PICAPD NEVANLINNA JULIA
PICARD NEVANLINNA JULIA
EL PICARD NEVANLINNA JULIA
OREL PICARD NEVANLINNA JULIA
BOREL PICARD NEVANLINNA JU
A BOREL BOREL
ULIA BOREL BOREL PICAR
JULIA NEVANLINNA BOREL PI
JULIA NEVANLINNA BOREL
JULIA NEVANLINNA BOREL
PICARD NEVANLINNA
PICARD NEVANLINNA
PICARD

整函数与亚纯函数

柏盛桄 编

华中师范大学出版社

序

整函数与亚纯函数论是复分析中一个重要的分枝，从数学界前辈熊庆来先生以来，我国数学工作者对这一分枝作出过许多重要的贡献。近十余年来又出现了杨乐、张广厚同志的优秀的、首創性的工作。

柏盛桄同志对数学有坚实的基础，对教学有丰富的经验，对整函数与亚纯函数论有深入的研究。他根据讲授该分枝课程的讲义，编出本书，其一个特点是说理清楚，讲解详明，对已有的若干证明作了改进；对基础课程中沒有讲授的某些知识作了补充，本书另一特点是取材精当，深入浅出，从而在不太大的篇幅內讲述了整函数与亚纯函数值分布论的基本內容，读者在学了数学专业基础课及专业基础课后，就可阅读本书；以此为基础，可以较快地达到有关分枝的研究前沿。

欣闻本书即将出版，谨乐为介绍，希望我国青年数学工作者在前人工作的基础上，刻苦钻研，青出于蓝，对本书有关分枝以至整个数学作出重大的贡献。

余家荣

1987年3月于武汉

前　言

整函数与亚纯函数是函数论的一大分支，值分布理论是整函数与亚纯函数所讨论的主要问题之一。关于值分布理论的研究，起源于 Picard 定理，而后 Julia 和 Borel 以及 Valiron 等数学家作了进一步的研究，得到了许多成果。到 1925 年，由 Nevanlinna 得出的关于亚纯函数的两个基本定理，总括并统一了前述的所有成果，奠定了整函数与亚纯函数值分布理论的基础，而称之为 Nevanlinna 理论。我国数学界在值分布理论的研究中，熊庆来、李国平、庄圻泰等老前辈早在三、四十年代就做出了许多有独创见解的成果。近年来，一批中青年数学工作者如杨乐、张广厚等，也在值分布理论的研究方面获得了许多新的成果，在国际上走在前列。

本书作为整函数与亚纯函数值分布理论的入门，它着重介绍了整函数与亚纯函数方面的基本内容。全书共分八章：第一章介绍了无穷乘积和 Poisson-Jensen 公式；第二、三章是关于整函数的级的概念，以及与级的概念相联系的整函数值分布理论方面的某些定理；第四章是介绍一种关于 Picard 定理的初等证明方法；第五、六章是关于亚纯函数的基本概念，着重证明了 Nevanlinna 的两个基本定理，特别是叙述并证明了 Nevanlinna 第二基本定理的各种不同形式及其在整函数与亚纯函数值分布理论中的应用；第七章介绍了正规族理论及其在值分布方面的应用；第八章则是在 Nevanlinna 基本定理的基础上最后证明了有限正级和无限级亚纯函数充满圆序列的存在，进而证明了 Borel 方向的存在性。由于函数的上极限和下极限的概念在值分布的研究中几乎处处用到，而现在一般采用的《数学分析》教材中又涉及较少，故以附录形式列入书末，供读者随时查阅。

为使初学者易于理解和接受，在本书的编写过程中，笔者对许多概念的叙述和定理的证明，都不同程度地作了某些改进，并力求做到清楚明了、准确肯定、通俗易懂；对定理的证明也力求做到简明扼要、详略适度，尤其对证明过程较长的定理，注意做到层次分明。

本书的初稿，曾在华中师大数学系本科77级、79级、80级学生中作为选修课《整函数》的讲义试用过三次；后经修改和补充，又在84级函数论专业研究生和四年级本科生分别作为专业基础课和选修课《整函数与亚纯函数》的讲义试用过两次，虽经多次试用和修改补充，但缺点和失误在所难免，望读者批评指正！

编　者

目　　录

第一章　无穷乘积 Poisson-Jensen 公式

在整个开平面解析的函数叫做整函数，无穷远点是整函数唯一的孤立奇点。

整函数在无穷远点的罗朗展开式也就是它在整个开平面的泰劳展开式，即

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

当无穷远点是可去奇点时，则$f(z)$是一个常数。当无穷远点是$n(\geqslant 1)$阶极点时，则$f(z)$是一个n次多项式，也就是整有理函数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n.$$

此时，依代数基本定理，在复平面上$f(z)$有n个零点z_1，$z_2,\cdots,z_n$并且$f(z)$可分解为如下形式的乘积：

$$f(z)=f(0)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_k}\right).$$

若当无穷远点是$f(z)$的本性奇点，则称$f(z)$是一个超越整函数。例如e^z，$\sin z$及$\cos z$都是超越整函数。此时，$f(z)$可展为无穷级数：

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{1}$$

若超越整函数（1）有无穷多个零点z_1，$z_2,\cdots,z_n\cdots$，$(z_n\neq 0)$是否也能象多项式那样将$f(z)$分解为如下无穷乘积的形式

$$f(z)=c\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\ (c\text{为常数})?$$

而将一个有无穷多个零点的超越整函数表示为无穷乘积的形式是我们研究整函数时所必须的。为此，我们将简要地叙述关于无穷乘积的基本知识。

§1 无 穷 乘 积

1.1 无穷乘积的收敛与发散

设a_1，$a_2,\cdots,a_n,\cdots$是一个复数序列，则

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1a_2\cdots a_k\cdots \tag{1}$$

叫做无穷乘积。a_k叫做第k个因子。令

$$P_n = a_1a_2\cdots a_n,$$

假定所有的a_k都不为零，则P_1，$P_2,\cdots,P_n,\cdots$是一个非零的 复数序列。若

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P$$

且P为不等于零的有限数，则称乘积（1）为收欽，P叫 做 乘 积（1）的值，记为

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} a_k.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

不存在或其极限P等于0，则称乘积(1)为发散。例如

1° $\left(\frac{1.4}{2.3}\right)\left(\frac{2.5}{3.4}\right)\cdots\left(\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right)\cdots\cdots,$

$$P_n = \frac{n+3}{3(n+1)} \to \frac{1}{3}\ (当 n\to\infty),$$

所以乘积收斂。

2° $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}\cdots\cdots,$

$$P_n = \frac{1}{n+1} \to 0(当 n\to\infty),$$

所以乘积发散.

3° $\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}\cdots\cdots$,

$$P_n=n+1\to\infty\ (\text{当}n\to\infty),$$

所以乘积发散。

4° $2\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}\cdots\cdots$,

$$P_{2n}=1\qquad P_{2n+1}=2$$

所以乘积发散。

我们假定乘积中所有的因子a_k不为零，是因为若有一个因子为零，则乘积的值必定为零，而与组成该乘积的数列无关，这样就没有什么可研究的了。但我们的目的是要将一个函数表示为无穷乘积，当函数有零点时希望表达式也能成立。因此，有必要将乘积收敛的定义作如下推广：若乘积中有零因子，如果存在一个正整数N，当$n>N$时$a_n\neq0$，而且乘积

$$a_{N+1}a_{N+2}\cdots\cdots a_{N+2}\cdots\cdots$$

收敛，则称乘积(1)为收敛，其值为

$$(a_1a_2\cdots a_N)(a_{N+1}a_{N+2}\cdots)=0.$$

若乘积

$$a_{N+1}a_{N+2}\cdots a_{N+k}\cdots$$

发散，或者有无穷多个$a_n=0$，则称乘积(1)发散。

乘积(1) 收敛的一个必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1。$$

事实上，若乘积(1) 收敛，则存在一个正整数N，当$n>N$时$a_n\neq0$。令

$$P_{N+k}=a_{N+1}a_{N+2}\cdots a_{N+k},$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}P_{N+k}=P\neq0.$$

所以当$n>N$时，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}a_{N+k}=\lim_{k\to\infty}\frac{P_{n+k}}{P_{n+k-1}}=\frac{P}{P}=1.$$

但这个条件不是充分的，如上面例2°中

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

但乘积不收敛。

从以后的讨论中我们将会看到，将无穷乘积写成

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$$

的形式是很有好处的，显然，这时乘积收敛的必要条件就成了

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0,$$

这就与无穷级数收敛的必要条件相类似了。

1.2　无穷乘积收敛性的判别法

无穷乘积理论的一个基本问题，就是给定了无穷乘积的所有因子，要去判断它是否收敛。我们下面只建立一个一般性的定理，这个定理把研究无穷乘积的收敛性问题，归结为相应的无穷级数的收敛性问题。

定理1.1　无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_k) \tag{2}$$

收敛的必要和充分条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) \tag{3}$$

收敛。其中

$\alpha_n = \log|1+u_n|$，$\beta_n = \arg(1+u_n)$，$(-\pi \leqslant \beta_n < \pi)$

证　设

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)$$

则

$$\log P_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1+u_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{\log|1+u_k|+i\arg(1+u_k)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_n+i\beta_n)\ .$$

若乘积(2)收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P\neq 0\ ,$$

由（4），则级数（3）也收敛。反之，若级数（3）收

乘积（2）也收敛。

定理1.2 设无穷乘积为

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)\ ,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$$

同时收敛。其中α_n和β_n与定理1.1中相同。

证 先设

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

收敛。

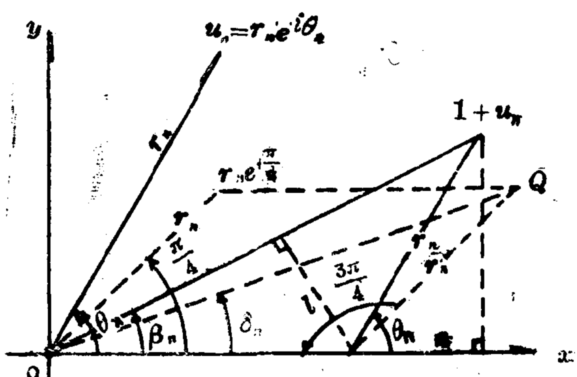

图1-1

令$r_n=|u_n|$，则当n充分大，$r_n<\frac{1}{2}$。于是有

$$e^{-2r_n}<\frac{1}{1+2r_n}=1-(2r_n)+(2r_n)^2-(2r_n)^3+\cdots$$

$$1-r_n\leqslant|1+u_n|\leqslant 1+r_n$$

所以

$$\cdots r_n\quad \text{or}\ |1-u_n|\leqslant \cdots 2r_n,$$

则

$$|\alpha_n|<2r_n\ . \qquad (5)$$

由图1-1，当$0\leqslant\beta_n\leqslant\pi$时，有

$$\sin\beta_n=l\leqslant r,$$

同理当$-\pi\leqslant\beta_n<0$时，有

$$\sin|\beta_n|\leqslant r$$

所以

$$|\beta_n|\leqslant\arcsin r_n\quad \cdots r_n\ (因\ r_n<\frac{1}{2}) \qquad (6)$$

由(5)和(6)

$$|\alpha_n|+|\beta_n|\leqslant 3r_n$$

因级数

$$\sum_1 r_n=\sum |u_n|$$

收敛，所以级数

$$\sum(|\alpha_n|+|\beta_n|)$$

收敛。

其次，若先假定$\sum\limits_{n=1}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$收敛，

$$\arg u_n=\theta_n（见图1-1）\ (-\pi<\theta_n\leqslant\pi)$$

则当　$|\theta_n|\leqslant\frac{\pi}{4}$时，

$$|1+u_n|\geqslant 1+a=1+r_n\cos\theta_n\geqslant 1+\frac{r_n}{\sqrt{2}},$$

所以

$$|\alpha_n| = |\log|1+u_n|| \geqslant \log\left(1+\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right) > \frac{r_n}{2\sqrt{2}} \tag{7}$$

当 $\frac{3\pi}{4} \leqslant \theta_n \leqslant \pi$ 时，有

$$|1+u_n| < 1 - \frac{r_n}{2\sqrt{2}},$$

所以

$$|\alpha_n| = |\log|a+u_n|| > \left|\log\left(1-\frac{r_n}{2\sqrt{2}}\right)\right| > \frac{r_n}{2\sqrt{2}}. \tag{8}$$

当 $\frac{\pi}{4} < \theta_n < \frac{3\pi}{4}$，则 $|\beta_n| > \delta_n$ (见图 1-1).

又

$$\frac{\sin\delta_n}{r_n} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{oQ}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{1+r_n} > \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

所以

$$|\beta_n| \geqslant \delta_n \geqslant \sin\delta_n \geqslant \frac{r_n}{2\sqrt{2}}. \tag{9}$$

由(7)，(8)，(9)

$$|\alpha_n| + |\beta_n| > \frac{r_n}{2\sqrt{2}},$$

所以当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$ 收斂时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ 亦收斂。

根据定理1.2和定理1.1，立即可得下面的系理，

系理1.1 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

收斂，则无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$$

收斂。

定义1.1 若无穷乘积

$$(1+|u_1|)(1+|u_2|)\cdots(1+|u_n|)\cdots$$

收斂，则称乘积

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots$$

为绝对收斂。

根据上面的定理和系理，凡绝对收斂的无穷乘积一定是收斂的。但反过来不成立，即收斂的无穷乘积不一定绝对收斂。我们称收斂但不绝对收斂的乘积为条件收斂。例如

$$(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\cdots$$

当 n 为偶时，$P_n=1$。当 n 为奇时，$P_n=\frac{n+1}{n}$，所以乘积是收斂的。另一方面，级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散，所以乘积不绝对收斂。

1.3 函数项的无穷乘积

假设无穷乘积

$$[1+u_1(z)][1+u_2(z)]\cdots[1+u_n(z)]\cdots \tag{10}$$

中所有的 $u(z)$ 都是在同一个区域 G 上的解析函数。令

$$f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}[1+u_k(z)],$$

如函数列$\{f_n(z)\}$在 G 上一致收斂于 $f(z)$，则称乘积(10)在 G 上一致收斂于 $f(z)$。

定理1.3 如果对 G 上所有的 z，及对每一个正整数 k 有

$$|u_k(z)|\leqslant M_k,$$

其中 M_k 与 z 无关，且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

收斂，则乘积(10)在 G 上一致收斂于一个解析函数 $f(z)$。

证 设

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+M_k).$$

因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}M_k$$

收敛，所以

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+M_k)$$

收敛。

设

$$f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}[1+u_k(z)],$$

当 $n>m$

$$f_n(z)=f_m(z)\prod_{k=m+1}^{n}[1+u_k(z)],$$

所以

$$\begin{aligned}|f(z)-f_m(z)|&=|f_m(z)|\left|\prod_{k=m+1}^{n}[1+u_k(z)]-1\right|\\&\leqslant\prod_{k=1}^{m}(1+M_k)\left[\prod_{k=m+1}^{n}(1+M_k)-1\right]\\&=\prod_{k=1}^{n}(1+M_k)-\prod_{k=1}^{m}(1+M_k)\\&=P_n-P_m,\end{aligned}$$

因 P_n 趋于一个有限极限，所以对任意 $\varepsilon>0$，可求得一个 m，使当 $n>m$ 时，有

$$0<P_n-P_m<\varepsilon,$$

所以当 $n>m$ 及 z 是 G 上任一点，有

$$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon.$$

由于 m 只与 ε 有关，所以$\{f_n(z)\}$在 G 上一致收敛于一个函数 $f(z)$. 已知 $u_n(z)$ 在 G 上解析，所以 $f(z)$ 在 G 上也是解析的。

1.4　整函数的因子分解定理

回到本章开头提出的问题：如果整函数$f(z)$有无穷个零点z_1，z_2，…，z_n，…，是否能将$f(z)$分解为如下的形式：

$$f(z)=C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right),$$

这个问题的主要困难是乘积

$$\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\cdots \tag{11}$$

不一定对所有开平面上的z值为收斂，例如零点为

$$-1,\ -2,\ \cdots -n,\ \cdots$$

的整函数，则相应的乘积

$$\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdots$$

对所有的z值不一定都收斂，如$z=1$时，因级数

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散，所以乘积不收斂。

我们是否可以将乘积(11)的每个因式乘上另一个因式，使乘积(11)在开平面上任何有界区域内绝对并一致收斂，同时又不致于产生$\{z_n\}$以外的新零点？Weierstrass 解决了这个问题。他将乘积(11)的每一个因式乘上一个指数函数（因指数函数在平面上无零点），结果达到了目的。

定理1.4　设不恒为零的整函数$f(z)$有无穷多个零点

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots$$

假定每个$z_n\neq 0$。则存在一列多项式

$$Q_n(z_n)=\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n},$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

使乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{Q_n(z)} \tag{12}$$

收敛于一个整函数 $G(z)$ 并以 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 为零点。

证 将 $f(z)$ 的无穷个零点按其模从小到大排列为

$$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant|z_3|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|\leqslant\cdots,$$

这时有

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty.$$

如某些零点有相同的模，它们的次序可任意排列。

任意给定一个正数 R，若 $|z_m|\leqslant R<|z_{m+1}|$，我们在 $|z|<R$ 内考虑级数

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+Q_n(z)\right], \tag{13}$$

其中每个 $\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$ 取主值。令

$$u_n(z)=\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+Q_n(z).\ (n>m)$$

当 $|z|<R$，

$$\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)=-\left(\frac{z}{z_n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2\cdots-\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n}-\cdots,$$

$$Q_n(z)=\left(\frac{z}{z_n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n},$$

所以

$$u_n(z)=-\frac{1}{\lambda_n+1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n+1}-\frac{1}{\lambda_n+2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n+2}-\cdots$$

$$\therefore\quad |u_n(z)|\leqslant\left|\frac{z}{z_n}\right|^{\lambda_n+1}\left[1+\left|\frac{z}{z_n}\right|+\left|\frac{z}{z_n}\right|^2+\cdots\right].$$

当 n 充分大，有

$$\left|\frac{z}{z_n}\right|\leqslant\frac{R}{2R}=\frac{1}{2},$$

所以

$$|u_n(z)|\leqslant\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{\lambda_n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right]$$