

孙树本 编著

光学传递函数 数学基础

科学出版社

光学传递函数数学基础

孙树本 编著

科学出版社

内 容 简 介

本书从数学角度对光学传递函数进行了推导并给出了它的物理意义。前四章(复数、傅里叶级数、傅里叶变换、 δ 函数)是为第五章光学传递函数做准备的。第六章对衍射进行了数学讨论。

本书可作为光学工程技术人员和大专院校光学专业师生的参考书。

光学传递函数数学基础

孙 树 本 编 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1980 年 6 月第一次印刷 印张: 5 5/8

印数: 0001—6,110 字数: 124,000

统一书号: 15031·270

本社书号: 1685·15—4

定 价: 0.85 元

前 言

本书试图结合光学专业的衍射、成象、传递函数等重要内容,讲解它们的数学表达式和使用的数学方法。

根据光的电磁波理论,为了认识光的波动性,必须掌握波的数学表达方法。最基本的波是谐波,它们的数学形式,是余弦函数或正弦函数,统称为正弦波。

正弦余弦函数可以用复指数的形式表示,它们与下面的公式有关:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

这种用复数表示 waveform 的方法,计算起来非常方便。是光学和电学中常用的运算手段。我们在第一章里就把复数的运算和表示方法,以及有关的基本知识加以论述。

有共同周期的正弦波可以叠加,构成比较复杂的周期波形。反过来也可将一个周期性的波形,分解成为不同频率的正弦波的和。第二章是讨论叠加和分解的傅里叶级数。傅里叶级数提供了研究光学和电学的一个重要方法,在科学技术上有广泛的应用。

讨论光学系统成象过程,势必和一个无穷形式的含有复指数的带参量的广义积分相联系,叫做傅里叶积分。通常称为傅里叶变换。它们的表达形式为:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i2\pi\omega x} dx$$

和

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} dx dy$$

是光学研究中的强有力的工具。

但是傅里叶变换既是无穷积分,又出现复数形式,还要作为含参量的函数,要掌握它必须有个熟悉过程。所以在第三章内,讨论了傅里叶变换的正、逆变换的意义、关系、性质以及卷积等,使读者能有一个较为明确的概念和运用的能力。

第四章扼要介绍了 δ 函数。 δ 函数不是一个普通所说的函数,而是一个广义的函数。我们没有必要引进严格的数学论证,只是比拟密度和质量的概念,得到一个直观的却又能抓住本质的 δ 函数概念,说明它集中表现在积分的形式和意义上,即

$$\int \delta(x) dx = 1$$

$$\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

同时还给出 δ 函数的傅里叶正、逆变换,还论证了由 δ 函数序列构成的脉冲列的性质与应用。并证明脉冲列的傅里叶变换仍是一个脉冲列

$$\mathcal{F}(\sum \delta(x - nT)) = \frac{1}{T} \sum \delta\left(\omega - \frac{n}{T}\right)$$

我们还直观地用图示法指出从连续的傅里叶变换,变成离散的有限的傅里叶变换的变换过程。因此给出了计算公式的理论推导。

很多物理概念可以用 δ 函数容易地把它刻画出来。比如,用 δ 函数表示点光源,电学里用 δ 函数表示脉冲,也可表示场的源,力学里可以表示瞬时的冲击等。而且运算上也可以简化。所以 δ 函数无论是在应用上或是在理论上,都是一

个重要的工具。

第五章就是利用 δ 函数表示点光源，通过定积分的定义和 δ 函数的性质，得出满足等晕条件的线性光学系统，以及在不相干光照射下物象之间的关系式。由此得出光学系统的传递函数。它是脉冲响应函数的傅里叶变换。

在第六章中叙述了利用惠更斯原理得到衍射的一般表达式。根据不同情况，讨论了夫琅和费衍射和费涅耳衍射。在夫琅和费衍射时，可以用光瞳函数的自相关函数计算传递函数。

前四章是数学的准备，给出了所谓“傅里叶光学”中用到的数学方法。各章附有参考问题与答案，以便学习。

后两章运用前面提供的数学工具，以获得衍射、成象、传递函数等数学表达形式。

此外，把定积分的基本性质，波动方程的解，贝塞尔函数的基本内容，快速傅里叶变换等，分别写在附录里，以供参考。

本书是在过去教课讲义的基础上修改编写而成的。叙述时力求通俗易懂，许多证明以及条件的要求，我们不强调数学上的严格推导，但阐述力求准确。因限于作者的水平，缺点和错误势所难免，希望读者提出批评指正。

目 录

前言	vi
第一章 复数	1
§ 1 虚数和复数	1
1.1 虚数	1
1.2 复数	2
§ 2 复数的计算	3
2.1 加减法	3
2.2 乘除法	4
2.3 共轭复数的性质	4
§ 3 复数的表示法	5
3.1 复数的直角坐标表示法	5
3.2 复数的极坐标表示法	7
3.3 复数的指数表示法	8
3.4 复数与振动	12
3.5 复数与齐次常系数线性微分方程	13
§ 4 复数形式的实函数的微分与积分	16
4.1 复数的指数形式积分	16
4.2 积化和差的三角公式	17
4.3 三角函数乘积的定积分公式	18
参考问题	20
第二章 傅里叶级数	24
§ 5 叠加	24
5.1 例	24
5.2 图形的叠加	25
5.3 叠加的级数复数形式	27

5.4 实部表示与无穷级数	29
§ 6 周期函数的分解——展成傅里叶级数	30
6.1 分解的表达形式——傅里叶展开	31
6.2 傅里叶系数 a_n 与 b_n 的计算	32
6.3 周期性与奇偶性在定积分中的应用	34
6.4 函数展成傅里叶级数的举例	38
6.5 傅里叶级数的复数形式	44
6.6 光学中应用的例	46
§ 7 频谱与巴塞瓦等式	53
7.1 频谱	53
7.2 巴塞瓦等式	57
参考问题	58
第三章 傅里叶变换	60
§ 8 问题的提出	60
8.1 在夫琅和费衍射场中,光的振幅是瞳函数的傅里叶变换	60
8.2 从傅里叶级数直观的推导傅里叶变换	62
§ 9 傅里叶变换的基本性质	63
9.1 傅里叶积分作为含参量的无穷积分	63
9.2 傅里叶正变换与逆变换	65
9.3 基本性质	67
9.4 傅里叶变换的各种表达式	70
9.5 傅里叶变换的运算符号	71
§ 10 卷积(或称褶积)定理	73
10.1 卷积的定义与定理	73
10.2 卷积的几何说明	76
10.3 巴塞瓦定理	79
§ 11 二维的傅里叶变换	80
参考问题	82
第四章 δ 函数	85

§ 12	δ 函数概念	85
§ 13	δ 函数的性质	88
§ 14	δ 函数的傅里叶变换	89
14.1	一维 δ 函数的傅里叶变换	89
14.2	二维 δ 函数的傅里叶变换	91
14.3	δ 函数的其它表现形式	91
§ 15	δ 函数的序列	93
15.1	脉冲列	93
15.2	梳状函数的傅里叶变换	94
15.3	脉冲列的应用	96
§ 16	有限傅里叶变换	98
16.1	图形表示法	98
16.2	有限傅里叶变换公式的推导	99
参考问题		104
第五章 成象与传递函数		106
§ 17	δ 函数与成象	106
17.1	参量不变性的线性光学系统	106
17.2	δ 函数表示点光源	107
17.3	响应函数	107
17.4	成象关系	107
§ 18	传递函数	110
18.1	一维传递函数	110
18.2	二维传递函数	114
第六章 衍射的数学表达形式		116
§ 19	惠更斯原理的应用	116
19.1	波动方程的解	116
19.2	衍射的表达式	118
§ 20	夫琅和费衍射	120
20.1	远场近似	120
20.2	在透镜焦平面上的衍射	121

20.3	物点通过透镜在共轭面上的象	123
20.4	衍射举例	125
20.5	透镜衍射的例	128
20.6	光学传递函数是光瞳函数的自相关函数	130
§ 21	费涅耳衍射	134
21.1	费涅耳衍射的积分表达式	134
21.2	矩形孔的费涅耳衍射	136
§ 22	脉冲响应函数对分辨力的应用	137
22.1	两个物点的象,一维情况	137
22.2	瑞利判定法	138
22.3	斯柏劳 (Sparrow) 判定法	140
22.4	二维情况	141
§ 23	传递函数作为光学系统的频率特性	141
23.1	光学系统可以看做空间频率滤波器	141
23.2	理想光学系统的传递函数	143
附录 I	定积分的性质	146
1.	定积分的定义	146
2.	关于区间的性质	147
3.	中值定理	147
4.	计算公式	147
附录 II	波动方程的解	149
1.	平面波	149
2.	球面波	150
3.	谐波	151
附录 III	贝塞尔函数	153
1.	贝塞尔函数的级数表示	153
2.	微分关系式	154
3.	母函数	154
4.	积分表达式	154
附录 IV	快速傅里叶变换算法	156

1. $N = r_1 r_2 \cdots r_m$ 时的算法	156
2. $N = 2^m$ 时快速傅里叶变换算法	159
参考文献	170

第一章 复数

在数学发展史上,人类由正数认识到负数是一个飞跃,而从实数发展到虚数,是一个更大的飞跃。虚数的“虚”字,便是还没有认识到虚数是数的历史痕迹。现在复变函数论的发展,不但对科学技术有极其重要的应用,而在数学理论本身已成为一个重大的数学分支。

本章的目的是扼要讲解复数的基本性质和表示方法,以及有关的运算。

§1 虚数和复数

1.1 虚数

在实数范围内,一个不等于零的任意实数,它的平方一定大于零。即若 $a \neq 0$, 则 $a^2 > 0$ 。而且我们不能对负数开平方,也不能开偶次方,所以不能求方程

$$x^2 + 1 = 0$$

的根。

由于大量实际问题的需要,计算中有必要对负数开平方。从上面的方程得

$$x^2 = -1$$

必须引进 $x = \sqrt{-1}$ 或 $x = -\sqrt{-1}$ 这种运算的符号。为了方便用字母 i 表示 $\sqrt{-1}$ 。这样就可以说上面的方程有两个根即 i 和 $-i$ 。

我们引进的这个 i 叫做虚数,其定义如下: i 不是实数,

它的平方等于 -1

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

它的各次乘幂遵守指数的运算规律总起来有下面的结果:

$$i = i^5 = i^9 = i^{13} = \dots = i^{4k+1} = i$$

$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = \dots = i^{4k+2} = -1$$

$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \dots = i^{4k+3} = -i$$

$$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = \dots = i^{4k} = 1$$

例. 计算: i^{19} , i^{34} 和 i^{173}

$$i^{19} = i^{4 \times 4 + 3} = i^3 = -i$$

$$i^{34} = i^{4 \times 8 + 2} = i^2 = -1$$

$$i^{173} = i^{4 \times 43 + 1} = i$$

当幂次为 m 与 n 时, 则有:

$$i^m \cdot i^n = i^{m+n} \quad i^m \div i^n = i^{m-n}$$

$$(i^m)^n = i^{mn} \quad i^0 = 1$$

m, n 都是正整数. 负指数同样适用.

有时候为了避免和电流的符号 i 相混淆, 常用 $j = \sqrt{-1}$ 来代替 i .

1.2 复数

设 a 和 b 是任意的实数, 则具有形式

$$a + bi$$

所有的表达式定义为复数.

设 $z = a + bi$ 是一个复数, a 称为 z 的实部, b 称为 z 的虚部, 记为

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

当复数的虚部为零时, 这个复数就变成了实数. 因此复数可以看成实数的扩张, 复数是在实数中加上一个虚数 i 的

结果。如果复数的实部为零，复数只成了 bi 的形式，叫做**纯虚数**。

如果两个复数 $a + bi$ 与 $c + di$ 相等，必然其实部与实部相等，虚部与虚部相等，即

$$a = c \quad \text{与} \quad b = d$$

若两个复数 z 和 z' ，其实数部分相同，而虚数部分相差一个负号，即若 $z = a + bi$ ，则 $z' = a - bi$ 。这时我们称这两个复数为**共轭复数**。

若 $z = a + bi$ ，而它的共轭复数，用 z 上加一横线表示，记作 $\bar{z} = a - bi$ 。

直接从定义出发容易证明： $\overline{(\bar{z})} = z$ ，即共轭复数的共轭复数是它自己。复数及其共轭复数相加减时，可以得出复数的实部与虚部：

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

§2 复数的计算

复数是符号 i 的一次式 $a + bi$ ，满足加减乘除四则运算的交换律、结合律和分配律的，因此复数运算就和代数式的运算一样。但只须记住 $i^2 = -1$ ，那么运算的结果总会是 $a + bi$ 的形式的。

2.1 加减法

$$\begin{aligned} \text{例.} \quad (3 + 4i) + (-5 - 2i) &= 3 + (-5) \\ &\quad + [4 + (-2)]i = -2 + 2i \end{aligned}$$

复数的加减法，就是实部与实部相加减、虚部与虚部相加减。如

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

其中 a, b, c, d 都是实数。

2.2 乘除法

举例说明:

$$\begin{aligned} \text{例. } (a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + bai - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

这个例子很重要, 它说明共轭复数的乘积是正实数。若 $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, 于是 $z\bar{z} = a^2 + b^2$ 。

有时用星号代替加横线表示共轭复数, 即 $z^* = \bar{z} = a - bi$, $z z^* = z\bar{z} = a^2 + b^2$, 我们只用横线。

例. 设 $z = 3 + 2i$, $\bar{z} = 3 - 2i$, 则 $z\bar{z} = 3^2 + 2^2 = 13$, 又如 $z = -1 - i$, $\bar{z} = -1 + i$, $z\bar{z} = 2$ 。

现在看除法:

$$\text{例. } \frac{-1 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(-1 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = -\frac{9}{13} + \frac{7}{13}i$$

在作除法时, 利用共轭复数的乘积是实数的这个事实, 分子分母同乘以分母的共轭复数, 便将分母化成了实数。两复数相除的结果仍是一个复数。

总之复数经过加减乘除四则运算仍是一个复数。

2.3 共轭复数的性质

共轭复数有下面的性质:

- i) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

用句话说: 和差积商的共轭复数, 等于共轭复数的和差

积商.

若 $f(z)$ 是 z 的有理公式, 系数都是实数, 容易证明 $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

iv) 若 $f(x) = 0$ 是一个实系数的代数方程, 可以证明一个重要事实: 如果 $z = a + bi$ 是方程的一个复数根, 那末, $\bar{z} = a - bi$ 一定也是它的一个根. 换句话说, 实系数代数方程的复数根是成对出现的.

这个性质实际是下列命题的一个特例: 若 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 是任意复数, 如果 $\alpha + \beta i$ 是方程

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

的一个根, 则 $\alpha - \beta i$ 是共轭方程

$$\bar{c}_0 z^n + \bar{c}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{c}_{n-1} z + \bar{c}_n = 0$$

的一个根. 当 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 是实数时, $\bar{c}_j = c_j, j=1, 2, \dots, n$, 方程成为实系数的代数方程了.

§ 3 复数的表示法

复数可以与平面上的坐标相联系, 坐标有直角坐标和极坐标, 因而复数可以用直角坐标和极坐标来表示. 复数用极坐标通过级数可以表示成指数形式. 由于复数有多种多样的表达方式, 因此复数便获得广泛的应用. 如物理中的光学和电学, 都把复数做为重要工具.

3.1 复数的直角坐标表示法

复数是由实部和虚部两个实数所决定的. 比如实部是 2, 虚部是 3, 这个复数当然是 $2 + 3i$.

平面上点的直角坐标, 也是由两个实数来确定的. 例如 $x = 2, y = 3$, 就定出平面上一个点 $P(2, 3)$. 所以两个有序

实数决定平面上的一个点, 这样把平面上的点 $P(a, b)$ 和复数 $z = a + bi$ 中的 a, b 一一对应起来, 也就成为自然而然的事。

复数的实部取 x 坐标, 虚部取 y 坐标, 则平面上的点代表了复数, 这种平面称为复平面, x 轴叫做实轴, y 轴叫做虚轴。

点的直角坐标 (x, y) 则可表示复数 z , 而

$$z = x + yi \quad \text{或} \quad x + iy$$

因此复数 z 就可用点 z 表示。以后复数的某些性质, 可以用几何语言来描述。复数增加了几何图象, 丰富了对复数的研究方法。比如复数 $z = 2 + 3i$ 和它的共轭复数 $\bar{z} = 2 - 3i$, 是和 x 轴对称的两个点 $P(2, 3)$ 及 $P'(2, -3)$, 或说 $\bar{z}$ 是 z 对实数轴的镜面映象(图 3.1.1)。

又如 $u = 3 + 2i$, $v = 1 + i$ 则 $w = u + v = 4 + 3i$ 。设分别用 P, Q, R 三点表示这三个复数, $u + v$ 可以看成把 P 点向右再向上分别平移一个单位, 移到 R 点的位置, w 即 R 点(图 3.1.2)。

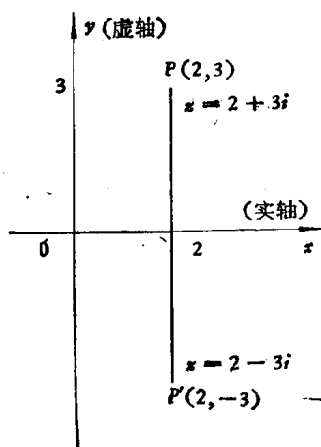


图 3.1.1

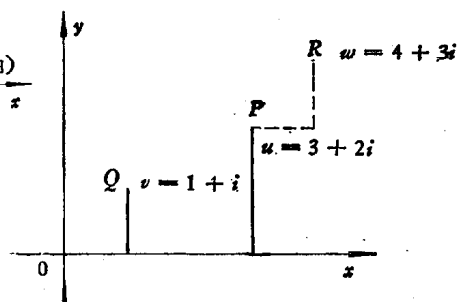


图 3.1.2