孙树本 编著

光学传递函数数学基础

科学出版社

光学传递函数数学基础

孙 树 本 编著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书从数学角度对光学传递函数进行了推导并给出了它的物理意义．前四章(复数、傅里叶级数、傅里叶变换、δ函数)是为第五章光学传递函数做准备的．第六章对衍射进行了数学讨论．

本书可作为光学工程技术人员和大专院校光学专业师生的参考书．

光学传递函数数学基础

孙树本 编著

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年6月第　一　版　　开本：787×1092　1/32

1980年6月第一次印刷　　印张：5 5/8

印数：0001—6,110　　字数：124,000

统一书号：15031·270

本社书号：1685·15—4

定价：0.85 元

前　　言

本书试图结合光学专业的衍射、成象、传递函数等重要内容，讲解它们的数学表达式和使用的数学方法.

根据光的电磁波理论，为了认识光的波动性，必须掌握波的数学表达方法．最基本的波是谐波，它们的数学形式，是余弦函数或正弦函数，统称为正弦波.

正弦余弦函数可以用复指数的形式表示，它们与下面的公式有关:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

这种用复数表示波形的方法，计算起来非常方便．是光学和电学中常用的运算手段．我们在第一章里就把复数的运算和表示方法，以及有关的基本知识加以论述.

有共同周期的正弦波可以叠加，构成比较复杂的周期波形．反过来也可将一个周期性的波形，分解成为不同频率的正弦波的和．第二章是讨论叠加和分解的傅里叶级数．傅里叶级数提供了研究光学和电学的一个重要方法，在科学技术上有广泛的应用.

讨论光学系统成象过程，势必和一个无穷形式的含有复指数的带参量的广义积分相联系，叫做傅里叶积分．通常称为傅里叶变换．它们的表达形式为:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi\omega x}dx$$

和

$$F(\mu, \nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i2\pi(\mu x+\nu y)} dx dy$$

是光学研究中的强有力的工具.

但是傅里叶变换既是无穷积分，又出现复数形式，还要作为含参量的函数，要掌握它必须有个熟悉过程. 所以在第三章内，讨论了傅里叶变换的正、逆变换的意义、关系、性质以及卷积等，使读者能有一个较为明确的概念和运用的能力.

第四章扼要介绍了 δ 函数. δ 函数不是一个普通所说的函数，而是一个广义的函数. 我们没有必要引进严格的数学论证，只是比拟密度和质量的概念，得到一个直观的却又能抓住本质的 δ 函数概念，说明它集中表现在积分的形式和意义上，即

$$\int \delta(x) dx=1$$

$$\int f(x) \delta(x-x_0) dx=f(x_0)$$

同时还给出 δ 函数的傅里叶正、逆变换，还论证了由 δ 函数序列构成的脉冲列的性质与应用. 并证明脉冲列的傅里叶变换仍是一个脉冲列

$$\mathscr{F}(\Sigma\delta(x-nT))=\frac{1}{T}\Sigma\delta\left(\omega-\frac{n}{T}\right)$$

我们还直观地用图示法指出从连续的傅里叶变换，变成离散的有限的傅里叶变换的变换过程. 因此给出了计算公式的理论推导.

很多物理概念可以用 δ 函数容易地把它们刻画出来. 比如，用 δ 函数表示点光源，电学里用 δ 函数表示脉冲，也可表示场的源，力学里可以表示瞬时的冲击等. 而且运算上也可以简化. 所以 δ 函数无论是在应用上或是在理论上，都是一

个重要的工具.

第五章就是利用 δ 函数表示点光源，通过定积分的定义和 δ 函数的性质，得出满足等晕条件的线性光学系统，以及在不相干光照射下物象之间的关系式. 由此得出光学系统的传递函数. 它是脉冲响应函数的傅里叶变换.

在第六章中叙述了利用惠更斯原理得到衍射的一般表达形式. 根据不同情况，讨论了夫琅和费衍射和费涅耳衍射. 在夫琅和费衍射时，可以用光瞳函数的自相关函数计算传递函数.

前四章是数学的准备，给出了所谓"傅里叶光学"中用到的数学方法. 各章附有参考问题与答案，以便学习.

后两章运用前面提供的数学工具，以获得衍射、成象、传递函数等数学表达形式.

此外，把定积分的基本性质，波动方程的解，贝塞尔函数的基本内容，快速傅里叶变换等，分别写在附录里，以供参考.

本书是在过去教课讲义的基础上修改编写而成的. 叙述时力求通俗易懂，许多证明以及条件的要求，我们不强调数学上的严格推导，但阐述力求准确. 因限于作者的水平，缺点和错误势所难免，希望读者提出批评指正.

目　　录

第一章　复　　数

在数学发展史上，人类由正数认识到负数是一个飞跃，而从实数发展到虚数，是一个更大的飞跃. 虚数的“虚”字，便是还没有认识到虚数是数的历史痕迹. 现在复变函数论的发展，不但对科学技术有极其重要的应用，而在数学理论本身已成为一个重大的数学分支.

本章的目的是扼要讲解复数的基本性质和表示方法，以及有关的运算.

§1　虚数和复数

1.1　虚数

在实数范围内，一个不等于零的任意实数，它的平方一定大于零. 即若 $a \neq 0$，则 $a^2 > 0$. 而且我们不能对负数开平方，也不能开偶次方，所以不能求方程

$$x^2 + 1 = 0$$

的根.

由于大量实际问题的需要，计算中有必要对负数开平方. 从上面的方程得

$$x^2 = -1$$

必须引进 $x = \sqrt{-1}$ 或 $x = -\sqrt{-1}$ 这种运算的符号. 为了方便用字母 i 表示 $\sqrt{-1}$. 这样就可以说上面的方程有两个根即 i 和 $-i$.

我们引进的这个 i 叫做虚数，其定义如下：i 不是实数，

它的平方等于 -1

$$i^2 = -1 \tag{1.1}$$

它的各次乘幂遵守指数的运算规律总起来有下面的结果：

$$i = i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots = i^{4k+1} = i$$

$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = \cdots = i^{4k+2} = -1$$

$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \cdots = i^{4k+3} = -i$$

$$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = \cdots = i^{4k} = 1$$

例．计算：i^{19}, i^{34} 和 i^{173}

$$i^{19} = i^{4\times 4+3} = i^3 = -i$$

$$i^{34} = i^{4\times 8+2} = i^2 = -1$$

$$i^{173} = i^{4\times 43+1} = i$$

当幂次为 m 与 n 时，则有：

$$i^m \cdot i^n = i^{m+n} \qquad i^m \div i^n = i^{m-n}$$

$$(i^m)^n = i^{mn} \qquad i^0 = 1$$

m, n 都是正整数．负指数同样适用．

有时候为了避免和电流的符号 i 相混淆，常用 $j = \sqrt{-1}$ 来代替 i.

1.2 复数

设 a 和 b 是任意的实数，则具有形式

$$a + bi$$

所有的表达式定义为**复数**.

设 $z = a + bi$ 是一个复数，a 称为 z 的**实部**，b 称为 z 的**虚部**，记为

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z)$$

当复数的虚部为零时，这个复数就变成了实数．因此复数可以看成实数的扩张，复数是在实数中加上一个虚数 i 的

结果．如果复数的实部为零，复数只成了 bi 的形式，叫做**纯虚数**．

如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 相等，必然其实部与实部相等，虚部与虚部相等，即

$$a=c \quad 与 \quad b=d$$

若两个复数 z 和 z'，其实数部分相同，而虚数部分相差一个负号，即若 $z=a+bi$，则 $z'=a-bi$．这时我们称这两个复数为**共轭复数**．

若 $z=a+bi$，而它的共轭复数，用 z 上加一横线表示，记作 $\bar{z}=a-bi$．

直接从定义出发容易证明：$\overline{(\bar{z})}=z$，即共轭复数的共轭复数是它自己．复数及其共轭复数相加减时，可以得出复数的实部与虚部：

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

§2 复数的计算

复数是符号 i 的一次式 $a+bi$，满足加减乘除四则运算的交换律、结合律和分配律的．因此复数运算就和代数式的运算一样．但只须记住 $i^2=-1$，那么运算的结果总会是 $a+bi$ 的形式的．

2.1 加减法

例． $(3+4i)+(-5-2i)=3+(-5)$
$+[4+(-2)]i=-2+2i$

复数的加减法，就是实部与实部相加减、虚部与虚部相加减．如

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

其中 a, b, c, d 都是实数.

2.2 乘除法

举例说明:

例. $$(a+bi)(a-bi)=a^2-abi+bai-b^2i^2$$
$$=a^2+b^2$$

这个例子很重要，它说明共轭复数的乘积是正实数. 若 $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$,于是 $z\bar{z}=a^2+b^2$.

有时用星号代替加横线表示共轭复数，即 $z^*=\bar{z}=a-bi, zz^*=z\bar{z}=a^2+b^2$,我们只用横线.

例. 设 $z=3+2i$, $\bar{z}=3-2i$, 则 $z\bar{z}=3^2+2^2=13$, 又如 $z=-1-i$, $\bar{z}=-1+i$, $z\bar{z}=2$.

现在看除法:

例. $\dfrac{-1+3i}{3-2i}=\dfrac{(-1+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=-\dfrac{9}{13}+\dfrac{7}{13}i$

在作除法时,利用共轭复数的乘积是实数的这个事实,分子分母同乘以分母的共轭复数，便将分母化成了实数. 两复数相除的结果仍是一个复数.

总之复数经过加减乘除四则运算仍是一个复数.

2.3 共轭复数的性质

共轭复数有下面的性质:

i) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

ii) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

iii) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

用句话说：和差积商的共轭复数，等于共轭复数的和差

积商.

若 $f(z)$ 是 z 的有理公式，系数都是实数，容易证明 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$.

iv) 若 $f(x)=0$ 是一个实系数的代数方程，可以证明一个重要事实：如果 $z=a+bi$ 是方程的一个复数根，那末，$\bar{z}=a-bi$ 一定也是它的一个根．换句话说，实系数代数方程的复数根是成对出现的．

这个性质实际是下列命题的一个特例：若 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 是任意复数，如果 $\alpha+\beta i$ 是方程

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$$

的一个根，则 $\alpha-\beta i$ 是共轭方程

$$\bar{c}_0z^n+\bar{c}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{c}_{n-1}z+\bar{c}_n=0$$

的一个根．当 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 是实数时，$\bar{c}_j=c_j$，$j=1, 2, \cdots, n$，方程成为实系数的代数方程了．

§3 复数的表示法

复数可以与平面上的坐标相联系，坐标有直角坐标和极坐标，因而复数可以用直角坐标和极坐标来表示．复数用极坐标通过级数可以表示成指数形式．由于复数有多种多样的表达方式，因此复数便获得广泛的应用．如物理中的光学和电学，都把复数做为重要工具．

3.1 复数的直角坐标表示法

复数是由实部和虚部两个实数所决定的．比如实部是 2，虚部是 3，这个复数当然是 $2+3i$.

平面上点的直角坐标，也是由两个实数来确定的．例如 $x=2$，$y=3$，就定出平面上一个点 $P(2, 3)$．所以两个有序

实数决定平面上的一个点，这样把平面上的点 $P(a, b)$ 和复数 $z=a+bi$ 中的 a，b 一一对应起来，也就成为自然而然的事。

复数的实部取 x 坐标，虚部取 y 坐标，则平面上的点代表了复数，这种平面称为复平面，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴。

点的直角坐标 (x, y) 则可表示复数 z，而

$$z=x+yi \quad 或 \quad x+iy$$

因此复数 z 就可用点 z 表示. 以后复数的某些性质，可以用几何语言来描述. 复数增加了几何图象，丰富了对复数的研究方法. 比如复数 $z=2+3i$ 和它的共轭复数 $\bar{z}=2-3i$，是和 x 轴对称的两个点 $P(2, 3)$ 及 $P'(2, -3)$，或说 $\bar{z}$ 是 z 对实数轴的镜面映象(图 3.1.1)。

又如 $u=3+2i$，$v=1+i$ 则 $w=u+v=4+3i$. 设分别用 P, Q, R 三点表示这三个复数，$u+v$ 可以看成把 P 点向右再向上分别平移一个单位，移到 R 点的位置，w 即 R 点(图 3.1.2)。

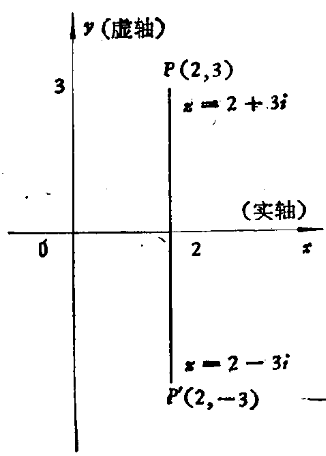

图 3.1.1

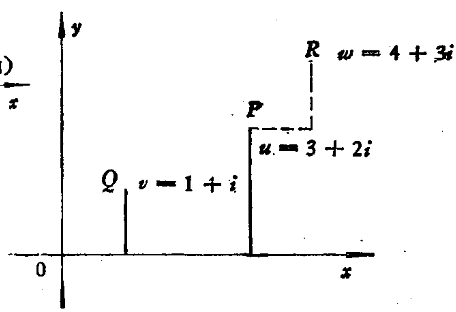

图 3.1.2