硕士生入学指导书
大学生应试指导书

大学数学考试指南

主编 黄光谷 孙清华
张运权 曹阳

华中理工大学出版社

大学数学考试指南

主　编　黄光谷　孙清华　张运权　曹　阳

副主编　詹前涌　熊德之　王一凡　夏循焱

主　审　徐蕴珍　焦屺江　胡友恩　王世敬

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

大学数学考试指南/黄光谷等　主编
武汉：华中理工大学出版社，1996.7
ISBN 7-5609-1304-0

Ⅰ.大…
Ⅱ.①黄…　②孙…　③张…　④曹…
Ⅲ.高等数学-自学参考资料
Ⅳ.013

大学数学考试指南
黄光谷等　主编
责任编辑：林化夷　李立鹏

华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山　邮编：430074）
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社照排室排版
中南三〇九印刷厂印刷
（湖北省安陆市九号信箱　邮编：432600）
*
开本：850×1168　1/32　印张：18.5　字数：474 000
1996 年 7 月第 1 版　1996 年 7 月第 1 次印刷
印数：1-15 000
ISBN7-5609-1304-0/O・151
定价：16.50 元

内 容 简 介

本书分为高等数学、工程数学与经济数学、模拟试题三大部分共四篇十二章.各章(节)包含考纲要求、内容提要、重点内容与常考内容、典型例题、复习题及其答案与提示等五大内容，可作为在校的本科、专科大学生或自学者作为学习和复习高等数学与工程数学等课程的参考书；也适合报考工学、理学、经济学、农林学等各类硕士研究生作为复习数学的配套教材.

序

我怀着喜悦的心情为《工程数学的内容、方法与技巧》丛书和《大学数学考试指南》各书作序，它们集众家之长，并具有各自的特色，主要表现在如下三个方面.

一、这些书的作者们在高等院校从事高等数学和工程数学教学多年，具有丰富的教学实践经验和长期教学研究经历.编写的这些书，是他们耕耘在大学数学教学园地上辛勤劳动的结晶.

二、这些书紧扣高等院校现在所使用的教材，是配合这些教材的较好的教与学辅导书.文字叙述精炼，通俗易懂，便于自学.

三、这些书考虑到不同层次的要求.由于这些书是根据国家教委制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及近年来《全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》的要求编写的，所以它们既能作为高等院校工科各专业的本(专)科学生学习高等数学和工程数学各课程的自学辅导书或习题课教材，也能作为报考工学、理学及经济、农林等类硕士研究生的数学复习资料之用.

由于这些书具有以上三大特点，因此，我相信它们的出版定能受到众多的大学生、自学者及大学数学教师、工程技术人员等的欢迎和青睐，它们将为高等学校数学教材的百花园中又增添一批奇葩.

华中理工大学教授　林化夷

1996年3月　武汉

前　言

高等数学与工程数学是各大、专院校工、理、农、林、财等各专业的必修基础课，也是这些专业的硕士研究生入学考试的必考课目．为了帮助在校生、自学者和考研究生复习好数学课目，编者根据国家教委近年颁发的《数学课程教学基本要求》（以下简称《要求》）和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》（以下简称《考纲》）的要求，积多年为大学生开设复习讲座之经验，编写出这本《大学数学考试指南》，作为大学生和考研生考前复习数学之教材．

全书分为三大部分共四篇计十二章．第一部分为“高等数学”共有上、下两篇含八章．考虑到一元微积分是基础，并兼顾到“数学三、四、五类”专业考生的需要，书中对前三章的编写较为详细，书写格式稍有不同，配备的复习题也较多，还有小结和综合题．第二部分为“工程数学与经济数学”，由线性代数、复变函数、概率统计、经济数学等四章组成，各专业的学生和考生可根据专业具体情况挑选使用．第三部分是十套（数学一至五类专业各两套）模拟试题及答案与提示，供学生和考生作为复习检测之用．为了适合理科学生和考生的更高要求，书中编写了有关内容并在前面加了 * 号．突出重点、难点和关键是本书的特色之一，因受篇幅限制不能面面俱到．对于本书从略的少数内容，读者可依据《要求》和《考纲》，对照所用教材复习，是不难掌握的．

各章（或节）包含着五个内容：《考纲》要求、内容提要、重点内容与常考内容、典型例题、复习题及其答案与提示．其中，“《考纲》要求”主要是针对“数学一”和“数学二”的相应专业而言的，《教学要求》和其它各类专业的考纲与其大同小异，不一一列举，其它专业的学生和考生复习时，可对照本专业《要求》和考纲作适当增删；“典型例题”是本书的主要内容，它以《教学要求》和 1987 年全国研

究生入学统考以来历年考题的难易程度、题目类型为依据，概括各类题型而精选的. 为了便于学生和考生复习、系统地掌握有关方法，书中对有些内容调整了顺序、作了适当的集中. 例如，将利用微分、积分和级数知识求极限等方法都安排到第一章，初学者可以跳过这些内容往后看，回头再补学.

本书具有适用面广、针对性强、知识摘要精、例题和复习题覆盖面广、综合性强、重点突出等特点，是大学生复习相应课程和报考各类硕士研究生备考数学的一本好教材.

本书的编写、出版得到华中理工大学出版社，武汉纺织工学院，国家教委高校工科数学课程教学指导委员会委员、《应用数学》杂志副主编、华中理工大学林化夷教授和武汉市洪山区教委贺贤座副主任等的热情关心和大力支持，在此我们对他们表示衷心的感谢！

本书编委还有（以姓氏笔划为序）：马俊　刘磊　宋占奎　李刚　杨云　吴振之　吴菊珍　张志军　张秋谨　罗嘉虹　胡友思　姚钲　焦屺江　喻国华　赖相麟　谭代富　穆汉林　魏正红.

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请各位同行和读者批评指正.

编　者

1996年4月于武汉

目　　录

第一篇　高等数学(上)

第一章　函数　极限　连续

《考纲》要求

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，简单应用问题的函数关系的建立.

数列极限的 ε-N 定义，函数极限的 ε-δ 定义和函数的左、右极限，无穷小，无穷大，无穷小的比较，极限四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理).

重点内容与常考内容

函数定义域的确定及函数符号的使用，函数的性质；利用各种方法求数列或函数的极限；函数极限与连续的讨论，闭区间上连续函数的性质.

考虑到读者在中学已详细地研读了有关函数的知识，本书从略. 本章以复习极限知识为重点，并将利用微分、积分和级数知识于求(或证)极限的方法也列入了本章，便于读者系统地掌握求(证)极限的各种方法.

I 极 限

内容提要

本部分主要介绍两种极限，即数列的极限与函数的极限，给出了它们的 ε-N 或 ε-δ 定义，研究了各种求（或证）极限的方法.

极限知识是高等数学的基础，初学高等数学的人觉得微积分神秘，就是因为过不了极限这个难关. 我们要复习好高等数学，首先就要很好地掌握极限的有关知识.

§1 极限的概念和定理

一、 数列的极限

1. 数列极限的概念

定义 1 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是一个确定的实数. 若对于任意给定的正数 ε，总存在某一个自然数 N，使得 $n>N$ 时，都有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ **收敛于** a，称 a 为**数列的极限**，并记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n \to \infty).$$

类似定义 1，我们可以写出 a 为各种无穷大量（或为无穷小量）的“ε-N”定义（略，留给读者）.

为了区别起见，当极限 a 为有限数（包括数零）时，我们称数列 $\{x_n\}$ 或变量 x_n **存在极限**.

2. 数列极限的主要定理

定理 1（唯一性） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它只有一个极限.

定理 2（有界性） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它必有界，即存在某个

正数 M,使得对于一切自然数 n,有

$$|x_n| \leqslant M.$$

定理 3(保号性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$(或$<0$),则对任意一个满足不等式 $a>a'>0$(或 $a<a'<0$)的 a',都存在正数 N,使得 $n>N$ 时,$a_n>a'>0$(或 $a_n<a'<0$). 即收敛数列从某项起,每项都与极限值同符号,且都大于某正数(或小于某负数).

定理 4(对不等式取极限) 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为收敛数列,且对正整数 N_0,当 $n>N_0$ 时,有 $a_n\leqslant b_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

定理 5(两边夹法则) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$,若存在某自然数 N_0,当 $n>N_0$ 时,有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

定理 6(四则运算法则) 若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是收敛数列,则$\{a_n\pm b_n\}$,$\{a_n\cdot b_n\}$,$\{a_n/b_n\}$($b_n\neq0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$)也都是收敛数列,且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n \pm \lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n \times \lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}a_n / \lim_{n\to\infty}b_n.$$

以上公式可以看作是对等式取极限.

定理 7(单调有界法则) 任何单调有界数列都存在极限. 特别地,单调递增有上界的数列和单调递减有下界的数列都存在极限.

***定理 8**(Cauchy 收敛准则) 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是:对任给的正数 ε,总存在某一个自然数 N,使得 $m,n>N$ 时,都有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

二、 函数的极限

1. 函数极限的概念

定义 2 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个空心邻域(即不包括点

x_0 的某邻域)内有定义，A 是一个确定的数，若对于任给的正数 ε，总存在某一正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 x 趋向于 x_0 时，以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0).$$

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，还可以把 a 推广为 $\pm\infty$ 与 ∞，或取 x_0 的特例 $x_0\pm0$(单侧极限的情形)；把 x_0(包括 $A=0$)推广为 $\pm\infty$ 与 ∞ 等情形. 这样一来，连同 x_0 与 A 为有限数[①]的通常情形，函数极限过程共有六种，极限结果共有四种(包括广义极限，即 A 为各种无穷大)，故函数的极限共有 $C_6^1\times C_4^1=24$ 种情形. 前述定义 2 只是其中的一种情形. 对于其余的 23 种情形，都可仿照定义 2，写出它们的所谓"ε-δ"定义，为了节省篇幅，这里就不写了，留给读者练习.

2. 函数极限的主要定理

我们仅以极限过程为 $x\to x_0$ 的情形，列出函数极限的主要性质和定理(其余五种情形是类似的，从略)，这些结果与数列极限的相应定理也是类似的. 关于这些定理的用处，我们将在本章 § 3 继续介绍.

定理 9(唯一性)　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它只有一个极限.

定理 10(局部有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某个空心邻域 $U^0(x_0)$，使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0)$ 内有界.

定理 11(局部保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或 <0)，则对任意正数 $r(0<r<|A|)$，存在 x_0 的某一空心邻域 $U^0(x_0)$，使得对一切 $x\in U^0(x_0)$，恒有 $f(x)>r>0$(或 $f(x)<-r<0$).

定理 12(对不等式取极限)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 皆存在，且存在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0,\delta')$，使得对一切 $x\in U^0(x_0,\delta')$，都有

---

① 当 A 为有限数时，我们亦称函数存在极限.

$f(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

定理 13（两边夹法则） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，且存在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0,\delta')$，使得对一切 $x\in U^0(x_0,\delta')$，都有 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

定理 14（四则运算法则） 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$皆存在，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$f(x)/g(x)$（$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$ 时）在 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x);$$
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\times\lim_{x\to x_0}g(x);$$
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)/g(x)]=[\lim_{x\to x_0}f(x)]/\lim_{x\to x_0}g(x).$$

定理 15（单调有界法则） 若函数 $f(x)$在点 a 的某一左邻域$(a-\delta,a)$内单调有界，那么左极限 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$存在. 对于单侧极限$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$也有类似的结果.

应注意，函数极限的单调有界法则，只对单侧极限成立. 例如图 1-1 中的函数 $y=f(x)$，它虽然在$(a-\delta,a+\delta)$内单调有界，但在点 a 却没有极限.

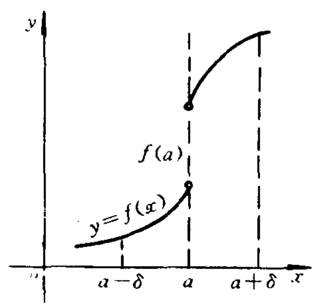

图 1-1

***定理 16**（Cauchy 准则） 设函数 $f(x)$在 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0,\delta')$内有定义，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是：对任给正数 ε，总存在某一正数 $\delta(<\delta')$，使得当 $0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

***定理 17**（Heine，或归结原则） 设 $f(x)$在 x_0 的某空心邻域

$U^0(x_0)$有定义，则函数极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$存在的充要条件是：对任何以$x_0$为极限，且含于$U^0(x_0)$的数列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

定理 18(左、右极限) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的充要条件是：

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A.$$

§2 利用极限定义的证题术

一、 ε-N 论证法

为了便于应用定义 1，我们对 ε-N 定义进行剖析.

定义 1 中的假设条件主要是由有一定次序的四句话组成的，它们反映了数列极限$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$的本质特征. 如果用逻辑符号"∀"表示"任给"，"∃"表示"存在"，则这四句话可以用如下四个不等式表示：

对任给的正数 ε， 总存在自然数 N， 使得 $n > N$ 时， 都有 $\lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$.	即	$\forall\ \varepsilon > 0$， $\exists\ N > 0$， 当 $n > N$， 有 $\lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$.

类似地，当$a = 0$或为各种无穷大时，也可以写出相应的不等式系列. 它们是从数列极限定义中提出的 ε-N 定义的缩写形式，掌握了它们就相当于抓住了 ε-N 方法的关键，我们今后运用 ε-N 论证法时经常用到它们.

由数列极限的 ε-N 定义，便产生了所谓"ε-N 论证法"，也就是利用数列极限(ε-N)定义的论证方法. 这是一种非常重要的证题方法，学习高等数学，首先就要熟悉和掌握这种方法.

例 1 试证 $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0(\lvert q \rvert < 1)$.

证 当 $q=0$ 时，显见命题成立，以下不妨设 $q\neq0$. $\forall\ \varepsilon>0$，令

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

取对数，有

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon,$$

由于 $|q|<1$，从而 $\lg|q|<0$，得

$$n>\lg\varepsilon/\lg|q|,$$

取

$$N=[\lg\varepsilon/\lg|q|];$$

于是，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N=[\lg\varepsilon/\lg|q|]$，当 $n>N$ 时，将以上过程逆推，都有 $|q^n-0|<\varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1).$$

以上证明过程中所用的方法，是根据 ε-N 定义，即 $\forall\ \varepsilon(>0)$，找出 $N(>0)$，从而得到结论的方法，这就是所谓“ε-N 论证法”.

以上证明过程，前面找 N 的一部分，实际上是“分析”的过程；找出 N 后，后面一部分叙述并下结论，实际上是“综合”的过程. 本例的证明过程，采用了分析与综合相结合的叙述方式，在我们熟悉了 ε-N 方法以后，书写上可以简略一些. 例如，以后就不每次交待“将以上过程逆推”等话了.

由本例可以看出，使用 ε-N 论证法的一般步骤是：

i)	$\forall\ \varepsilon>0$;
ii)	令 $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$[①];
iii)	推出 $n>\varphi(\varepsilon)$[②];
iv)	取 $N=[\varphi(\varepsilon)]$.

最后，用 ε-N 语言叙述并下结论.

上述一般步骤中关键的一步是 iii)，即推出一个关于 n 与 ε 的

---

① 有时 $\forall\ \varepsilon>0$ 及令某式 $<\varepsilon$，不在证题开始，而放在论证过程之中.

② 这里 $\varphi(\varepsilon)$ 是指含 ε 的式子，它不是唯一的.

不等式：$n>\varphi(\varepsilon)$，这一步完成了，N 也就随之找到了；剩下的只是叙述和下结论的工作，这是容易的.

怎样去推出不等式 $n>\varphi(\varepsilon)$ 呢？一般是从定义 1 中第四个不等式入手，并随时对照 $n>\varphi(\varepsilon)$，注意往 $n>\varphi(\varepsilon)$ 这一形状变形，这可简化表示为：

$$\text{由 } |x_n-a|<\varepsilon \Rightarrow n>\varphi(\varepsilon).$$

具体做题时，有时还需要运用对不等式进行适当的放大、缩小等变形技巧. 由于初等数学中大量的是等式变形，初学高等数学的人，往往不习惯进行不等式的变形，这正是需要克服的难点之一（当然还有理解抽象概念等困难，也需要解决），我们应在平时做题、看书中注意总结证题经验，培养解题的技巧.

例 2 用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

分析 直接从

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2n+3}{2(2n^2-1)}\right|<\varepsilon$$

解出 n 是比较麻烦的，但我们可以设法使用变形技巧. 由于我们要找的 N，主要是证实关于它的存在性，不一定要求出最小的 N，所以可以采取常用的不等式放大法（即扩大分子，或缩小分母，或二者兼用），将上述解法变简单.

在 $\left|\dfrac{2n+3}{2(2n^2-1)}\right|$ 的分子中，当 n 充分大时，起主要作用的是 $2n$，而在分母中，当 n 充分大时，起主要作用的是 $4n^2$. 如果我们把分子扩大为 $3n$（当然也可以扩大为 $4n$，$5n$，等等），又把分母缩小为 $3n^2$（当然也可以缩小为 $2n^2$，n^2，等等，读者不妨试一试），这样就有：

$$\left|\frac{2n+3}{2(2n^2-1)}\right|\leqslant\frac{3n}{3n^2}=\frac{1}{n}.$$

究竟 n 要多大才能使上面的式子成立呢？这只要估算一下就可以了，令