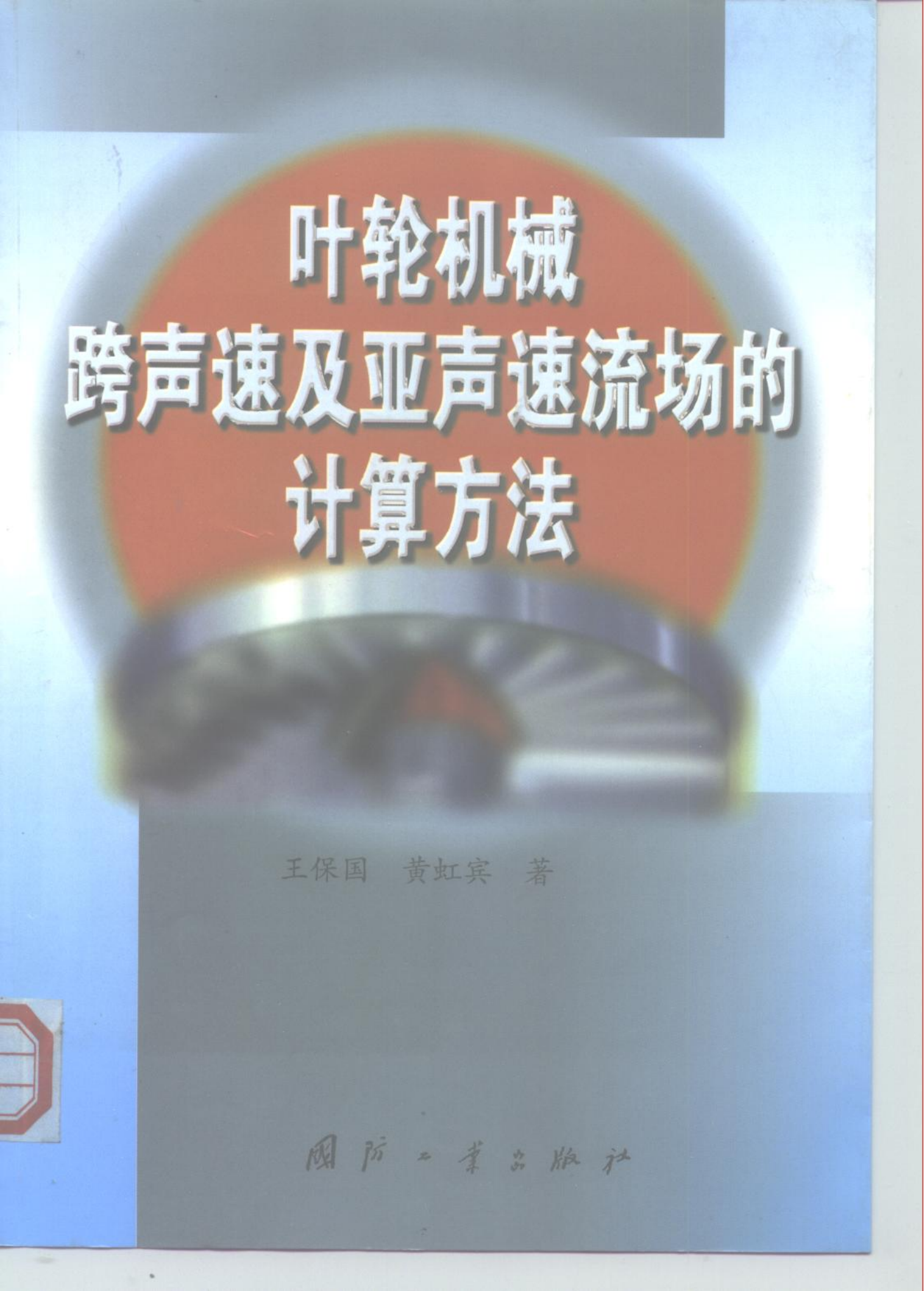




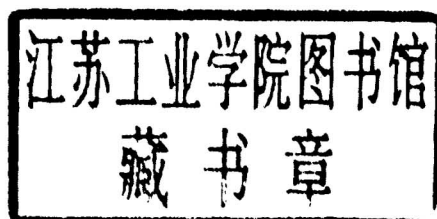
叶轮机械 跨声速及亚声速流场的 计算方法

王保国 黄虹宾 著

国防工业出版社

叶轮机械跨声速及亚声速 流场的计算方法

王保国 黄虹宾 著



国防工业出版社

·北京·

3

图书在版编目(CIP)数据

叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法/王保国,黄虹宾著. —北京:国防工业出版社,2000.1
ISBN 7-118-02047-8

I. 中… II. 王… III. 叶轮机械-流场(流体力学)-计算方法 IV. TK123

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 38021 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

三河市腾飞胶印厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 16 $\frac{3}{4}$ 382 千字

2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—1500 册 定价:26.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

序

叶轮机械是国民经济各部门中应用十分广泛的一类实现能量转换的装置之一,通常它可以分为两大类:一类是将工质(例如:蒸汽或燃气)的热能或者压力能、动能转换为机械功,使之成为旋转式动力机械,例如:电力工业与交通运输业中的蒸汽透平、燃气轮机及余气、废气透平,制冷、低温装置中的透平膨胀机以及航空发动机上的涡轮装置等;另一类是将叶轮的机械能转变为工质的压力能、动能,使之成为叶轮式工作机,例如:能源动力工业和冶金、化工、石油工业中的压缩机、鼓风机、通风机、风扇以及航空发动机上的压气机等。尽管这两类装置(以下简称涡轮与压气机)在工作原理上很不相同,但从流体力学与气动热力学的观点上看,两者具有许多共性,并且构成了工程热物理学科气动热力学分支的主要研究内容。

以下三个方面:(1)叶轮机械中二维与三维跨声速流场的高效率高分辨率高精度数值方法;(2)叶栅通道中粘性分离流动、湍流拟序结构、涡系拓扑结构分析以及转轮与湍流模式研究;(3)静动叶片排间的干扰、激波一边界层相互作用的非定常性及在结构或非结构网格下多级叶片排湍流 Navier-Stokes 方程组的数值计算,可以认为是当代工程热物理学科气动热力学分支的三大前沿课题。本书正是面对这些课题论述国内外研究的最近进展,尤其是作者自己在这一领域所取得的最新成果。该书第一作者王保国博士是位数学、力学功底深厚的中青年流体力学学术带头人之一。他治学严谨,处理问题强调物理直观,科学研究注重联系实际,在理论和实践两方面都经受过比较全面的训练并且吸取了众家从事科学研究的精华,学会了进行科学研究的本领,使得他在之后的研究工作与教学工作中得心应手,取得了丰硕成果,显示了他具有深邃的理论与实践功底。20年来,他在跨声速流函数方法、欧拉方程与 Navier-Stokes 方程的高效率高分辨率解法,结构网格与非结构网格下恢复函数的重构以及迎风紧致高精度格式等方面作了大量的工作,并在 AIAA、ASME、力学学报、应用数学和力学、计算物理、空气动力学学报、工程热物理学报等国内外重要学术刊物上发表了 160 余篇论文,其中许多文章被 EI、SCI 检索收录,得到了同行们的认可和关注,而且多次获奖。本书的第二作者黄虹宾博士对发动机流场计算和实验技术都较为熟悉,他在协助王保国博士归纳、整理本专著的丰富素材中做了大量工作。

这部专著共分十二章,书中讲述的方法作者们都亲自在计算机上进行过数值实践并感到具有工程使用价值,其中有些方法是作者自己提出或发展的算法,并有创新。全书叙述清晰、论证细致、逻辑严密,反映出作者们治学严谨、一丝不苟的敬业精神和工作作风。毫无疑问,他们的这部著作必为我国内流数值计算,尤其是叶轮机械复杂流场的计算注入新鲜血液,并填补国内这方面出版的空白。

王保国

1998 年 8 月于中国科学院

前 言

叶轮机跨声速及亚声速流场的计算是现代叶轮机气动设计的必备工具,同时也是国际上正在大力发展的前沿课题之一。二十几年来,作者一直从事着这方面的数值计算与研究工作,并深深感到国内很需要有人去写一部能反映近年来叶轮机复杂流场计算新方法方面的书籍,以弥补国内这方面出版的不足。

在编著本书时,作者努力使本书具有如下几个特色:(1)书中所讨论的方法是作者亲自在计算机上进行过数值实践并感到富有工程使用价值的数值方法;(2)这些方法都是针对现代叶轮机气动设计的工程实践而提出的一些关键措施,因此书中既有能用于解决二维流动的快速高效算法,也有能用于三维计算的高效方法;(3)针对现代压气机与涡轮(透平)中普遍存在的激波间断问题,书中详细讨论了作者在这方面的研究工作,尤其是近年来作者提出和发展的一系列改善捕捉激波质量的数值方法;(4)书中包含了最近几年国际上刚刚发展起来的非结构网格算法和作者在这方面所从事的最新研究工作;(5)动叶顶隙对现代叶轮机械的效率和损失有重大影响,该书对此问题做了详细的讨论,并归纳了作者与他的同事们在这方面所完成的最新工作。全书分十二章,注意了二维与三维问题分别阐述,以充分反映它们针对不同的问题所具有的特色。全书以讲述跨声速流场的计算为主,亚声速流场的许多计算方法均可从跨声速算法的特殊情况取得。

在本书的写作过程中曾得到许多学术界的前辈和同行们的批评、指正和鼓励。在本书初稿完成之后,首先请著名计算流体力学家卞荫贵教授、著名叶片机专家北京航空航天大学一级教授崔济亚先生以及清华大学陈佐一教授分别审阅,他们曾提出了许多改进意见。之后,著名气体动力学家、中国科学院院士俞鸿儒教授又做了审阅,并对本书的出版给予了热情鼓励和大力的推荐。为此作者根据前辈们的建议又用了一年半多的时间对该书作了全面的修正,进一步突出了上述五大特色。另外,书中的部分内容,作者还曾在清华大学工程力学系硕士生和博士生的高等计算流体力学课上作过多次讲授。当然,本书肯定还有不完善和不足之处,恳请广大读者批评指正。

最后,万分感谢我国工程热物理学科的创始人、中国科学院院士吴仲华教授以及崔济亚教授、陈乃兴教授、卞荫贵教授、沈孟育教授对作者的长期培养和付出的辛勤劳动;感谢著名应用数学家、我国计算物理学科的创始人秦元勋教授多年来给予的帮助和热情鼓励。没有这些导师们的引路和支持,就不会有这本专著的创作与问世!

作 者

1998年3月于北京

目 录

第一章 绝对与相对曲线坐标系中 守恒与非守恒粘性气动热 力学基本方程组的多种表 达形式	(1)	§ 2.1 相对曲线坐标系中 N-S 方程组的一种展开形式	(18)
§ 1.1 高阶张量的梯度、旋度和散 度表达式	(1)	§ 2.2 通量雅科比矩阵的统一 表达式	(19)
§ 1.2 绝对曲线坐标系中 N-S 方 程组的表达	(2)	§ 2.3 特征值、特征矢量矩阵及 其逆矩阵	(20)
§ 1.3 两类坐标系间的转换	(5)	§ 2.4 关于粘性与传热项的归 纳处理	(22)
§ 1.4 相对曲线坐标系中 N-S 方 程组	(7)	第三章 跨声速二维流动中的流 函数激波捕捉法	(24)
§ 1.5 相对曲线坐标系中基于双 方程模型的湍流 N-S 方程 组	(10)	§ 3.1 流函数主方程及方程判 型	(24)
§ 1.6 关于标量函数法和矢量函 数法	(12)	§ 3.2 密度函数及“密度双值” 问题	(25)
1.6.1 标量函数法	(12)	§ 3.3 一个新的密度方程	(26)
1.6.2 矢量函数法	(13)	§ 3.4 人工可压缩性及耗散和弥 散问题	(26)
§ 1.7 两种典型的弱守恒流函 数方程	(14)	3.4.1 关于物理耗散、弥散及数值 耗散、弥散问题	(27)
1.7.1 第一种弱守恒流函数主方 程	(14)	3.4.2 人工密度	(27)
1.7.2 第二种弱守恒流函数主方 程	(15)	§ 3.5 守恒型差分算子及不等 间距差分离散	(29)
§ 1.8 回转面叶栅粘性方程组与 平面叶栅欧拉方程	(15)	§ 3.6 密度方程的求解及积分 起始线的选定	(31)
1.8.1 三种形式的粘性 S_1 流面气 动方程	(15)	§ 3.7 强隐式求解过程(SIP)	(31)
1.8.2 平面叶栅欧拉方程	(16)	§ 3.8 用预测—校正算法求解 密度方程	(33)
§ 1.9 对一个气动方程组的讨 论	(16)	§ 3.9 对称型辅助矩阵及改进 的强隐式格式	(34)
第二章 三维相对曲线坐标系中 特征矢量矩阵及其逆矩阵 ...	(18)	3.9.1 构造对称型的 $[B]$ 矩阵	(34)
		3.9.2 构造对称的辅助矩阵 $[\bar{B}]$	(35)
		3.9.3 数值求解过程	(35)
		§ 3.10 关于迭代的收敛性问	

题	(35)	边界条件的处理	(54)
3.10.1 原始 SIP 过程中一些系数的数学性质	(35)	4.6.4 考查几种因素对槽道波后流场的影响	(55)
3.10.2 改进的 SIP 中一些系数的数学性质	(36)	4.6.5 关于分区计算的应用	(59)
3.10.3 关于 $[B + \bar{B}]$ 阵的对称正定性	(37)	4.6.6 一个重要的启发	(60)
3.10.4 改进的 SIP 过程及收敛条件	(38)	第五章 跨声速二维流动中的主流与边界层迭代算法	(61)
§ 3.11 确定最佳松弛因子	(39)	§ 5.1 法伏尔平均下的湍流方程组及模化问题	(61)
§ 3.12 典型算例及与实验的比较	(39)	§ 5.2 关于二维和三维边界层方程	(63)
第四章 跨声速二维流动中的激波拟合分区计算法	(42)	§ 5.3 边界层的参考焓方法及叶栅总压损失的估算	(64)
§ 4.1 双曲型方程组的特征方程和特征面法矢量	(42)	§ 5.4 用改进的格林-伊斯特方法计算有旋转效应和流片厚度变化的边界层问题	(66)
§ 4.2 曲线坐标系下定常三维无粘流基本方程组特征分析	(42)	5.4.1 基本方程	(67)
§ 4.3 曲线坐标系下非定常二维无粘流基本方程组特征分析	(43)	5.4.2 层流边界层的计算	(68)
§ 4.4 旋转流面上超声速流基本方程组特征分析	(44)	5.4.3 湍流边界层和尾迹的计算	(69)
§ 4.5 用特征线法计算叶栅流通道激波前的超声速区	(46)	5.4.4 考查旋转效应和流片厚度变化对边界层的影响	(69)
4.5.1 影响域、依赖域及特征线理论的初值定理	(46)	§ 5.5 数值分析跨声速无粘主流与边界层迭代	(71)
4.5.2 关于栅前脱体曲线激波的自动伸展	(47)	5.5.1 无粘流计算——跨声速流函数法	(71)
4.5.3 内点或边界点的单元分析	(48)	5.5.2 边界层计算——改进的滞后卷吸法	(72)
4.5.4 栅前周期性条件的实现	(49)	5.5.3 主流和边界层的相互作用	(72)
4.5.5 考查几种因素对超声速区计算的影响	(50)	5.5.4 松弛因子 ω 在迭代计算中的作用	(72)
§ 4.6 通道激波后跨声速区或亚声速区流场的计算	(51)	5.5.5 使用逆模式迭代的数值分析	(72)
4.6.1 计算网格与边界条件	(51)	5.5.6 含半逆模式的迭代过程	(73)
4.6.2 槽道波的调整和兰金-雨贡纽(Rankine-Hugoniot)条件	(52)	§ 5.6 典型算例及与实验数据的比较	(73)
4.6.3 “斜网格”下出口区周期性		第六章 求解二维跨声速流欧拉方程的二阶高分辨率格式	(75)
		§ 6.1 关于曲线坐标系中构造哈顿的 TVD 格式问题	(75)
		6.1.1 关于守恒型方程、守恒型差	

分格式、格式的单调性及线性与非线性格式问题	(75)	8.1.7 新增点后三角形破坏域的搜索	(96)
6.1.2 修正通量的五点二阶 TVD 格式	(76)	8.1.8 粘性 O 型网格的生成与剖分	(96)
6.1.3 曲线坐标系中隐式 TVD 格式	(76)	§ 8.2 二维空间中非结构网格生成的典型算例	(96)
6.1.4 关于非齐次双曲型守恒律方程组的问题	(78)	§ 8.3 三维空间中四面体非结构网格生成的方法	(98)
§ 6.2 高分辨率的矢通量分裂——TVD 杂交新格式	(79)	8.3.1 基本方法简介	(98)
6.2.1 矢通量分裂和迎风差分	(79)	8.3.2 典型的三维算例	(98)
6.2.2 杂交新格式	(80)	§ 8.4 一种快速生成五面体非结构网格的方法	(101)
6.2.3 边界条件	(82)	8.4.1 拟 S_1 面上非结构网格的生成技术	(101)
6.2.4 典型算例	(82)	8.4.2 搜索破坏域的堆栈方法	(102)
§ 6.3 隐式 LU-TVD 杂交新格式	(83)	8.4.3 拟 S_1 面上网格的分区处理	(103)
6.3.1 隐式 LU 格式	(84)	8.4.4 关于网格点的空间映射	(104)
6.3.2 LU-TVD 杂交新格式	(84)	8.4.5 典型算例	(104)
6.3.3 典型算例	(85)	§ 8.5 绝对坐标系下非结构网格的 N-S 方程计算	(108)
第七章 求解二维跨声速流的多层网格法	(87)	8.5.1 绝对坐标系下的控制方程组	(108)
§ 7.1 求解跨声速流函数方程的 FAS 型多层网格法	(87)	8.5.2 离散方程的建立	(109)
7.1.1 算子 L_k^{-1} 与 L_{k-1} 的具体表达式	(89)	8.5.3 无粘通量的计算	(109)
7.1.2 多层网格法中计算量的计算	(90)	8.5.4 粘性通量的计算	(110)
7.1.3 四个典型算例	(90)	8.5.5 离散方程求解	(111)
§ 7.2 求解欧拉方程组的 FAS 型多层网格法	(91)	8.5.6 自适应技术	(112)
第八章 非结构网格的生成及其在叶栅流场计算中的应用	(93)	8.5.7 典型算例	(113)
§ 8.1 一种非结构网格的生成方法	(93)	§ 8.6 非结构网格下恢复函数的构造和一类三阶加权高分辨率格式	(120)
8.1.1 二维非结构网格生成原理	(93)	8.6.1 考虑恢复函数后非结构网格流场计算的主要步骤	(120)
8.1.2 初始网格的生成	(94)	8.6.2 二次恢复多项式的一种构造方法及一类三阶加权高分辨率格式	(121)
8.1.3 网格单元的分类	(94)	第九章 三维空间中构造高分辨率和高精度格式的初步研究和应用	(124)
8.1.4 新增点位置的确定	(94)	§ 9.1 处理光滑流场的一种构	
8.1.5 网格尺度分布函数的确定	(95)		
8.1.6 网格贴体性能的改进	(95)		

造高格式的方法	(124)	维流场的数值模拟及	
§ 9.2 处理流场间断面的限制		多重网格方法	(153)
器方法	(126)	10.3.1 三维计算中的多重网格	
§ 9.3 一种实用的三阶精度高		方法	(153)
分辨率迎风型杂交格式 ...	(127)	10.3.2 有实验结果的典型算例	
9.3.1 湍流 N-S 方程组	(127)	与涡系分析	(155)
9.3.2 有限体积离散及迎风杂交		第十一章 相对坐标系下不考虑叶	
格式	(128)	片顶隙流动的三维欧拉	
9.3.3 粘性项处理及四阶紧致差		与 N-S 方程组的计算	(183)
分	(129)	§ 11.1 相对坐标系中三维跨	
9.3.4 湍流模型及粘性网格设计	(130)	声速欧拉流的一个高	
9.3.5 边界条件的提法及数值处		分辨率显格式	(183)
理	(130)	11.1.1 含源项欧拉方程	(183)
9.3.6 典型算例	(130)	11.1.2 三维问题中哈顿的修正	
§ 9.4 结构网格下恢复函数的		数值通量计算	(184)
三点迎风紧致格式	(132)	11.1.3 非齐次项的处理和新的	
9.4.1 一维单个方程	(133)	限制函数	(185)
9.4.2 三维欧拉方程组	(135)	11.1.4 主方程离散与推进求解	(185)
9.4.3 典型算例	(138)	11.1.5 典型算例与讨论	(185)
第十章 绝对坐标系下三维涡轮		§ 11.2 相对坐标系下结构网格	
流场欧拉与 N-S 方程的		的三维 N-S 方程计算	(186)
计算	(142)	11.2.1 相对坐标系下守恒型 N-S	
§ 10.1 三维欧拉方程的计算	(142)	方程组的三种积分形式	
10.1.1 基本方程及主要符号约		及有限体积离散	(186)
定	(142)	11.2.2 通量的局部线化	(188)
10.1.2 通量线化及有限体积离		11.2.3 新的通量分裂措施	(188)
散	(143)	11.2.4 隐式差分格式及右端项	
10.1.3 LU 型新的杂交格式	(143)	的三种处理方案	(189)
10.1.4 数值通量的计算	(144)	11.2.5 跨声速压气机转子算例	(189)
§ 10.2 三维湍流 N-S 方程组		§ 11.3 相对坐标系下非结构	
的计算	(144)	网格的三维 N-S 方程	
10.2.1 三维层流守恒型 N-S 方		计算	(190)
程组	(144)	11.3.1 相对坐标系下叶轮机械	
10.2.2 工程计算湍流流场的主要		N-S 方程组与定解条件	(190)
方法	(145)	11.3.2 适合于跨声速涡轮叶片	
10.2.3 有限体积离散技术及粘		的湍流模式	(193)
性项的处理技巧	(146)	11.3.3 相对坐标系下主方程组	
10.2.4 三维 LU-TVD 杂交新格		的离散与求解	(196)
式	(147)	11.3.4 涡轮静子流场的三维粘	
10.2.5 典型算例及讨论	(148)	性计算	(203)
§ 10.3 跨声速涡轮内复杂三		11.3.5 涡轮转子流场的三维粘	

性计算	(205)	§ 12.2 控制方程组的无量纲化及湍流模式	(219)
11.3.6 涡轮级内多排叶片粘性流场的计算	(208)	§ 12.3 定解条件	(223)
第十二章 考虑动叶片顶隙流动的跨声速压气机流场		§ 12.4 考虑顶隙流动的单级跨声速压气机转子流场计算及与实验比较	(224)
三维 N-S 方程计算	(216)	12.4.1 叶片顶部附近流动分析	(227)
§ 12.1 网格的生成	(216)	12.4.2 壁面流型分析	(234)
12.1.1 不考虑顶隙时三维压气机或涡轮流场的网格生成	(216)	12.4.3 叶道内流动分析	(235)
12.1.2 考虑顶隙时三维网格的生成方法	(218)	12.4.4 流动损失分析	(247)
		参考文献	(250)

第一章 绝对与相对曲线坐标系中守恒与非守恒粘性气动热力学基本方程组的多种表达形式

本章以张量分析为工具,在绝对曲线坐标系(惯性坐标系)与旋转曲线坐标系(相对坐标系、非惯性坐标系)中严格推导了叶轮机粘性气动热力学基本方程组的多种形式,并得到如下结论:(1)当叶轮旋转角速度 ω 随时间变化时,所得基本方程组的形式并不同于目前流行的等 ω 基本方程组,这一研究为叶轮机起动和变速过程的理论分析提供了新的基本方程;(2)借助张量计算,可以严格地从数学上保证将绝对曲线坐标系中的粘性气体气动热力学基本方程组变换到旋转曲线坐标系中。

§ 1.1 高阶张量的梯度、旋度和散度表达式

本节符号约定:

$\mathbf{a}$ —— 表示任一矢量, a_k, a^k 分别为 $\mathbf{a}$ 的协变、逆变分量;

$\mathbf{\Pi}$ —— 表示任一二阶对称张量,常表示为 $\mathbf{\Pi} = e^i e^k \tau_{jk}$;

$\mathbf{T}$ —— 表示任一张量,本节多用它表示三阶张量,如 $\mathbf{T} = e^i e^j e^k t_{ijk}$;

∇_i —— 表示协变导数。

本节及以下诸节均采用爱因斯坦求和规约,于是主要的梯度公式为

$$\nabla \mathbf{a} = e^i e^j \nabla_i a_j \quad (1.1)$$

$$\nabla \mathbf{\Pi} = e^i e^j e^k \nabla_i \tau_{jk} \quad (1.2)$$

特别是,如令 $\mathbf{R}$ 表示矢径,于是它的梯度便得单位张量:

$$\nabla \mathbf{R} = g_{ij} e^i e^j \quad (1.3)$$

主要旋度公式为

$$\nabla \times \mathbf{\Pi} = \epsilon^{ijk} e_k e^\beta \nabla_i \tau_{j\beta} \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{T} = \epsilon^{ijk} e_k e^\alpha e^\beta \nabla_i t_{j\alpha\beta} \quad (1.5)$$

注意式中 ϵ^{ijk} 为埃丁顿(Eddington)张量。主要的散度公式为

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \tau^{ij} e_j)}{\partial x^i} \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = e_j e_k \nabla_i t^{ijk} \quad (1.7)$$

另外,拉普拉斯算子即 $\nabla \cdot \nabla$,有时简记为 Δ ,其作用于高阶张量

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{g} g^{ik} e_j \nabla_k a^j] \quad (1.8)$$

$$\Delta \Pi = g^{ij} e^k e^a \nabla_i \nabla_j \tau_{ka} \quad (1.9)$$

文献[1]中有上述九个公式的推导办法,可供参考。作为上述公式的应用,给出任意曲线坐标系中变形率张量 ϵ 应力张量 $\tau = e^i e^j \tau_{ij}$ 、粘性应力张量 $\Pi' = e^i e^j \tau'_{ij}$ 与耗散函数 Φ 的通用表达式:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (1.10)$$

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2} (\nabla^i v^j + \nabla^j v^i) \quad (1.11)$$

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} - g_{ij} p$$

$$\tau^{ij} = \tau'^{ij} - g^{ij} p$$

$$\tau'^{ij} = \mu \left(g^{ia} g^{jb} + g^{ib} g^{ja} - \frac{2}{3} g^{ij} g^{ab} \right) \nabla_a v_b \quad (1.12)$$

$$\Phi = \Pi' : \nabla \mathbf{V} = \tau'^{ij} \nabla_j v_i \quad (1.13)$$

式中 P 、 $\mathbf{V}$ 、 μ 分别为压力、速度和粘性系数; v_i 和 v^i 分别为 $\mathbf{V}$ 的协变与速度的逆变分量; ∇^i 为逆变导数。

§ 1.2 绝对曲线坐标系中 N-S 方程组的表达

令任意曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) 的基矢量为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; 并且令笛卡尔坐标系 (y^1, y^2, y^3) 的单位矢量为 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$; v^1, v^2, v^3 为速度 $\mathbf{V}$ 在 (x^1, x^2, x^3) 中的逆变分速; $\hat{v}^1, \hat{v}^2, \hat{v}^3$ 为 $\mathbf{V}$ 沿 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 方向上的分速并且还经常将它们分别写为 u, v, w 于是文献[1]和文献[2]便分别推导出下面两种形式的 N-S 方程组:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sqrt{g}\rho \\ \sqrt{g}\rho v^1 \\ \sqrt{g}\rho v^2 \\ \sqrt{g}\rho v^3 \\ \sqrt{g}e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{bmatrix} \sqrt{g}\rho v^j \\ \sqrt{g}(\rho v^j v^1 + g^{1j}p) \\ \sqrt{g}(\rho v^j v^2 + g^{2j}p) \\ \sqrt{g}(\rho v^j v^3 + g^{3j}p) \\ \sqrt{g}(e + p)v^j \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \sqrt{g} \left(\nabla^j v^1 + \frac{1}{3} g^{1j} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ \mu \sqrt{g} \left(\nabla^j v^2 + \frac{1}{3} g^{2j} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ \mu \sqrt{g} \left(\nabla^j v^3 + \frac{1}{3} g^{3j} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ \sqrt{g} \left(\mu \tilde{M}^j + \lambda g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{N}^1 \\ \tilde{N}^2 \\ \tilde{N}^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sqrt{g}\rho \\ \sqrt{g}\rho u \\ \sqrt{g}\rho v \\ \sqrt{g}\rho w \\ \sqrt{g}e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{bmatrix} \sqrt{g}\rho v^j \\ \sqrt{g} \left(\rho v^j u + g^{ij} p \frac{\partial y^1}{\partial x^i} \right) \\ \sqrt{g} \left(\rho v^j v + g^{ij} p \frac{\partial y^2}{\partial x^i} \right) \\ \sqrt{g} \left(\rho v^j w + g^{ij} p \frac{\partial y^3}{\partial x^i} \right) \\ \sqrt{g}(e + p)v^j \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \sqrt{g} N^{1j} \\ \mu \sqrt{g} N^{2j} \\ \mu \sqrt{g} N^{3j} \\ \sqrt{g} \left(\mu M^j + \lambda g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.15)$$

式中 μ 和 λ 分别为粘性系数和热传导系数; T 为温度; 算子 ∇^j 为逆变导数; ρ 和 p 为密度和压强; 而 $N^{ij}, M^j, \tilde{N}^i$, 和 $\tilde{M}^j$ 的定义分别为

$$N^{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial x^k} + g^{jk} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial x^k} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) g^{jk} \frac{\partial y^j}{\partial x^k}, i = 1, 2, 3 \quad (1.16a)$$

$$\tilde{N}^i = \left(p - \frac{1}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} g^{ij}) + \mu \sqrt{g} \Gamma_{jk}^i \nabla^j v^k - \sqrt{g} \rho v^j v^k \Gamma_{jk}^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.16b)$$

$$M^j = \left[\hat{v}^k \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial y^k} + \hat{v}^k \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial y^j} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \hat{v}^j \right] \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \quad (1.16c)$$

$$\tilde{M}^j = g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) + v^k \nabla_k v^j - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) v^j \quad (1.16d)$$

显然(1.14)式与(1.15)式有两个重大差别:(1)前者为弱守恒型,后者为强守恒型;(2)前者的运动方程是分别沿 e_1, e_2, e_3 方向,而后者则沿 i_1, i_2, i_3 方向。

在笛卡尔坐标系下,则(1.15)式又可退化为如下形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)}{\partial z} = 0$$

式中

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$$

$$[\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho uv & \rho vw \\ \rho uv & \rho v^2 + p & \rho vw \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + p \\ (e+p)u & (e+p)v & (e+p)w \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{E}_v, \mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \lambda \partial T / \partial x \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} & \lambda \partial T / \partial y \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} & \lambda \partial T / \partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} = \left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i}_1 + v\mathbf{i}_2 + w\mathbf{i}_3$$

$$e = \rho \left(C_v T + \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \right)$$

在柱坐标系 \$(r, \theta, z)\$ 下, 如果令 \$(r, \theta, z)\$ 的基矢量为 \$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\$, 并用 \$\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z\$ 表示单位基矢量, 显然有

$$\mathbf{e}_\theta = r\mathbf{i}_\theta, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{i}_z, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = \mathbf{i}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{i}_r$$

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i}_r + v\mathbf{i}_\theta + w\mathbf{i}_z = V_r\mathbf{i}_r + V_\theta\mathbf{i}_\theta + V_z\mathbf{i}_z$$

注意这里 \$u, v, w\$ 分别表示 \$V_r, V_\theta, V_z\$ 的值并且这里 \$V_r, V_\theta, V_z\$ 是物理分速度而不是速度的协变分量。于是(1.14)式又可退化为如下弱守恒型:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(E - E_v)}{\partial r} + \frac{\partial(F - F_v)}{r\partial\theta} + \frac{\partial(G - G_v)}{\partial z} = N$$

式中

$$U = r[\rho, \rho u, r\rho v, \rho w, e]^T$$

$$[E, F, G] = r \begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho uv & \rho wu \\ r\rho uv & r(\rho v^2 + p) & r\rho wv \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + p \\ (e + p)u & (e + p)v & (e + p)w \end{bmatrix}$$

$$[E_v, F_v, G_v] = r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ r\tau_{\theta r} & r\tau_{\theta\theta} & r\tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} & \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} & \lambda \frac{\partial T}{r\partial\theta} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} & \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{\theta r} \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r\partial\theta} - \frac{v}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{rr} \\ \tau_{\theta\theta} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} = \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \partial u / \partial r \\ \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{u}{r} \\ \partial w / \partial z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i}_r + v\mathbf{i}_\theta + w\mathbf{i}_z$$

$$N = [0, \rho v^2 + p - \tau_{\theta\theta}, 0, 0, 0]^T$$

在绝对曲线坐标系中,又可采用积分形式给出 N-S 方程组的更精炼更通用的表达式即

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} W d\Omega + \oint_{\partial\Omega} E \cdot n d\sigma = 0$$

式中

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{V} \\ e \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{V} \\ \rho \mathbf{V} \mathbf{V} - \mathbf{\Pi} \\ (e + p) \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Pi}' - \lambda \nabla T \end{bmatrix} = E_1 + E_2$$

这里 $\mathbf{\Pi}$ 与 $\mathbf{\Pi}'$ 分别表示应力张量与粘性应力张量; $\mathbf{V}, p, T, e, \lambda$ 分别表示速度, 压强, 温度, 单位体积气体所具有的总内能, 热传导系数, 应力张量 $\mathbf{\Pi}$ 可表达为

$$\mathbf{\Pi} = \mu [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})_c] - \left[p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \nabla \cdot \mathbf{V} \right] \mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = ui_1 + vi_2 + wi_3$$

$$\nabla \mathbf{V} = (\nabla u) i_1 + (\nabla v) i_2 + (\nabla w) i_3$$

$$(\nabla \mathbf{V})_c = i_1(\nabla u) + i_2(\nabla v) + i_3(\nabla w)$$

在上式中, $\mathbf{I}$ 为单位张量, μ' 为膨胀粘性系数^[3]。 E_1 与 E_2 分别表示无粘部分的通量与粘性部分的通量。在实际计算中, E_1 经常被整理为如下形式:

$$E_1 = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{V} \\ \rho u \mathbf{V} + p i_1 \\ \rho v \mathbf{V} + p i_2 \\ \rho w \mathbf{V} + p i_3 \\ (e + p) \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

§ 1.3 两类坐标系间的转换

本节考虑两类坐标系:一类是绝对曲线坐标系,另一类是相对曲线坐标系;令 (r, θ, z) 和 (r, φ, z) 分别表示绝对曲线坐标系下的圆柱坐标和相对曲线坐标系下的圆柱坐标,而 i_φ 为 (r, φ, z) 系下沿 φ 向的单位矢量; (ξ^1, ξ^2, ξ^3) 和 (η^1, η^2, η^3) 分别为绝对曲线坐标系下的任意曲线坐标和相对曲线坐标系下的曲线系;用 $D_a/Dt, \partial_a/\partial t, \partial_a/\partial \xi^i$ 和 $D_R/Dt, \partial_R/\partial t, \partial_R/\partial \eta^i$ 分别表示绝对曲线坐标系与相对曲线坐标系下的随体导数(又称全导数)或偏导数;本节用 e_0 表示单位体积气体具有的相对广义内能,即

$$e_0 = \rho \left(E + \frac{\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}}{2} \right) \quad (1.17)$$

式中 $\mathbf{W}$ 为相对速度,而绝对速度用 $\mathbf{V}$ 表示,显然有

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{W} + \mathbf{U} \quad (1.18)$$

并且定义 $\dot{\omega}$ 为

$$\dot{\omega} = \frac{D_R \omega}{Dt} \quad (1.19)$$

两类坐标系间转换的重要关系可归纳如下:

$$\frac{\partial_a f}{\partial t} = \frac{\partial_R f}{\partial t} - \omega \frac{\partial_R f}{\partial \varphi} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial_a \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial_R \mathbf{B}}{\partial t} - \omega \frac{\partial_R \mathbf{B}}{\partial \varphi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad (1.21)$$

$$\frac{D_a f}{Dt} = \frac{D_R f}{Dt} \quad (1.22)$$

$$\frac{D_a \mathbf{B}}{Dt} = \frac{D_R \mathbf{B}}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad (1.23)$$

$$v^i \frac{\partial_a \mathbf{B}}{\partial \xi^i} = w^i \frac{\partial_R \mathbf{B}}{\partial \eta^i} + \omega \frac{\partial_R \mathbf{B}}{\partial \varphi} \quad (1.24)$$

借助上面五个关系式便可推出如下结果:

(1) 连续方程:

$$\frac{\partial_a \rho}{\partial t} + \nabla_a \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial_R \rho}{\partial t} + \nabla_R \cdot (\rho \mathbf{W}) = 0 \quad (1.26)$$

$$\nabla_a \cdot (\rho \mathbf{V}) = \nabla_R \cdot (\rho \mathbf{W}) + \omega \frac{\partial_R \rho}{\partial \varphi} \quad (1.27)$$

(2) 运动方程:

$$\frac{\partial_a (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla_a \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla_a \cdot \boldsymbol{\tau}_a \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial_R (\rho \mathbf{W})}{\partial t} + \nabla_R \cdot (\rho \mathbf{W} \mathbf{W}) + 2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} - \rho (\omega)^2 \mathbf{r} + \boxed{\rho r \dot{\omega} \mathbf{i}_\varphi} = \nabla_R \cdot \boldsymbol{\tau}_R \quad (1.29)$$

$$\frac{D_a \mathbf{V}}{Dt} = \frac{D_R \mathbf{W}}{Dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} - (\omega)^2 \mathbf{r} + \boxed{\dot{\omega} r \mathbf{i}_\varphi} = \frac{1}{\rho} \nabla_R \cdot \boldsymbol{\tau}_R \quad (1.30)$$

这里 $\boldsymbol{\tau}$ 为应力张量。

(3) 能量方程:

$$\rho \frac{D_a \left(E + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right)}{Dt} = \nabla_a \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) + \rho \dot{q} \quad (1.31)$$

$$\rho \frac{D_a}{Dt} \left[E + \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}}{2} - \frac{(\omega r)^2}{2} \right] = \nabla_R \cdot (\boldsymbol{\Pi}' \cdot \mathbf{W}) + \rho \dot{q} + \frac{\partial_R p}{\partial t} - \boxed{\rho \omega \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \dot{\omega} - \rho r \dot{\omega} (\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{W})} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial R e_0}{\partial t} + \nabla_R \cdot [(e_0 + p) \mathbf{W}] = \nabla_R \cdot (\mathbf{H}' \cdot \mathbf{W}) + \rho \dot{q} + \rho(\omega)^2 (\mathbf{W} \cdot \mathbf{r})$$

$$\boxed{-\rho r \dot{\omega} (\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{W})}$$
(1.33)

对于以上各式,有一点需要特别说明:凡是用黑线框住的项都含有 $\dot{\omega}$,它反映了旋转角速度的变化,这是目前一般文献中未被反映的。

§ 1.4 相对曲线坐标系中 N-S 方程组

在相对曲线坐标系下选取两个坐标,一个是笛卡尔坐标 $(\hat{y}^1, \hat{y}^2, \hat{y}^3)$,另一个是任意曲线坐标系 (η^1, η^2, η^3) ;令 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 为 $(\hat{y}^1, \hat{y}^2, \hat{y}^3)$ 下的单位基矢量;令 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为 (η^1, η^2, η^3) 的基矢量,而此坐标系的度量张量为 $\mathbf{g}_{ij}$,相应的基本度量张量行列式的值为 g ;令 $\mathbf{W}$ 仍表示相对速度,并且相对曲线坐标系固连于叶轮上随叶轮绕轴一起转动;将 $\mathbf{W}$ 沿 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 方向的分速记作 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ 或者 $\tilde{w}^1, \tilde{w}^2, \tilde{w}^3$;并且用 w^i 表示 $\mathbf{W}$ 在 (η^1, η^2, η^3) 系下的逆变分量;于是将(1.26)、(1.29)和(1.33)式适当归并整理便得到相对曲线坐标下新的 N-S 方程组:

$$\frac{\partial_R}{\partial t} \begin{bmatrix} \sqrt{g}\rho \\ \sqrt{g}\rho\hat{u} \\ \sqrt{g}\rho\hat{v} \\ \sqrt{g}\rho\hat{w} \\ \sqrt{g}e_0 \end{bmatrix} + \frac{\partial_R}{\partial \eta^j} \begin{bmatrix} \sqrt{g}\rho w^j \\ \sqrt{g} \left(\rho w^j \hat{u} + g^{ij} p \frac{\partial \hat{y}^1}{\partial \eta^j} \right) \\ \sqrt{g} \left(\rho w^j \hat{v} + g^{ij} p \frac{\partial \hat{y}^2}{\partial \eta^j} \right) \\ \sqrt{g} \left(\rho w^j \hat{w} + g^{ij} p \frac{\partial \hat{y}^3}{\partial \eta^j} \right) \\ \sqrt{g} (e_0 + p) w^j \end{bmatrix} - \frac{\partial_R}{\partial \eta^j} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \sqrt{g} \hat{N}^{1j} \\ \mu \sqrt{g} \hat{N}^{2j} \\ \mu \sqrt{g} \hat{N}^{3j} \\ \sqrt{g} \left(\mu \hat{M}^j + \lambda g^{ij} \frac{\partial T}{\partial \eta^j} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{g} S^1 \\ \sqrt{g} S^2 \\ \sqrt{g} S^3 \\ \sqrt{g} S^4 \end{bmatrix}$$
(1.34)

式中 $\hat{N}^{ij}, \hat{M}^j, S^i, S^4$ 的定义如下:

$$\hat{N}^{ij} = \frac{\partial_R \eta^k}{\partial \hat{y}^i} \frac{\partial_R \eta^j}{\partial \hat{y}^k} \frac{\partial_R \hat{w}^i}{\partial \eta^k} + g^{jk} \frac{\partial_R \hat{w}^i}{\partial \eta^k} - \frac{2}{3} (\nabla_R \cdot \mathbf{W}) g^{jk} \frac{\partial_R \hat{y}^i}{\partial \eta^k}$$
(1.35a)

$$\hat{M}^j = \left[\tilde{w}^k \frac{\partial_R \tilde{w}^i}{\partial \hat{y}^k} + \tilde{w}^k \frac{\partial_R \tilde{w}^k}{\partial \hat{y}^i} - \frac{2}{3} (\nabla_R \cdot \mathbf{W}) w^i \right] \frac{\partial_R \eta^j}{\partial \hat{y}^i}$$
(1.35b)

$$S^i = 2\omega r \rho w^j \frac{\partial(\varphi, r)}{\partial(\eta^j, \hat{y}^i)} + r \rho(\omega)^2 \frac{\partial_R \hat{y}^i}{\partial r} \boxed{-\rho \dot{\omega} \frac{\partial_R \hat{y}^i}{\partial \varphi}}, i = 1, 2, 3$$
(1.35c)

$$S^4 = \rho w^i(\omega)^2 r \frac{\partial_R r}{\partial \eta^i} \boxed{-\rho \dot{\omega} (r)^2 w^i \frac{\partial_R \varphi}{\partial \eta^i}}$$
(1.35d)

当然上述方程组在 $\dot{\omega} = 0$ 的情况下又可写为下面通用形式: