叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法

王保国　黄虹宾　著

国防工业出版社

叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法

王保国　黄虹宾　著

3

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法/王保国,黄虹宾著.－北京:国防工业出版社,2000.1
ISBN 7-118-02047-8

Ⅰ.中… Ⅱ.王… Ⅲ.叶轮机械-流场(流体力学)-计算方法 Ⅳ.TK123

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 38021 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
三河市腾飞胶印厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 印张 16¾ 382 千字
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:1—1500 册 定价:26.00 元

序

叶轮机械是国民经济各部门中应用十分广泛的一类实现能量转换的装置之一，通常它可以分为两大类：一类是将工质(例如：蒸汽或燃气)的热能或者压力能、动能转换为机械功，使之成为旋转式动力机械，例如：电力工业与交通运输业中的蒸汽透平、燃气轮机及余气、废气透平，制冷、低温装置中的透平膨胀机以及航空发动机上的涡轮装置等；另一类是将叶轮的机械能转变为工质的压力能、动能，使之成为叶轮式工作机，例如：能源动力工业和冶金、化工、石油工业中的压缩机、鼓风机、通风机、风扇以及航空发动机上的压气机等。尽管这两类装置(以下简称涡轮与压气机)在工作原理上很不相同，但从流体力学与气动热力学的观点上看，两者具有许多共性，并且构成了工程热物理学科气动热力学分支的主要研究内容。

以下三个方面：(1)叶轮机械中二维与三维跨声速流场的高效率高分辨率高精度数值方法；(2)叶栅通道中粘性分离流动、湍流拟序结构、涡系拓朴结构分析以及转捩与湍流模式研究；(3)静动叶片排间的干扰、激波—边界层相互作用的非定常性及在结构或非结构网格下多级叶片排湍流 Navier-Stokes 方程组的数值计算，可以认为是当代工程热物理学科气动热力学分支的三大前沿课题。本书正是面对这些课题论述国内外研究的最近进展，尤其是作者自己在这一领域所取得的最新成果。该书第一作者王保国博士是位数学、力学功底深厚的中青年流体力学学术带头人之一。他治学严谨，处理问题强调物理直观，科学研究注重联系实际，在理论和实践两方面都经受过比较全面的训练并且吸取了众家从事科学研究的精华，学会了进行科学研究的本领，使得他在之后的研究工作与教学工作中得心应手，取得了丰硕成果，显示了他具有深邃的理论与实践功底。20 年来，他在跨声速流函数方法、欧拉方程与 Navier-Stokes 方程的高效率高分辨率解法，结构网格与非结构网格下恢复函数的重构以及迎风紧致高精度格式等方面作了大量的工作，并在 AIAA、ASME、力学学报、应用数学和力学、计算物理、空气动力学学报、工程热物理学报等国内外重要学术刊物上发表了 160 余篇论文，其中许多文章被 EI、SCI 检索收录，得到了同行们的认可和关注，而且多次获奖。本书的第二作者黄虹宾博士对发动机流场计算和实验技术都较为熟悉，他在协助王保国博士归纳、整理本专著的丰富素材中做了大量工作。

这部专著共分十二章，书中讲述的方法作者们都亲自在计算机上进行过数值实践并感到具有工程使用价值，其中有些方法是作者自己提出或发展的算法，并有创新。全书叙述清晰、论证细致、逻辑严密，反映出作者们治学严谨、一丝不苟的敬业精神和工作作风。毫无疑问，他们的这部著作必为我国内流数值计算，尤其是叶轮机械复杂流场的计算注入新鲜血液，并填补国内这方面出版的空白。

卞荫贵

1998 年 8 月于中国科学院

前　　言

叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算是现代叶轮机械气动设计的必备工具，同时也是国际上正在大力发展的前沿课题之一。二十几年来，作者一直从事着这方面的数值计算与研究工作，并深深感到国内很需要有人去写一部能反映近年来叶轮机械复杂流场计算新方法方面的书籍，以弥补国内这方面出版的不足。

在编著本书时，作者努力使本书具有如下几个特色：(1)书中所讨论的方法是作者亲自在计算机上进行过数值实践并感到富有工程使用价值的数值方法；(2)这些方法都是针对现代叶轮机械气动设计的工程实践而提出的一些关键措施，因此书中既有能用于解决二维流动的快速高效算法，也有能用于三维计算的高效方法；(3)针对现代压气机与涡轮(透平)中普遍存在的激波间断问题，书中详细讨论了作者在这方面的研究工作，尤其是近年来作者提出和发展的一系列改善捕捉激波质量的数值方法；(4)书中包含了最近几年国际上刚刚发展起来的非结构网格算法和作者在这方面所从事的最新研究工作；(5)动叶顶隙对现代叶轮机械的效率和损失有重大影响，该书对此问题做了详细的讨论，并归纳了作者与他的同事们在这方面所完成的最新工作。全书分十二章，注意了二维与三维问题分别阐述，以充分反映它们针对不同的问题所具有的特色。全书以讲述跨声速流场的计算为主，亚声速流场的许多计算方法均可从跨声速算法的特殊情况取得。

在本书的写作过程中曾得到许多学术界的前辈和同行们的批评、指正和鼓励。在本书初稿完成之后，首先请著名计算流体力学家卞荫贵教授、著名叶片机专家北京航空航天大学一级教授崔济亚先生以及清华大学陈佐一教授分别审阅，他们曾提出了许多改进意见。之后，著名气体动力学家、中国科学院院士俞鸿儒教授又做了审阅，并对本书的出版给予了热情鼓励和大力的推荐。为此作者根据前辈们的建议又用了一年半多的时间对该书作了全面的修正，进一步突出了上述五大特色。另外，书中的部分内容，作者还曾在清华大学工程力学系硕士生和博士生的高等计算流体力学课上作过多次讲授。当然，本书肯定还有不完善和不足之处，恳请广大读者批评指正。

最后，万分感谢我国工程热物理学科的创始人、中国科学院院士吴仲华教授以及崔济亚教授、陈乃兴教授、卞荫贵教授、沈孟育教授对作者的长期培养和付出的辛勤劳动；感谢著名应用数学家、我国计算物理学科的创始人秦元勋教授多年来给予的帮助和热情鼓励。没有这些导师们的引路和支持，就不会有这本专著的创作与问世！

作　者

1998年3月于北京

目　　录

第一章　绝对与相对曲线坐标系中守恒与非守恒粘性气动热力学基本方程组的多种表达形式

本章以张量分析为工具,在绝对曲线坐标系(惯性坐标系)与旋转曲线坐标系(相对坐标系、非惯性坐标系)中严格推导了叶轮机械粘性气动热力学基本方程组的多种形式,并得到如下结论:(1) 当叶轮旋转角速度 ω 随时间变化时,所得基本方程组的形式并不同于目前流行的等 ω 基本方程组,这一研究为叶轮机械起动和变速过程的理论分析提供了新的基本方程;(2) 借助张量计算,可以严格地从数学上保证将绝对曲线坐标系中的粘性气体气动热力学基本方程组变换到旋转曲线坐标系中。

§1.1　高阶张量的梯度、旋度和散度表达式

本节符号约定:

$\boldsymbol{a}$ —— 表示任一矢量,a_k, a^k 分别为 $\boldsymbol{a}$ 的协变、逆变分量;

$\boldsymbol{\Pi}$—— 表示任一个二阶对称张量,常表示为 $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\tau_{jk}$;

$\boldsymbol{T}$—— 表示任一张量,本节多用它表示三阶张量,如 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k t_{ijk}$;

∇_i —— 表示协变导数。

本节及以下诸节均采用爱因斯坦求和规约,于是主要的梯度公式为

$$\nabla \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j \nabla_i a_j \tag{1.1}$$

$$\nabla \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k \nabla_i \tau_{jk} \tag{1.2}$$

特别是,如令 $\boldsymbol{R}$ 表示矢径,于是它的梯度便得单位张量:

$$\nabla \boldsymbol{R} = g_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j \tag{1.3}$$

主要旋度公式为

$$\nabla \times \boldsymbol{\Pi} = \in^{ijk} \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^\beta \nabla_i \tau_{j\beta} \tag{1.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{T} = \in^{ijk} \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta \nabla_i t_{j\alpha\beta} \tag{1.5}$$

注意式中$\in^{ijk}$ 为埃丁顿(Eddington) 张量。主要的散度公式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\tau^{ij}\boldsymbol{e}_j\right)}{\partial x^i} \tag{1.6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \nabla_i t^{ijk} \tag{1.7}$$

另外,拉普拉斯算子即$\nabla \cdot \nabla$,有时简记为 Δ,其作用于高阶张量

$$\Delta \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}g^{ik}\boldsymbol{e}_j \nabla_k \boldsymbol{a}^j\right] \tag{1.8}$$

$$\Delta \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{g}^{ij}\boldsymbol{e}^{k}\boldsymbol{e}^{a}\ \nabla_i \nabla_j\ \tau_{ka} \tag{1.9}$$

文献[1]中有上述九个公式的推导办法，可供参考。作为上述公式的应用，给出任意曲线坐标系中变形率张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 应力张量 $\boldsymbol{\tau} = e^i e^j \tau_{ij}$、粘性应力张量 $\boldsymbol{\Pi}' = e^i e^j \tau'_{ij}$ 与耗散函数 Φ 的通用表达式：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \tag{1.10}$$

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^i v^j + \nabla^j v^i)$$

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} - g_{ij}p \tag{1.11}$$

$$\tau^{ij} = \tau'^{ij} - g^{ij}p$$

$$\tau'^{ij} = \mu\left(g^{i\alpha}g^{j\beta} + g^{i\beta}g^{j\alpha} - \frac{2}{3}g^{ij}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\alpha v_\beta \tag{1.12}$$

$$\Phi = \boldsymbol{\Pi}' : \nabla\ \boldsymbol{V} = \tau'^{ij}\ \nabla_j v_i \tag{1.13}$$

式中 P、$\boldsymbol{V}$、μ 分别为压力、速度和粘性系数；v_i 和 v^i 分别为 $\boldsymbol{V}$ 的协变与速度的逆变分量；∇^i 为逆变导数。

§1.2　绝对曲线坐标系中 N-S 方程组的表达

令任意曲线坐标系 (x^1,x^2,x^3) 的基矢量为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$；并且令笛卡尔坐标系 (y^1,y^2,y^3) 的单位矢量为 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$；v^1、v^2、v^3 为速度 $\boldsymbol{V}$ 在 (x^1,x^2,x^3) 中的逆变分速；$\hat{v}^1$、$\hat{v}^2$、$\hat{v}^3$ 为 $\boldsymbol{V}$ 沿 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$ 方向上的分速并且还经常将它们分别写为 u、v、w 于是文献[1]和文献[2]便分别推导出下面两种形式的 N-S 方程组：

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\sqrt{g}\rho\\ \sqrt{g}\rho v^1\\ \sqrt{g}\rho v^2\\ \sqrt{g}\rho v^3\\ \sqrt{g}e\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{bmatrix}\sqrt{g}\rho v^j\\ \sqrt{g}(\rho v^j v^1 + g^{1j}p)\\ \sqrt{g}(\rho v^j v^2 + g^{2j}p)\\ \sqrt{g}(\rho v^j v^3 + g^{3j}p)\\ \sqrt{g}(e+p)v^j\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{bmatrix}0\\ \mu\sqrt{g}\left(\nabla^j v^1 + \frac{1}{3}g^{1j}\ \nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)\\ \mu\sqrt{g}\left(\nabla^j v^2 + \frac{1}{3}g^{2j}\ \nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)\\ \mu\sqrt{g}\left(\nabla^j v^3 + \frac{1}{3}g^{3j}\ \nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)\\ \sqrt{g}\left(\mu\widetilde{M}^j + \lambda g^{ij}\frac{\partial T}{\partial x^i}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \widetilde{N}^1\\ \widetilde{N}^2\\ \widetilde{N}^3\\ 0\end{bmatrix} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\sqrt{g}\rho\\ \sqrt{g}\rho u\\ \sqrt{g}\rho v\\ \sqrt{g}\rho w\\ \sqrt{g}e\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{bmatrix}\sqrt{g}\rho v^j\\ \sqrt{g}\left(\rho v^j u + g^{ij}p\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\right)\\ \sqrt{g}\left(\rho v^j v + g^{ij}p\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\right)\\ \sqrt{g}\left(\rho v^j w + g^{ij}p\frac{\partial y^3}{\partial x^i}\right)\\ \sqrt{g}(e+p)v^j\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{bmatrix}0\\ \mu\sqrt{g}N^{1j}\\ \mu\sqrt{g}N^{2j}\\ \mu\sqrt{g}N^{3j}\\ \sqrt{g}\left(\mu M^j + \lambda g^{ij}\frac{\partial T}{\partial x^i}\right)\end{bmatrix} = 0 \tag{1.15}$$

式中 μ 和 λ 分别为粘性系数和热传导系数；T 为温度；算子 ∇^j 为逆变导数；ρ 和 p 为密度和压强；而 N^{ij}, M^j, $\widetilde{N}^i$, 和 $\widetilde{M}^j$ 的定义分别为

$$N^{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial \hat{v}^\beta}{\partial x^k} + g^{jk}\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial x^k} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V})g^{jk}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}, i = 1,2,3 \tag{1.16a}$$

$$\widetilde{N}^i = \left(p - \frac{1}{3}\mu\,\nabla\cdot\mathbf{V}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}g^{ij}) + \mu\sqrt{g}\Gamma^i_{jk}\nabla^j v^k - \sqrt{g}\rho v^j v^k \Gamma^i_{jk},$$
$$i = 1,2,3 \tag{1.16b}$$

$$M^j = \left[\hat{v}^k\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial y^k} + \hat{v}^k\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial y^i} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V})\hat{v}^i\right]\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \tag{1.16c}$$

$$\widetilde{M}^j = g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{2}\right) + v^k\,\nabla_k v^j - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V})v^j \tag{1.16d}$$

显然(1.14) 式与(1.15) 式有两个重大差别：(1) 前者为弱守恒型，后者为强守恒型；(2) 前者的运动方程是分别沿 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 方向，而后者则沿 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 方向。

在笛卡尔坐标系下，则(1.15) 式又可退化为如下形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_v)}{\partial z} = 0$$

式中

$$\boldsymbol{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$$

$$[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}] = \begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho vu & \rho wu \\ \rho uv & \rho v^2 + p & \rho wv \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + p \\ (e+p)u & (e+p)v & (e+p)w \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{E}_v, \boldsymbol{F}_v, \boldsymbol{G}_v] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \lambda\partial T/\partial x \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} & \lambda\partial T/\partial y \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} & \lambda\partial T/\partial z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} = \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\mathbf{V}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\mu\begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial w/\partial z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = u\boldsymbol{i}_1 + v\boldsymbol{i}_2 + w\boldsymbol{i}_3$$

$$e = \rho\left(C_v T + \frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right)$$

在柱坐标系(r,θ,z)下,如果令(r,θ,z)的基矢量为$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z$,并用$\boldsymbol{i}_r,\boldsymbol{i}_\theta,\boldsymbol{i}_z$表示单位基矢量,显然有

$$\boldsymbol{e}_\theta = r\boldsymbol{i}_\theta,\qquad \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}_r,\qquad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{i}_z,\frac{\partial \boldsymbol{i}_r}{\partial\theta} = \boldsymbol{i}_\theta,\qquad \frac{\partial \boldsymbol{i}_\theta}{\partial\theta} = -\boldsymbol{i}_r$$

$$\mathbf{V} = u\boldsymbol{i}_r + v\boldsymbol{i}_\theta + w\boldsymbol{i}_z = V_r\boldsymbol{i}_r + V_\theta\boldsymbol{i}_\theta + V_z\boldsymbol{i}_z$$

注意这里u,v,w分别表示Vr,V_θ,V_z的值并且这里V_r,V_θ,V_z是物理分速度而不是速度的协变分量。于是(1.14)式又可退化为如下弱守恒型:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(E-E_v)}{\partial r} + \frac{\partial(F-F_v)}{r\partial\theta} + \frac{\partial(G-G_v)}{\partial z} = N$$

式中

$$U = r[\rho,\rho u,r\rho v,\rho w,e]^{\mathrm{T}}$$

$$[E,F,G] = r\begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2+p & \rho vu & \rho wu \\ r\rho uv & r(\rho v^2+p) & r\rho wv \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2+p \\ (e+p)u & (e+p)v & (e+p)w \end{bmatrix}$$

$$[E_v,F_v,G_v] = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ r\tau_{\theta r} & r\tau_{\theta\theta} & r\tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} & \lambda\dfrac{\partial T}{\partial r} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} & \lambda\dfrac{\partial T}{r\partial\theta} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} & \lambda\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{\theta r} \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{r\partial\theta} - \dfrac{v}{r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{r\partial\theta} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{rr} \\ \tau_{\theta\theta} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} = \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\mathbf{V}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\mu\begin{bmatrix} \partial u/\partial r \\ \dfrac{\partial v}{r\partial\theta} + \dfrac{u}{r} \\ \partial w/\partial z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = u\boldsymbol{i}_r + v\boldsymbol{i}_\theta + w\boldsymbol{i}_z$$

$$N = [0, \rho v^2 + p - \tau_{\theta\theta}, 0, 0, 0]^T$$

在绝对曲线坐标系中,又可采用积分形式给出 N－S 方程组的更精炼更通用的表达式即

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} W \mathrm{d}\Omega + \oiint_{\partial\Omega} E \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 0$$

式中

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{V} \\ e \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho \boldsymbol{V} \\ \rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{\Pi} \\ (e+p)\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Pi}' - \lambda \nabla T \end{bmatrix} = E_1 + E_2$$

这里 $\boldsymbol{\Pi}$ 与 $\boldsymbol{\Pi}'$ 分别表示应力张量与粘性应力张量;$\boldsymbol{V}, p, T, e, \lambda$ 分别表示速度,压强,温度,单位体积气体所具有的总内能,热传导系数,应力张量 $\boldsymbol{\Pi}$ 可表达为

$$\boldsymbol{\Pi} = \mu[\nabla \boldsymbol{V} + (\nabla \boldsymbol{V})_c] - \left[p + \left(\frac{2}{3}\mu - \mu'\right)\nabla \cdot \boldsymbol{V}\right]\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{V} = u\boldsymbol{i}_1 + v\boldsymbol{i}_2 + w\boldsymbol{i}_3$$

$$\nabla \boldsymbol{V} = (\nabla u)\boldsymbol{i}_1 + (\nabla v)\boldsymbol{i}_2 + (\nabla w)\boldsymbol{i}_3$$

$$(\nabla \boldsymbol{V})_c = \boldsymbol{i}_1(\nabla u) + \boldsymbol{i}_2(\nabla v) + \boldsymbol{i}_3(\nabla w)$$

在上式中,$\boldsymbol{I}$ 为单位张量,μ' 为膨胀粘性系数[3]。E_1 与 E_2 分别表示无粘部分的通量与粘性部分的通量。在实际计算中,E_1 经常被整理为如下形式:

$$E_1 = \begin{bmatrix} \rho \boldsymbol{V} \\ \rho u \boldsymbol{V} + p\boldsymbol{i}_1 \\ \rho v \boldsymbol{V} + p\boldsymbol{i}_2 \\ \rho w \boldsymbol{V} + p\boldsymbol{i}_3 \\ (e+p)\boldsymbol{V} \end{bmatrix}$$

§1.3　两类坐标系间的转换

本节考虑两类坐标系:一类是绝对曲线坐标系,另一类是相对曲线坐标系;令(r,θ,z)和(r,φ,z)分别表示绝对曲线坐标系下的圆柱坐标和相对曲线坐标系下的圆柱坐标,而 $\boldsymbol{i}_\varphi$ 为(r,φ,z)系下沿 φ 向的单位矢量;(ξ^1,ξ^2,ξ^3)和(η^1,η^2,η^3)分别为绝对曲线坐标系下的任意曲线坐标和相对曲线坐标系下的曲线系;用 $\mathrm{D}_a/\mathrm{D}t, \partial_a/\partial t, \partial_a/\partial\xi^i$ 和 $\mathrm{D}_R/\mathrm{D}t$, $\partial_R/\partial t, \partial_R/\partial\eta^i$ 分别表示绝对曲线坐标系与相对曲线坐标系下的随体导数(又称全导数)或偏导数;本节用 e_0 表示单位体积气体具有的相对广义内能,即

$$e_0 = \rho\left(E + \frac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}}{2}\right) \tag{1.17}$$

式中 $\boldsymbol{W}$ 为相对速度,而绝对速度用 $\boldsymbol{V}$ 表示,显然有

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{W} + \boldsymbol{U} \tag{1.18}$$

并且定义 $\dot{\omega}$ 为

$$\dot{\omega} = \frac{D_R\omega}{Dt} \tag{1.19}$$

两类坐标系间转换的重要关系可归纳如下：

$$\frac{\partial_a f}{\partial t} = \frac{\partial_R f}{\partial t} - \omega \frac{\partial_R f}{\partial \varphi} \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial_a \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial_R \boldsymbol{B}}{\partial t} - \omega \frac{\partial_R \boldsymbol{B}}{\partial \varphi} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B} \tag{1.21}$$

$$\frac{\mathrm{D}_a f}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}_R f}{\mathrm{D}t} \tag{1.22}$$

$$\frac{\mathrm{D}_a \boldsymbol{B}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}_R \boldsymbol{B}}{\mathrm{D}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B} \tag{1.23}$$

$$v^i \frac{\partial_a \boldsymbol{B}}{\partial \xi^i} = w^i \frac{\partial_R \boldsymbol{B}}{\partial \eta^i} + \omega \frac{\partial_R \boldsymbol{B}}{\partial \varphi} \tag{1.24}$$

借助上面五个关系式便可推出如下结果：

(1) 连续方程：

$$\frac{\partial_a \rho}{\partial t} + \nabla_a \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial_R \rho}{\partial t} + \nabla_R \cdot (\rho \boldsymbol{W}) = 0 \tag{1.26}$$

$$\nabla_a \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = \nabla_R \cdot (\rho \boldsymbol{W}) + \omega \frac{\partial_R \rho}{\partial \varphi} \tag{1.27}$$

(2) 运动方程：

$$\frac{\partial_a (\rho \boldsymbol{V})}{\partial t} + \nabla_a \cdot (\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}) = \nabla_a \cdot \boldsymbol{\tau}_a \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial_R (\rho \boldsymbol{W})}{\partial t} + \nabla_R \cdot (\rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}) + 2\rho \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{W} - \rho(\omega)^2 \boldsymbol{r} + \boxed{\rho r \dot{\omega} \, \boldsymbol{i}_\varphi} = \nabla_R \cdot \boldsymbol{\tau}_R \tag{1.29}$$

$$\frac{\mathrm{D}_a \boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}_R \boldsymbol{W}}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{W} - (\omega)^2 \boldsymbol{r} + \boxed{\dot{\omega} \, r \boldsymbol{i}_\varphi} = \frac{1}{\rho} \nabla_R \cdot \boldsymbol{\tau}_R \tag{1.30}$$

这里 $\boldsymbol{\tau}$ 为应力张量。

(3) 能量方程：

$$\rho \frac{\mathrm{D}_a \left(E + \dfrac{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}}{2} \right)}{\mathrm{D}t} = \nabla_a \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{V}) + \rho \dot{q} \tag{1.31}$$

$$\rho \frac{\mathrm{D}_a}{\mathrm{D}t} \left[E + \frac{p}{\rho} + \frac{\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{W}}{2} - \frac{(\omega r)^2}{2} \right] = \nabla_R \cdot (\boldsymbol{\Pi}' \cdot \boldsymbol{W}) + \rho \dot{q} + \frac{\partial_R p}{\partial t}$$

$$\boxed{- \rho \omega \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \dot{\omega} - \rho r \dot{\omega} \, (\boldsymbol{i}_\varphi \cdot \boldsymbol{W})} \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial_R e_0}{\partial t} + \nabla_R \cdot [(e_0 + p)\boldsymbol{W}] = \nabla_R \cdot (\boldsymbol{\Pi}' \cdot \boldsymbol{W}) + \rho \dot{q} + \rho(\omega)^2(\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{r})$$
$$\boxed{-\rho r \dot{\omega}\,(\boldsymbol{i}_\varphi \cdot \boldsymbol{W})} \tag{1.33}$$

对于以上各式,有一点需要特别说明:凡是用黑线框住的项都含有 $\dot{\omega}$,它反映了旋转角速度的变化,这是目前一般文献中未被反映的。

§1.4 相对曲线坐标系中N-S方程组

在相对曲线坐标系下选取两个坐标,一个是笛卡尔坐标($\hat{y}^1,\hat{y}^2,\hat{y}^3$),另一个是任意曲线坐标系($\eta^1,\eta^2,\eta^3$);令 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$ 为($\hat{y}^1$、$\hat{y}^2$、$\hat{y}^3$)下的单位基矢量;令 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为(η^1,η^2,η^3)的基矢量,而此坐标系的度量张量为 $\boldsymbol{g}_{ij}$,相应的基本度量张量行列式的值为 g;令 $\boldsymbol{W}$ 仍表示相对速度,并且相对曲线坐标系固连于叶轮上随叶轮绕轴一起转动;将 $\boldsymbol{W}$ 沿 $\boldsymbol{i}_1$,$\boldsymbol{i}_2$,$\boldsymbol{i}_3$ 方向的分速记作 $\hat{u},\hat{v},\hat{w}$ 或者 $\tilde{w}^1,\tilde{w}^2,\tilde{w}^3$;并且用 w^i 表示 $\boldsymbol{W}$ 在(η^1,η^2,η^3)系下的逆变分量;于是将(1.26)、(1.29)和(1.33)式适当归并整理便得到相对曲线坐标下新的N-S方程组:

$$\frac{\partial_R}{\partial t}\begin{bmatrix}\sqrt{g}\rho\\ \sqrt{g}\rho\hat{u}\\ \sqrt{g}\rho\hat{v}\\ \sqrt{g}\rho\hat{w}\\ \sqrt{g}e_0\end{bmatrix} + \frac{\partial_R}{\partial \eta^j}\begin{bmatrix}\sqrt{g}\rho w^j\\ \sqrt{g}\left(\rho w^j\hat{u} + g^{ij}p\dfrac{\partial\hat{y}^1}{\partial\eta^i}\right)\\ \sqrt{g}\left(\rho w^j\hat{v} + g^{ij}p\dfrac{\partial\hat{y}^2}{\partial\eta^i}\right)\\ \sqrt{g}\left(\rho w^j\hat{w} + g^{ij}p\dfrac{\partial\hat{y}^3}{\partial\eta^i}\right)\\ \sqrt{g}(e_0+p)w^j\end{bmatrix} - \frac{\partial_R}{\partial\eta^j}\begin{bmatrix}0\\ \mu\sqrt{g}\hat{N}^{1j}\\ \mu\sqrt{g}\hat{N}^{2j}\\ \mu\sqrt{g}\hat{N}^{3j}\\ \sqrt{g}\left(\mu\hat{M}^j + \lambda g^{ij}\dfrac{\partial T}{\partial\eta^i}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \sqrt{g}S^1\\ \sqrt{g}S^2\\ \sqrt{g}S^3\\ \sqrt{g}S^4\end{bmatrix} \tag{1.34}$$

式中 $\hat{N}^{ij},\hat{M}^j,S^i,S^4$ 的定义如下:

$$\hat{N}^{ij} = \frac{\partial_R\eta^k}{\partial\hat{y}^i}\frac{\partial_R\eta^j}{\partial\hat{y}^\beta}\frac{\partial_R\hat{w}^\beta}{\partial\eta^k} + g^{jk}\frac{\partial_R\hat{w}^i}{\partial\eta^k} - \frac{2}{3}(\nabla_R\cdot\boldsymbol{W})g^{jk}\frac{\partial_R\hat{y}^i}{\partial\eta^k} \tag{1.35a}$$

$$\hat{M}^j = \left[\tilde{w}^k\frac{\partial_R\tilde{w}^i}{\partial\hat{y}^k} + \tilde{w}^k\frac{\partial_R\tilde{w}^k}{\partial\hat{y}^i} - \frac{2}{3}(\nabla_R\cdot\boldsymbol{W})w^i\right]\frac{\partial_R\eta^j}{\partial\hat{y}^i} \tag{1.35b}$$

$$S^i = 2\omega r\rho w^j\frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(\eta^j,\hat{y}^i)} + r\rho(\omega)^2\frac{\partial_R\hat{y}^i}{\partial r}\boxed{-\rho\dot{\omega}\frac{\partial_R\hat{y}^i}{\partial\varphi}},\ i=1,2,3 \tag{1.35c}$$

$$S^4 = \rho w^i(\omega)^2 r\frac{\partial_R r}{\partial\eta^i}\boxed{-\rho\dot{\omega}(r)^2 w^i\frac{\partial_R\varphi}{\partial\eta^i}} \tag{1.35d}$$

当然上述方程组在 $\dot{\omega}=0$ 的情况下又可写为下面通用形式: