡單地指出它們所對應的點在 xy 平面上填滿了怎樣的圖形。

如此，就說，函數 1) 及 2) 定義於全平面內，函數 3)及 4) 依次定義於閉的（即包括圓周在內）或開的（除去圓周）圓內（圖 86）；函數 5) 定義於矩形內（圖 87）；最後，我們僅在開的三角形（圖 88）內考察函數 6)。

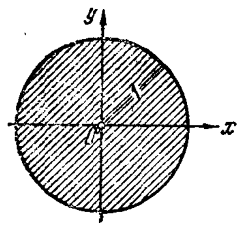

圖 86

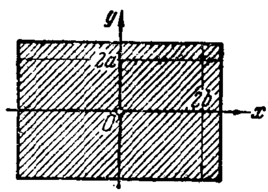

圖 87

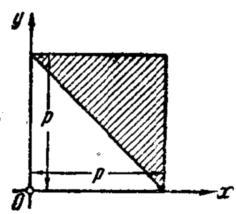

圖 88

這種幾何說明是如此的方便，以致通常就稱數對 (x, y) 爲'點'而這種'點'的集也就依照其所對應的圖形的名稱來稱呼它。例如，滿足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

的'點'集或數對 (x, y) 的集是'矩形'，其測度等於 $b-a$ 及 $d-c$；它將用記號 $[a, b; c, d]$ 來表示，與區間的表示法相類似。滿足不等式

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqslant r^2$$

的'點'集或數對 (x, y) 的集是中心在'點' (α, β) 而半徑爲 r 的'圓'，等等。

恰像函數 $y=f(x)$ 可用其圖線來幾何地說明一樣 [47]，方程式 $z=f(x, y)$ 亦可以得到幾何上的說明。在空間取以 x 軸，y 軸，z 軸組成的直角坐標系統；再在 xy 平面上畫出變量 x 及 y 的變動區域 $\mathscr{M}$，最後，在這區域中的每一點 $M(x, y)$ 作 xy 平面的垂線，並在垂線上按

數值 $z=f(x,y)$ 來取點。這樣所得的點的軌跡就是我們的函數的空間圖形。一般地說來，這是一個曲面；同時等式 $z=f(x,y)$ 就稱為曲面的方程式。

為了舉例，在圖 89, 90 及 91 中畫着函數：

$$z=xy,\ z=x^2+y^2,$$
$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

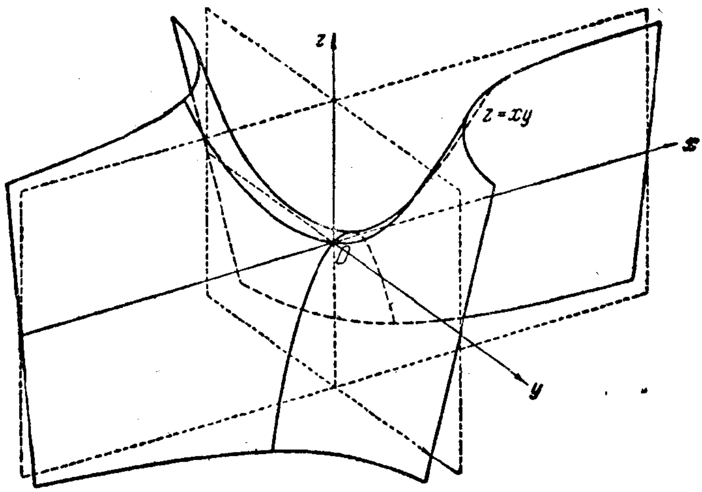

圖 89

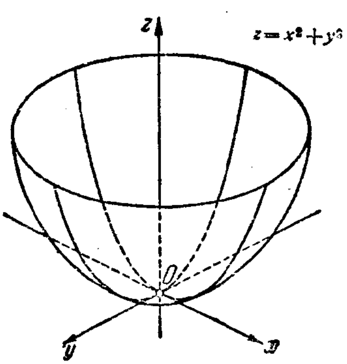

圖 90

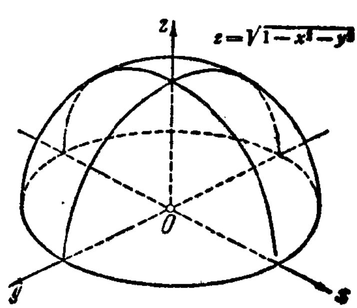

圖 91

的幾何圖形。其中第一個圖形是雙曲拋物面,第二個是迴轉拋物面,第三個是半球面。

最後要講到,有時不得不考察變量 $x_{m,n}$,它的數值是用二自然數標 m 及 n 來編號的(m 與 n 各自獨立地依自然數列而遞變)。在某種意義上來說,這種變量是整序變量 x_n 的推廣。

例如,可以令

$$x_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!},\quad x_{m,n}=\frac{1}{m^2+n^2},\quad x_{m,n}=\frac{(m+1)\cdot n}{m\cdot(n+1)}\ \text{等等。}$$

事實上,標號 m 及 n 應該看作自變量,而變量 $x_{m,n}$ 看成是它們的函數。在當前的情形,自變量的變動區域可用第一象限內的全部方格子點作爲其幾何說明。

151. n 維算術空間 轉移到 n 個自變量($n\geqslant 3$)的函數,我們首先來考慮這些變量的協同數值組。

在 $n=3$ 時,讀者都明白,三數 (x,y,z) 所成的數值組還可以幾何地解釋爲空間的點,而這種數值的集則可以解釋爲空間的一部分或幾何學中的體。但在 $n>3$ 時已不可能再有直接的幾何說明,因爲我們並沒有維數大於三的空間的直覺。

雖然如此,由於仍然希望把(對於二元及三元函數顯得是有效的)那些幾何方法擴充到更多個變元的函數的理論上去,在分析學內就引入了 n 維'空間'的概念(n 可以大於 3)。

n 個實數所成的組 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$❶ 稱爲(n 維的)'點';數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 就是這'點' M 的坐標。所有可以想像的 n 維的'點'就組成一個 n 維'空間'(它有時稱爲算術空間)。

---

❶ 由於所論變量的個數沒有一定,所以不用不同的字母,而只用帶有不同序號的同一字母來表示它們,顯得更是方便。這樣,x_i(與以前的用法相反)並不表示某一變量的第 i 個值,而是表示可以具有許多不同數值的第 i 個變量本身。

引入兩個(n維)‘點’

$$M(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 與 } M'(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$$

之間的‘距離’$\overline{MM'}$ 的概念是有需要的。仿照大家知道的解析幾何學中的公式，令

$$\overline{MM'}=\overline{M'M}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x'_i-x_i)^2}=$$

$$=\sqrt{(x'_1-x_1)^2+(x'_2-x_2)^2+\cdots+(x'_n-x_n)^2}; \tag{1}$$

在$n=2$或3時這‘距離’與對應的兩幾何點之間的通常距離相同。

若再取一‘點’

$$M''(x''_1, x''_2, \cdots, x''_n),$$

則亦可以證明‘距離’$\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ 及 $\overline{MM''}$ 滿足不等式

$$\overline{MM''} \leqslant \overline{MM'}+\overline{M'M''}, \tag{2}$$

這便是大家知道的幾何定理：“三角形的一邊不大於其他二邊之和”。

實際上，對於任何兩組實數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 常成立不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\text{ ❶}.$$

---

❶ 若將它的兩端各自平方並消去相等的項，則這不等式就變成著名的布涅可夫斯基(Буняковский)不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

順便指出，如何用初等方法來證明這最後的不等式。n個具有完全平方的形式的三項式之和

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot x+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot x^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\cdot x+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

是不能取負值的。因此它就不能有不同的實根，於是它的判別式不能是負的：(續次頁)

若在此處令

$$a_i=x_i'-x_i,\ b_i=x_i''-x_i',\ \text{於是}\ a_i+b_i=x_i''-x_i,$$
$$(i=1,2,\cdots,n),$$

則得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i')^2},$$

這就相當於(2)。這樣,距離的這一重要性質在我們的'空間'中亦同樣成立。

在 n 維'空間'內亦可以考察連續'曲線'。

大家知道[105],方程式

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

(此處的 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 是參變量 t 的函數,在某一區間$[t',t'']$是連續的)表示平面上的連續曲線。類似於此,但用三個連續函數:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)\quad(t'\leqslant t\leqslant t''),$$

就可表示(通常)空間中的連續曲線。仿此,今考察 t 的 n 個連續函數:

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ \cdots,\ x_n=\varphi_n(t)\ (t'\leqslant t\leqslant t'').$$

則當參變量 t 取不同數值時所得的'點'集

$$(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t)),$$

就組成 n 維'空間'內的連續'曲線'。令

$$x_1'=\varphi_1(t'),\ \cdots,\ x_n'=\varphi_n(t');\ x_1''=\varphi_1(t''),\ \cdots,\ x_n''=\varphi_n(t''),$$

就可以說,這'曲線'連接着兩'點'

$$M'(x_1',\ x_2',\ \cdots,\ x_n')\ \text{與}\ M''(x_1'',\ x_2'',\ \cdots,\ x_n'').$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right\}^2\geqslant0,$$

這就相當於布湼可夫斯基不等式。

當所有的 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 都是線性函數時,‘曲線’就變成‘直線’:

$$x_1=\alpha_1 t+\beta_1, \cdots, \quad x_n=\alpha_n t+\beta_n;$$

其中係數 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 假定不全等於零,又 t 從 $-\infty$ 變至 $+\infty$。我們將算作這直線上的‘點’是依着參變量漸增的次序一個跟着一個的;若 $t'<t<t''$,則在對應的‘點’M', M, M'' 內,‘點’M 就位於其他兩點之間,因為它在 M' 之後而又在 M'' 之前。在這些條件之下,容易證明,它們之間的距離滿足於關係式:

$$\overline{M'M''}=\overline{M'M}+\overline{MM''},$$

這正是通常空間內的直線的特性。

經過二給定‘點’

$$M'(x_1', \cdots, x_n') \text{ 及 } M''(x_1'', \cdots, x_n'')$$

的‘直線’的方程式顯然可以寫成:

$$x_1=x_1'+t(x_1''-x_1'), \cdots, \quad x_n=x_n'+t(x_n''-x_n')$$
$$(-\infty<t<+\infty),$$

於此令 $t=0$ 及 1,就得到‘點’M' 及 M''。又若使 t 從 0 變至 1,就得到連接這兩‘點’的‘直線段’。

由有盡數的‘直線段’所組成的‘曲線’稱為‘折線’。

152. **n 維空間內的區域舉例**　今轉而考察一些 n 維‘空間’內的‘體’或‘區域’的例子。

1) 坐標各自互相獨立地滿足於不等式

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ \cdots, \ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

的一切‘點’$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所成的集稱為(n 維)‘**長方體**’,並記成:

$$[a_1, b_1; \ a_2, b_2; \ \cdots; \ a_n, b_n].$$

在 $n=2$ 時,就由此得出[150]內曾經講及的‘長方形’;通常空間中的長方體則對應於三維‘長方體’。

若在前面寫着的關係式內去掉等號,得到

$$a_1<x_1<b_1, \ a_2<x_2<b_2, \ \cdots, \ a_n<x_n<b_n,$$

就可用它們來定義開的'長方體':

$$(a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \cdots;\ a_n, b_n),$$

因爲要與它區別，前一個就稱爲閉的'長方體'❶。差 b_1-a_1, b_2-a_2, $\cdots$, b_n-a_n 稱爲兩種長方體的測度，而點

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2},\ \cdots,\ \frac{a_n+b_n}{2}\right)$$

稱爲它們的中心。

任一中心在 M^0 的開的'長方體'

$$(x_1^0-\delta_1, x_1^0+\delta_1;\ x_2^0-\delta_2, x_2^0+\delta_2;\ \cdots;\ x_n^0-\delta_n, x_n^0+\delta_n) \qquad (3)$$

$(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n>0)$ 稱爲'點' $M^0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的鄰域，最常遇見的鄰域是'立方體':

$$(x_1^0-\delta, x_1^0+\delta;\ x_2^0-\delta, x_2^0+\delta;\ \cdots;\ x_n^0-\delta, x_n^0+\delta)$$

$(\delta>0)$，其一切測度都相等$(=2\delta)$。

2) 考察坐標滿足不等式

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0,\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant h\ (h>0)$$

的一切'點' $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所成的集。在 $n=2$ 時對應於這集的幾何圖形是等腰直角三角形，在 $n=3$ 時是四面體（圖 92)。在一般情形稱它爲最簡體❷（這裏是閉的最簡體，以區別於在上列不等式內去掉等號而得出的開的最簡體)。

3) 最後，若 $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 是定'點'，而 r 是正常數，則由不等式

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2\leqslant r^2\ (\text{或}<r^2)$$

所確定的一切'點' $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所成的集稱爲閉的（或開的）n 維'球'，其半徑爲 r，而中心在'點' M_0 處。換句話說，'球'是所有與某一

❶ 亦可以考察無窮'長方體'，如果確定它的各區間（或其中的某幾個）是無窮區間時。在說及 n 維'長方體'時，若沒有特別聲明，我們總是指有盡'長方體'。

❷ 按拉丁文 simplex 的意思是'簡單的'；實際上，最簡體就是最簡單的多面'體'，對於所給定空間而言，它具有最少數目的面。

定‘點’M_0的‘距離’不超過(或小於)r的點所成的集。這是很清楚的，$n=2$時的‘球’就是圓[參閱150]，$n=3$時就是通常的球。

中心在點$M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$處而有任意半徑$r>0$的開‘球’亦可以看作這點的鄰域；要使它區別於我們先前引入的那種‘長方體形’的鄰域，就稱它爲‘球形’的鄰域。

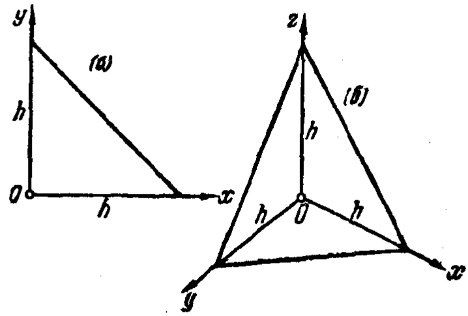

圖 92

茲證明下一經常要用到的事實：已給一個‘點’M_0的上述任一類型的鄰域時，一定可以找到M_0的一個另一類型的鄰域，使得後者包含於前者之中。

設首先給定中心在‘點’M_0處的‘長方體’(3)。那末，要取有同一中心的開‘球’，使它包含在所給‘長方體’之內，只要取開‘球’的半徑r小於一切$\delta_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$就够了。實際上，對於這球內的任一‘點’$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，(對每一$i=1, 2, \cdots, n$)將有：

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

或
$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

於是這點必屬於給定的‘長方體’。

反之，若給定中心在M_0而半徑爲r的‘球’，那末‘長方體’(3)，例如，在$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \frac{r}{\sqrt{n}}$時就包含在它裏面。因爲這‘長方體’中任一‘點’$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$距‘點’$M_0$的‘距離’是

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2} = r,$$