

周光炯 严宗毅 许世雄 章克本 编著

流体力学

下册

高等教育出版社

035

168

368565

流 体 力 学

下 册

周光桐 严宗毅 许世雄 章克本 编

高等教育出版社

(京)112 号

内 容 提 要

本书是根据国家教委高等学校理科数学、力学教材编审委员会力学编审组制定的教学大纲编写的。全书分上、下两册出版,此书为下册。

主要内容为:液体表面波,粘性不可压缩流动基础,边界层理论,气体动力学初步,传质理论初步等。书末附有十种重要附录供读者参考。

10.31/15

流 体 力 学

周光炯 严朱毅 许世雄 章克本 编著

高等教育出版社出版,
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 16.875 字数 400 000

1993 年 5 月第 1 版 1993 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—1 605

ISBN7-04-004157-X/O·1200

定价 6.25 元

目 录

第七章 液体表面波	1
7.1 基本方程组、边界条件及初始条件	2
(一) 基本方程	3
(二) 边界条件	4
(三) 初始条件	6
7.2 量级估计与线性近似	7
7.3 平面小振幅简谐进行波	10
7.4 驻波、波的反射	16
7.5 有限等深度液体中的波动	20
(一) 有限等深度液体中的进行波	20
(二) 有限等深度液体中的驻波	22
(三) 浅水情况	23
7.6 界面波	26
(一) 基本方程及边界条件	26
(二) 求解	27
(三) 讨论	30
7.7 表面张力波	31
(一) 基本方程及其解	31
(二) 表面张力波的性质及讨论	32
7.8 群速度	33
7.9 波动的能量、波阻	36
(一) 波动的动能	36
(二) 波动的势能	37
(三) 能量的传递	38
(四) 波阻	40
7.10 初始扰动引起的波动	41
7.11 斯托克斯波简介	42

7.12 浅水波动.....	46
(一) 浅水波方程.....	47
(二) 线性长波解.....	49
(三) 特征线法解.....	50
(四) KdV 方程及孤立波.....	55
小结.....	58
习题.....	59
第八章 粘性不可压缩流动基础	62
8.1 粘性不可压缩流动的基本方程组.....	62
8.2 相似律.....	70
8.3 粘性流动的一般性质.....	82
(一) 粘性流体运动的有旋性.....	82
(二) 粘性流体运动机械能的耗散性.....	84
(三) 粘性流体运动中涡旋的扩散性.....	85
8.4 粘性流体的流动图案.....	88
8.5 层流流动的精确解.....	96
(一) 两平行平板间的粘性流动.....	97
(二) 无限长直圆管中的粘性流动.....	103
(三) 平板在自身平面内振动所引起的流动.....	109
8.6 低雷诺数流动.....	112
(一) 斯托克斯流动.....	113
(二) 斯托克斯阻力公式.....	115
(三) 斯托克斯近似的局限性和奥森近似.....	121
(四) 润滑理论.....	125
8.7 层流向湍流的过渡.....	128
8.8 湍流运动的雷诺方程组.....	134
8.9 混合长理论.....	141
*8.10 湍流的模式与统计理论简介.....	147
8.11 光滑圆管中的湍流运动.....	152
8.12 粗糙圆管中的湍流运动.....	162
小结.....	170
习题.....	171

第九章 边界层理论	182
9.1 边界层的概念和它的厚度.....	182
(一) 位移厚度.....	184
(二) 动量厚度.....	185
(三) 温度与浓度边界层的名义厚度.....	186
9.2 平面层流速度与温度边界层方程组.....	187
9.3 动量与热量之间的雷诺类比.....	194
9.4 相似性解的概念和它的存在条件.....	196
9.5 沿半无穷加热恒温平板的层流速度与温度边界层.....	203
(一) 速度边界层.....	205
(二) 温度边界层.....	213
9.6 垂直半无穷加热恒温平板层流自由对流的速度与温度边界层.....	220
9.7 不存在相似性解的层流边界层.....	228
9.8 定常平面层流边界层的动量与能量积分关系式.....	230
(一) 动量积分关系式.....	231
(二) 能量积分关系式.....	233
9.9 沿平面加热恒温曲壁的层流速度与温度边界层.....	235
(一) 速度边界层.....	236
(二) 温度边界层.....	246
9.10 平面湍流速度与温度边界层方程组.....	249
9.11 平面湍流速度边界层的多层模型和它的时均速度分布.....	254
9.12 平面湍流速度边界层内一些重要湍流量的实验结果.....	256
(一) 相对湍流度.....	257
(二) 雷诺应力.....	259
(三) 湍流(或涡)动量扩散率(或系数) ν_t	260
(四) 间歇因子.....	261
9.13 沿半无穷加热恒温平板的湍流速度与温度边界层.....	262
(一) 速度边界层.....	263
(二) 温度边界层.....	267
9.14 平面湍流速度与温度边界层的连续壁律模型.....	270
9.15 沿半无穷平板的层流-湍流混合边界层.....	275
(一) 普朗特法.....	276

(二) 朱考斯卡斯法	277
9.16 层流边界层的稳定性和它向湍流边界层的过渡	279
9.17 边界层的分离	286
*9.18 自由湍流和它的一些性质	292
*9.19 平面湍射流	297
小结	301
习题	302
第十章 气体动力学初步	306
10.1 无粘性可压缩流体运动方程组	306
10.2 小扰动在可压缩流体中的传播 声速和马赫数	309
(一) 小扰动在可压缩流体中的传播和声速	309
(二) 马赫数	315
10.3 伯努利方程和气体动力学函数	317
(一) 无粘性可压缩流体定常等熵流动的伯努利方程	317
(二) 气体动力学函数(一维等熵关系式)	319
(三) 速度系数 λ	324
10.4 一维定常等熵管流	327
(一) 变截面管道内流动分析	328
(二) 管截面积和流动马赫数的关系	331
(三) 流量函数	333
10.5 正激波	336
(一) 激波现象	336
(二) 正激波基本方程组	338
(三) 静止正激波	339
(四) 运动正激波	346
10.6 拉瓦尔喷管内的流动	352
*10.7 等截面直圆管内具有壁摩擦和管壁加热的流动	357
(一) 等截面直圆管内具有壁摩擦的绝热流动	358
(二) 等截面直圆管内加热无壁摩擦的流动	360
小结	362
习题	363
第十一章 传质理论初步	368

11.1	质量传递的基本概念和它的主要传递方式	368
11.2	混合物系统中的浓度、速度和单位面积的质量(或摩尔)流量	371
(一)	浓度	371
(二)	速度	372
(三)	单位面积的质量(或摩尔)流量	372
11.3	菲克第一定律与质量扩散率(或系数)	373
11.4	双组分混合物的连续性方程	375
11.5	扩散方程的应用	382
11.6	湍流扩散方程	390
11.7	污染物在大气中的扩散	391
11.8	层流与湍流的浓度边界层方程	395
11.9	热量与质量之间的雷诺类比	397
11.10	沿半无穷平板的层流浓度边界层	399
(一)	第一施米特数 $Sc=1$	400
(二)	第一施米特数 $Sc \neq 1$	401
11.11	质量积分关系式	404
11.12	沿半无穷平板的湍流浓度边界层	405
	小结	407
	习题	408

附录

(A)	参考书,参考文献、照片和教学录像	411
(B)	符号表	428
(C)	国际单位制	437
(D)	某些常见流体的热物理性质	438
(E)	正交曲线坐标系中的流体力学方程组	449
(F)	矢量与张量分析初步	465
(G)	热力学基础知识	480
(H)	中英文术语对照表	485
(I)	中英文人名对照表	506
(J)	习题答案	512

第七章 液体表面波

处于平衡状态的流体,当它的某部分受到某种扰动时,平衡便遭到破坏,在重力或其它恢复力的作用下,使扰动在流体中传播,形成一种波动现象。

例如,扰动静止水面使之产生一坑洼(图 7.1),由于坑洼处

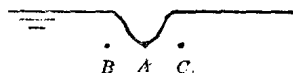


图 7.1 扰动的传播

点的压强与同一高度近傍流体 B 、 C 点的静压强有差异(坑洼处压强较小),产生压强梯度,使 B 、 C 处的水向坑洼 A 处运动,这一方面使 A 处水得到补充,坑洼缩小,同时由于惯性作用 A 处水面恢复到平衡位置后仍继续向上运动;另一方面, B 、 C 处的水流走后,将造成该处水的空缺,又由 B 、 C 处水面下降来填补。这样,原先 A 处的坑洼变为 A 处水面的升高和近旁 B 、 C 处水面的下降。这一过程的产生和继续发展,形成了扰动在水面的传播,即水波。显然,在这里,重力起到了恢复力的作用,这种水波称重力波。

波动现象极为多见,风吹过水面形成风浪,船行进于水面产生船波,海水的潮汐涨落是潮波,海底地震引起的海浪称为海啸,等等。此外,空气和水中的声波,水面的涟漪也都是一些流体波动现象。

根据作用于流体上的恢复力为弹性力、重力、表面张力或科氏力,将流体中的波分为声波、重力波、毛细波(表面张力波)、惯性波及罗斯比波。

表 7.1 是海洋中的各类波动。

液体表面波包括重力波及毛细波,它们在自然界最为常见,同时又最多变化、内容最为丰富。本章主要介绍这种波动。

表7.1 海洋中的各种波动

波动类型	物理机制	典型周期	存在区域
声 波	可压缩性	10^{-2} — 10^{-6} 秒	海洋内部
毛 细 波	表面张力	$<10^{-1}$ 秒	空气与水交界面
风浪涌浪	重 力	1—25秒	同上
地震律波	重 力	10分—2小时	同上
内 波	重力和密度分层	2分—10小时	密度跃层
风 暴 潮	重力和地球自转	1—10小时	海岸线水域
潮 波	同 上	12—24小时	整个大洋层
行 星 波 (罗斯比波)	重力、地球自转、纬度 或海洋深度的变化	0(100天)	同上

7.1 节介绍液体波动基本方程组、初始条件及边界条件，7.2 节介绍量级估计及线性近似，使方程组简化。以后各节分别介绍各种波动和它们的特征，其中包括表面小振幅波、界面波、斯托克斯波及浅水长波等。

7.1 基本方程组、边界条件及初始条件

在讨论液体波动时，根据液体的物理性质、波动特征及它所处的环境，对所考虑的问题，能作适当的简化，以期获得较好的近似分析。现作如下几点假定：

- (1) 液体被认为是无粘性的，
- (2) 液体是不可压缩的，密度 ρ 被认为是常数，
- (3) 质量力只有重力，

(4) 液体运动是无旋的。根据亥姆霍兹定理，无粘性不可压缩流体在重力(有势力)作用下，从静止开始的任何运动，都将是无旋运动。

这样, 本章研究的只是无粘性不可压缩液体在重力作用下的无旋运动.

(一) 基本方程

设波动在某一具有自由表面的液体区域中产生, 取无波动时的静止液面为坐标系的 Oxy 平面, z 轴向上, 自由面升高为 $z = \xi$, 液体深度为 $-d(x, y)$.

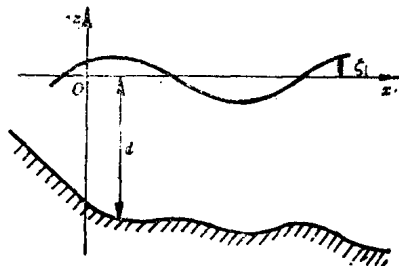


图 7.2 波动坐标系

由于液体是不可压缩的, 连续性方程为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

同时, 无旋流动存在速度势 φ , 且 $\mathbf{v} = \nabla \varphi$,

将此代入上式后, 连续性方程变为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (7.1.1)$$

再由假定(1)–(4), 流动满足拉格朗日积分

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (7.1.2)$$

这样, 如果从式(7.1.1)解出速度势 φ , 并由 φ 得速度 v , 将它们代入式(7.1.2), 即可确定压强 p , 问题便得到解决.

不失一般性, (7.1.2)式中的积分常数 $f(t)$, 可取为零. 事实上, 作变换

$$\varphi_1 = \varphi - \int_0^t f(t) dt$$

即可将 f 纳入 φ_1 中, φ_1 仍满足拉普拉斯方程, 而(7.1.2)式之 f

已纳入左端第一项中, 因此可将(7.1.1)及(7.1.2)式写为

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (7.1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (7.1.4)$$

后面研究液体表面波动时将主要从(7.1.3)和(7.1.4)出发(以后应用时 φ_1 将写为 φ).

(二) 边界条件

波动液体的边界, 一般包括随时间而变化的自由表面和固定不动的底部(有时还有侧向边界). 对于固定不动的底部, 由拉普拉斯方程求解速度势只需一个运动学边界条件. 但在自由表面上, 其边界条件却不只是提一个运动学边界条件. 因为在问题未求解之前, 自由表面的位置未定, 因此还须提一个条件, 以同时确定自由面位置及速度势 φ . 这个边界条件就是动力学边界条件. 下面分别给出底部的运动学边界条件和自由表面的运动学和动力学边界条件.

1. 底部的运动学边界条件

在固定不动的底部边界上, 液体质点可沿边界面运动(无粘性假设). 设边界面为 $F(x, y, z) = 0$, 则由第3.9节 $DF/Dt = 0$, 边界条件为

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (7.1.5)$$

(请注意, 这里的 v 是分量, 一般与 u 和 w 一起出现; (7.1.4)中也有 v , 但与分量 v 的含义不同. 后面出现的 v' 也有类似情况.) 现底部由 $z = -d(x, y)$ 给出, 即底部边界面为 $F = z + d(x, y) = 0$. 将此代入式(7.1.5), 在 $z = -d(x, y)$ 上得

$$u \left|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial x} + v \left|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial y} + w \right|_{z=-d} = 0$$

或

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-d} = w \Big|_{z=-d} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial x} - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial y} \quad (7.1.6)$$

这是液体底部的运动学边界条件.

显然,在底为等深即 $d(x, y) = \text{常数}$ 的情形下,有

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-d} = 0 \quad (7.1.7)$$

2. 自由面上的运动学边界条件

设自由面为 $z = \xi(x, y, t)$, 则 $F(x, y, z, t) = z - \xi$, 由第 3.9 节运动学边界条件 $DF/Dt = 0$, 有

$$\begin{aligned} & \partial F / \partial t + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \\ &= - \frac{\partial \xi}{\partial t} - u \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{z=\xi} - v \left. \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|_{z=\xi} + w \Big|_{z=\xi} = 0 \end{aligned}$$

或

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\xi} = w \Big|_{z=\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{z=\xi} + v \left. \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|_{z=\xi} \quad (7.1.8)$$

这是自由面上的运动学边界条件.

3. 自由面上的动力学边界条件

动力学边界条件是指边界上压强的条件. 如果不考虑表面张力, 则自由表面两侧的压强必须相等. 设作用于自由面上的外界大气压为 $p_a(x, y, t)$, 液体的压强为 p , 则

$$p|_{z=\xi} = p_a \quad (7.1.9)$$

将之代入式(7.1.4), 应有

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\xi} + \left. \frac{v^2}{2} \right|_{z=\xi} + \frac{p_a}{\rho} + g\xi = 0 \quad (7.1.10)$$

这是无表面张力时的自由表面的动力学边界条件.

如果考虑表面张力, 则自由面两侧压强不相等, 差一个附加压强(式(1.1.22)), 即有

$$p = p_a + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (7.1.11)$$

其中 σ 为表面张力系数。现设波动为一维, $R_2 = \infty$, $\frac{1}{R_1} = -\xi'' /$

$(1 + \xi'^2)^{3/2}$ 。由于以后要讨论的是 $\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 为小量的情况, 故 (7.1.

11) 式取形式

$$p = p_a - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (7.1.12)$$

将此式代入 (7.1.3) 式, 得

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\xi} + \frac{v^2}{2} \Big|_{z=\xi} + \frac{p_a}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + g\xi = 0 \quad (7.1.13)$$

这是有表面张力时的自由表面的动力学边界条件。

(三) 初始条件

液体表面波动是由初始扰动引起的, 这种初始扰动通常考虑两种情形, 一种是初始有一液面位移

$$\xi(x, y, t) \Big|_{t=0} = f_1(x, y)$$

将此式代入式 (7.1.10), 且注意到初始时刻有 $v=0$, 就有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\substack{z=\xi \\ t=0}} + \frac{p_a}{\rho} \Big|_{t=0} &= -g\xi \Big|_{t=0} \\ &= -gf_1(x, y) = f(x, y) \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

这是自由面有初始位移时的初始条件。

另一种是初始时刻液面突然受到一个压强冲量, 于是液体将受作用而产生初速度。设冲量的作用在 $[0, \tau]$ 时间内发生, 这样, 经此一短时间后, τ 时刻的液体速度可由欧拉方程给出:

$$\mathbf{v} = \int_0^\tau \mathbf{F} dt - \frac{1}{\rho} \nabla \int_0^\tau p dt - \int_0^\tau (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dt$$

其中 $\int_0^\tau p dt = \pi$ (为一函数, 不要与圆周率混淆) 称压强冲量, 为一

有限量;而当 F 及 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 为一有限量时,积分后就为一小量(τ 为小量),故可略去,于是

$$\mathbf{v} = \nabla \left(-\frac{1}{\rho} \int_0^\tau p dt \right) = \nabla \left(-\frac{\pi}{\rho} \right) \quad (7.1.15)$$

这表明,自由面上的液体质点在受到冲量后将得到一个初始速度,其速度势(并由此知液体运动为无旋)

$$\varphi \Big|_{\substack{t=0 \\ z=\xi}} = -\frac{\pi(x, y, \xi)}{\rho} = g(x, y, \xi) \quad (7.1.16)$$

这是自由面有初始速度时的初始条件。

当然,对初始位移和初始速度同时存在的情况,只要同时列出(7.1.14)和(7.1.16)两个条件就可以了。

归纳基本方程(7.1.3)、(7.1.4)、边界条件(7.1.6)、(7.1.8)、(7.1.10)和初始条件(7.1.14)、(7.1.16),得到无表面张力时重力波问题的数学提法为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = 0 \quad [-d(x, y) \leq z \leq \xi(x, y, t)] \\ z = -d: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = -\frac{\partial d}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=-d} - \frac{\partial d}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{z=-d} \\ z = \xi: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=\xi} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{z=\xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\xi} + \frac{v^2}{2} \Big|_{z=\xi} + \frac{p_a}{\rho} + g\xi = 0 \\ t = 0: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\substack{t=0 \\ z=\xi}} = f(x, y) \\ \varphi \Big|_{\substack{t=0 \\ z=\xi}} = g(x, y, \xi) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \end{array} \right. \quad (7.1.17)$$

7.2 量级估计与线性近似

要严格求解上节所提出的带有边界条件和初始条件的问题

(7.1.17)是困难的。即使把问题进一步简化为二维、平底(等深度)、无表面张力等,还有两个难以克服的困难,一是自由面上的边界条件(7.1.8)、(7.1.10)是非线性的;二是自由面边界本身是待求的,即求解域本身就是未知的,因此必须根据波动的特征作进一步的简化。

一种简化是当波动的振幅相对于波长为小量,由此可使自由面边界条件线性化,获得小振幅波解;另一种简化是当液体深度相对于波长为小量,由此可使问题变为可解的非线性情形或线性情形,获得浅水长波解。本节主要介绍与小振幅波有关的问题。

以下用量级估计的方法分析问题(7.1.17)中各项的量级。

设波振幅 A 为自由面升高 ξ 的特征量,波长 λ 为波动水平方向的长度特征量,液体深度 D 为垂向长度特征量,波动周期 T 为时间的特征量,这样,速度 u, v, w 的特征量为 A/T ,速度势 φ 的特征量为 $A\lambda/T$,再设压强的特征量为 P 。于是,可将各物理量写为特征量与无量纲量的乘积:

$$\xi = A\xi'$$

$$x, y, z = \lambda(x', y', z')$$

$$t = Tt'$$

$$u, v, w = \frac{A}{T}(u', v', w') \quad (7.2.1)$$

$$\varphi = \frac{A\lambda}{T}\varphi'$$

$$p = Pp'$$

$$d = Dd'$$

其中带上标“'”的量为无量纲量。将上述各量代入问题(7.1.17)的第一、三、四、七各式后得

$$\begin{cases} \frac{A}{T\lambda} \nabla^2 \varphi' = 0, & -Dd' \leq \lambda z' \leq A\xi' \\ \frac{A}{T} w' = \frac{A}{T} \frac{\partial \xi'}{\partial t'} + \frac{A^2}{T\lambda} \left(u' \frac{\partial \xi'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \xi'}{\partial y'} \right), & \lambda z' = A\xi' \\ \frac{A\lambda}{T^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A^2}{T^2} \frac{v'^2}{2} + \frac{Pp'_a}{\rho} + Ag\xi' = 0, & \lambda z' = A\xi' \\ \frac{A\lambda}{T^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A^2}{T^2} \frac{v'^2}{2} + \frac{Pp'}{\rho} + \lambda g z' = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi' = 0, & -\frac{D}{\lambda} d' \leq z' \leq \frac{A}{\lambda} \xi' \\ w' = \frac{\partial \xi'}{\partial t'} + \frac{A}{\lambda} \left(u' \frac{\partial \xi'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \xi'}{\partial y'} \right), & z' = \frac{A}{\lambda} \xi' \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A}{\lambda} \frac{v'^2}{2} + \frac{PT^2}{A\lambda\rho} p'_a + \frac{gT^2}{\lambda} \xi' = 0, & z' = \frac{A}{\lambda} \xi' \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{A}{\lambda} \frac{v'^2}{2} + \frac{PT^2}{A\lambda\rho} p' + \frac{T^2}{A} g z' = 0 \end{cases} \quad (7.2.2)$$

若在上式中取小振幅假设

$$\frac{A}{\lambda} \ll 1 \quad (7.2.3)$$

即当波动的振幅 A 比波长 λ 小得很多时, 略去此小量, (7.2.2) 各方程变为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi' = 0, & -\frac{D}{\lambda} d' \leq z' \leq 0 \\ w' = \frac{\partial \xi'}{\partial t'}, & z' = 0 \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{PT^2}{A\lambda} p'_a + \frac{gT^2}{\lambda} \xi' = 0, & z' = 0 \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{PT^2}{A\lambda} p' + \frac{gT^2}{A} z' = 0 \end{cases}$$

回到有量纲量, 问题(7.1.17)线性化为