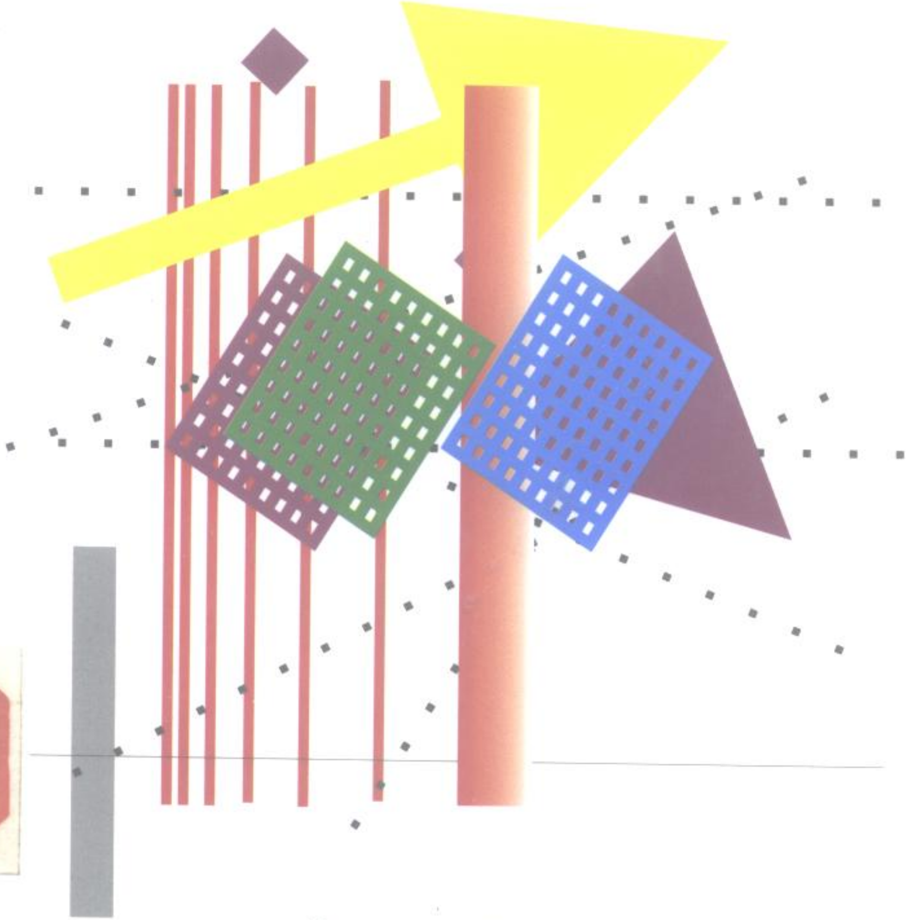
高等院校选用教材系列

线性代数与空间解析几何

俞南雁　韩瑞珠　周建华　编著



科学出版社

线性代数与空间解析几何

俞南雁 韩瑞珠 周建华 编著

10

科学出版社

1999

内容简介

本书是在面向21世纪的教改实践中产生的，整合并系统介绍了线性代数与空间解析几何的基本理论和方法，结构严谨，层次清楚，论证精密，例题多样，重视应用．本书内容包括：向量代数、平面与直线、矩阵、行列式、线性方程组、线性空间和欧氏空间、相似矩阵和特征值、二次型与二次曲面以及现代科技中常用的矩阵方法．书末附有习题答案或提示．

本书可作为高等院校理、工、经济、管理等专业的教材或教学参考书，也可供科技人员和自学者参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何/俞南雁等编著.-北京：科学出版社，1999

高等院校选用教材系列

ISBN 7-03-007409-2

Ⅰ.线… Ⅱ.俞… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②立体几何：解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第25390号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999年8月第一版　开本：850×1168　1/32

1999年8月第一次印刷　印张：10 5/8

印数：1—5 100　字数：276 000

定价：16.00元

出 版 说 明

书籍是人类进步的阶梯．教材是教师教学成果的结晶．一本好的教材，哺育和影响一代乃至几代人．东南大学一贯重视教材建设工作．近一个世纪以来，一批一批的优秀教师写出了一批批优秀教材．据不完全统计，数十年以来，东南大学编写、出版了近千种教材，并且在从 1989 年开始的三届全国优秀教材评选中，共有 82 种教材获奖，获奖数居全国高校前列．这一成果也是使得东南大学成为全国首批本科教学工作优秀学校的一个重要支撑条件．

面对即将到来的 21 世纪，东南大学将更加重视人才培养，重视本科生和研究生教学，重视教材建设．2002 年，东南大学将迎来建校 100 周年的盛大庆典．为了以实际行动迎接这一节日的到来，学校决定，到 2002 年出版 100 本高水平教材，并且在政策上给予大力扶持．经过慎重的讨论和评审，规划工作已经完成，正在逐年落实出版．从今年起，将有一批面向 21 世纪、体现东南大学教学改革成果的教材陆续面世．我们高兴地看到，我校高等教育的教材园地将更加绚烂多彩．

东南大学教学委员会

1998 年 8 月

序

本书是在面向21世纪教学改革的实践中产生的，在讲义的基础上修改而成．它整合了空间解析几何与线性代数两部分内容．

空间解析几何用代数方法（坐标法和向量法）研究空间几何图形及有关问题；线性代数则以向量和矩阵为主要工具处理多变量之间的线性（一次）关系．我们注意到，线性代数中一些重要概念的原始标本大都源自解析几何．试举例若干：

解析几何	线性代数
几何向量	n 维向量、(抽象)向量
几何空间	向量空间、线性空间;欧氏空间
两向量共线、三向量共面	向量组线性相关
仿射坐标系、坐标	基、坐标
内积(数量积)	内积
模(长度)、夹角	模(长度)、夹角
直角坐标系	标准正交基
直角坐标变换	正交变换
过原点的直线、平面	子空间
二次曲线、二次曲面	n 元二次型
……	……

这正如我国著名数学家吴文俊先生所说：“在数学的发展过程中，数与形的概念不断扩大，趋向抽象化，但仍有一些对象和运算关系借助几何语言来表示．”[①]整合线性代数与解析几何，不仅可以借助几何直观使一些抽象的代数概念和理论变得比较容易接受，而且也可以借助矩阵方法处理解析几何中一些原本比较困难的问

① 吴文俊，数学，中国大百科全书数学卷，正文前专文．中国大百科全书出版社，北京、上海，1988．

题，例如直线间、直线与平面间的位置关系，二次曲面或平面二次曲线的化简问题等. 再者，整合后的课程在一年级开课，为多元微积分叙述的更新提供了可能.

在整合的方式上，本书不求水乳交融，而是在保持两部分内容相对独立的基础上，加强相互呼应、联系和渗透. 本书设想以向量和矩阵为主线，以矩阵的运算变换（包括相抵、相似、相合和正交相似）为重点，以培养学生空间想象能力和用矩阵方法处理问题的能力为主要目标，兼顾抽象思维和逻辑推理能力的训练.

第一章向量代数与平面、直线，既是空间解析几何的重要内容，又是线性代数的几何背景. 第二章主要讲矩阵运算，行列式被视为方阵的一个数字特征. 其中 2.6 节通过若干典型问题展示了线性代数的描述功能即模型功能，引而待发. 第三章以线性方程组为主要目标，叙述矩阵的相抵变换及相应的不变量和标准形. 我们在《线性代数教程》（东南大学出版社，1994 年，第二版，获 1998 年度教育部科技进步三等奖）一书处理方法的基础上，进一步突出消元法和行简化阶梯阵，使理论演绎和实际算法紧密结合，清晰易懂. 第四章是线性代数的“几何理论”，分成两个层次叙述是为了减小坡度和便于取舍. 第五章讲矩阵的相似变换和特征值，重点是实对称矩阵的正交相似对角化. 第六章讲实二次型的化简和定性及二次曲面，包括实对称矩阵在相合意义下的不变量和最简形式. 第七章深入浅出、方便实用地介绍广义逆矩阵（M-P 逆）、若当标准形和矩阵分解等在现代科技中被广泛应用的矩阵方法，拓宽了本书的论题范围.

在数学教育中，严格的论证推理对培养学生严谨的科学精神是不可缺少的；然而借助于归纳、类比、联想和几何直观等手段进行“合情推理”，对于培养学生的探索精神和创新能力则更加重要. 因此编者认为，在学时有限的条件下，根据情况省略一些相对次要、或过于繁杂的严格证明，代之以合情推理是适宜的.

本书第一至第六章（除 2.6，3.6，4.3，4.4）是基本内容，

大致相当于工科数学“教学基本要求”及全国硕士研究生入学数学考试大纲有关部分规定的内容，其余内容可选学（见使用框图）. 习题按难易分为两个层次：节后习题是第一层次，属基本要求；章末思考题有一定综合性，不少是证明题，可根据情况选做或不做，但有志考研者不妨一试身手. 因此本书对于不同学校和不同程度的学生有较强的适用性，所需课程时数为48～60.

本书由俞南雁主编，第一、六两章由韩瑞珠执笔，第三章及4.3～4.4由周建华执笔，其余由主编执笔.

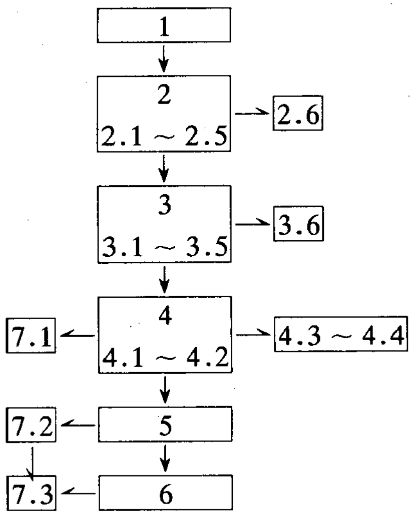
陈建龙教授仔细审读了全部书稿，罗庆来教授也审读了部分章节，他们独到和中肯的意见使本书增色不少. 本书作为东南大学迎接建校100周年重点教材立项，得到东南大学教务处，特别是处长陈怡教授，以及应用数学系的同事们的热情鼓励，并得到科学出版社的大力支持. 编者谨向他们表示由衷的感谢.

限于学识水平，加之成书时间较紧，谬误不当之处在所难免，敬请读者和使用本教材的老师批评指正.

俞南雁

1999. 3.

使用框图（框内数字指章或节）



→必读（48 学时）

→选读（12 学时）

目　录

第一章　向量代数·平面与直线

解析几何是用代数的方法研究几何图形的几何学. 读者已经在中学学过平面解析几何. 如果说坐标法是打开用代数方法研究平面几何图形大门的钥匙,那么,我们将看到,向量法和坐标法的结合将是处理某些空间几何问题一把利斧.

本章先介绍向量代数和空间坐标系,并以此为工具讨论空间的平面和直线. 所有这些讨论,也为本书以后各章作了某种铺垫,特别是为线性代数的许多抽象概念和主要方法提供了几何背景.

1.1　几何向量及其线性运算

1.1.1　向量的概念及其表示

人们把既有大小、又有方向的量称为**向量**或**矢量**. 如点的位移、力、速度等.

常用空间中一个带有方向的线段即**有向线段**来表示向量,将有向线段的长度表示向量的大小,它的方向表示向量的方向,称为**向量的几何表示法**,用有向线段表示的向量有时也称为**几何向量**. 如图 1.1 中的向量记作$\overrightarrow{AB}$,且 A 称为向量的**始点**(或**起点**),B 称为向量的**终点**. 也常用黑体英文字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,…,或希腊字母 α,β,γ,…表示向量(图 1.1). 向量的大小称为向量的**长度**或**模**,向量$\overrightarrow{AB}$的模记作 $\|\overrightarrow{AB}\|$,向量 α 的模记作 $\|\alpha\|$.

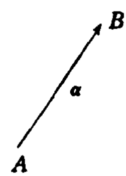


图 1.1

解析几何中所说的向量只考虑它的大小和方向而不计较它的起点的位置,因此它可以平行移动,这种向量也称为**自由向量**. 所

以，如果两个向量 α 和 β 长度相等，方向相同，就称这两个向量**相等**，记作 $\alpha=\beta$.

与向量 α 的长度相等，方向相反的向量，称为 α 的**反向量**或**负向量**，记作 $-\alpha$.

长度为 0 的向量称为**零向量**，记作 θ. 它的方向是不确定的.

1.1.2 向量的加法

定义 1 设 $\overrightarrow{AB}=\alpha$，$\overrightarrow{AD}=\beta$，以 AB、AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为 α 与 β 的**和**，记作 $\alpha+\beta$.

这种求向量和的作图法，称为**平行四边形法则**(图 1.2).

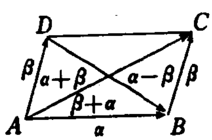


图 1.2

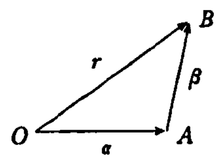


图 1.3

因为在图 1.2 中的 α，β 与 $\alpha+\beta$ 构成一个三角形，因此求向量和的作图法还有另一种方法：从空间中任一点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\alpha$，从 α 的终点 A 再引向量 $\overrightarrow{AB}=\beta$，则向量 $\overrightarrow{OB}=\gamma$ 就是 α 与 β 的和，记作 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ 或 $\gamma=\alpha+\beta$.

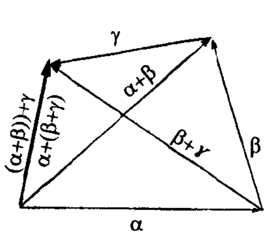


图 1.4

这种求向量和的作图法称为**三角形法则**(图 1.3).

由定义不难验证向量加法有下列基本性质：

对于任意向量 α，β，γ 有

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (交换律)；

2° $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (结合律)；(参看图 1.4)

3° $\alpha+\theta=\alpha$;

4° $\alpha+(-\alpha)=\theta$.

由于向量的加法满足结合律,三个向量 α,β,γ 的和就可以简记为$\alpha+\beta+\gamma$,而不必用括号来表示运算的顺序.

通过向量的加法及反向量的概念可以定义向量的减法:

$$\alpha-\beta\triangleq\alpha+(-\beta)$$①

当向量 α 与β 的起点重合时,向量 $\alpha-\beta$ 可以表示为从β 的终点指向 α 的终点的那个向量(见图 1.2). 根据几何关系显然有

$$\|\alpha\|-\|\beta\|\leqslant\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$$

1.1.3 向量与数量的乘法

定义 2 实数 m 与一个向量α 的乘积$m\alpha$ 为一个向量,它的模为$\|m\alpha\|=|m|\,\|\alpha\|$,当 $m>0$ 时,$m\alpha$ 的方向与α 的方向相同;当 $m<0$ 时,$m\alpha$ 的方向与α 的方向相反;当 $m=0$ 或 $\alpha=\theta$ 时,$m\alpha=\theta$.

由上述定义可知 $m\alpha=\theta$ 的充要条件为$\alpha=\theta$ 或$m=0$.

特别地,如 $m=-1$ 有$(-1)\alpha=-\alpha$.

长度为 1 的向量称为**单位向量**,与非零向量 α 同方向的单位向量$\alpha^\circ=\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$,这时

$$\alpha=\|\alpha\|\alpha^\circ$$

容易验证,向量与数量的乘法(简称**数乘**)满足下列基本性质:对于任意向量 α,β 和任意实数n,m 有

1° $1\alpha=\alpha$;

2° $m(n\alpha)=(mn)\alpha$ (结合律);

3° $(m+n)\alpha=m\alpha+n\alpha$ (分配律);

4° $m(\alpha+\beta)=m\alpha+m\beta$.

向量加法与数乘统称为向量的**线性运算**.

---

① A≙B表示用B定义A.

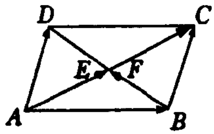


图 1.5

例 1 证明平行四边形的对角线互相平分.

证 设 $ABCD$ 是一个平行四边形(图 1.5),令 AC、BD 的中点分别是 E、F,则

$$2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

即

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$$

另一方面

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD})=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$$

于是点 E 与点 F 重合,即平行四边形的对角线互相平分.

1.1.4 共线、共面向量的判定

下面给出共线向量与共面向量的判定条件.

所谓一组向量**共线**(或**共面**)就是:将这组向量用同一个起点的有向线段来表示时,它们在一条直线(或一个平面)上.

由于方向相同或方向相反的向量都是平行向量,因此共线的两个向量 α 与 β 也叫做平行的,记作 $\alpha /\!/ \beta$. 我们还规定,零向量平行于任何向量.

关于共线向量,我们有

定理 1.1 设向量 $\alpha\neq\theta$,向量 γ 与 α 共线的充分必要条件是,存在唯一的实数 m 使得

$$\gamma=m\alpha \tag{1.1}$$

证 (充分性) 如 $\gamma=m\alpha$,由数乘向量的定义知,γ 与 α 共线.

(必要性) 由于 γ 与 α 共线,且 $\|\alpha\|\neq0$,因而有非负实数 λ 使得:$\frac{\|\gamma\|}{\|\alpha\|}=\lambda$. 当 γ 与 α 同向时,可取 $m=\lambda$,当 γ 与 α 反向

时，可取 $m=-\lambda$，于是都有 $\gamma=m\alpha$.

最后证明 $\gamma=m\alpha$ 中的 m 是唯一的：若 $\gamma=m_1\alpha=m_2\alpha$，则 $(m_1-m_2)\alpha=\theta$，因为 $\alpha\neq\theta$，所以 $m_1=m_2$. □

推论 1.1a 向量 α_1、α_2 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1,k_2，使得 $k_1\alpha_2+k_2\alpha_2=\theta$.

对于共面向量，我们有

定理 1.2 若向量 α,β 不平行，则向量 γ 与 α、β 共面的充要条件是存在唯一的有序实数组 (m,n)，使得

$$\gamma=m\alpha+n\beta \tag{1.2}$$

证 因为向量 α、β 不平行，则 $\alpha\neq\theta,\beta\neq\theta$.

(必要性) 若 γ 与 α、β 共面，把这三个向量的起点放在同一点 O，则它们在同一个平面上. 过 $\gamma=\overrightarrow{OP}$ 的终点 P 分别作直线平行于向量 α,β，它们与 α、β 所在直线分别相交于 Q、R，则 $\overrightarrow{OQ}/\!/\alpha$，$\overrightarrow{OR}/\!/\beta$（图 1.6），由定理 1.1 知 $\overrightarrow{OQ}=m\alpha$，$\overrightarrow{OR}=n\beta$. 于是由向量加法的平行四边形法则知 $\gamma=m\alpha+n\beta$.

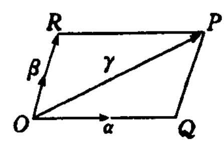


图 1.6

(充分性) 若 $\gamma=m\alpha+n\beta$，则说明 γ 是以 $m\alpha,n\beta$ 为边的平行四边形的对角线，因此 γ 与 $m\alpha$、$n\beta$ 共面，所以 γ 也与 α、β 共面.

最后，m、n 的唯一性证明，读者可参照定理 1.1 唯一性的证明自行完成. □

推论 1.2a 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 共面的充分必要条件是有不全为零的实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$$ □

习题 1.1

1. 如果 $ABCDEF$ 是一个正六边形，O 是它的中心，则在向量组

(1) $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$;

(2) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$;

(3) $\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{ED}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BA}$.

中,哪些是相等向量?哪些是反向量?

2. 已知三角形 ABC 中,点 D,E,F 分别是边 BC,CA,AB 的中点,求证 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\theta$.

3. 设 α,β 为两个不共线向量,$\overrightarrow{AB}=\alpha+2\beta$,$\overrightarrow{BC}=-4\alpha-\beta$,$\overrightarrow{CD}=-5\alpha-3\beta$,证明四边形 $ABCD$ 是梯形.

4. 设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 是一个正六边形,如果 $\alpha=\overrightarrow{A_1A_2}$,$\beta=\overrightarrow{A_1A_6}$,能不能以 α,β 表示出 $\overrightarrow{A_1A_2}$,$\overrightarrow{A_2A_3}$,$\overrightarrow{A_3A_4}$,$\overrightarrow{A_4A_5}$,$\overrightarrow{A_5A_6}$?

5. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}=\alpha$ 和 $\overrightarrow{BD}=\beta$,试把平行四边形 $ABCD$ 四边上的向量用 α,β 表出.

6. 设 M 是 ΔABC 的重心,O 是 ΔABC 所在平面上任意一点,证明:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

1.2 空间坐标系

1.2.1 仿射坐标系、直角坐标系

若存在实数 k_1,k_2,k_3 使 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,就说向量 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性表示**. 按照这个说法

定理 1.1 说明:在直线上任意一个向量都可以由直线上一个非零向量唯一的线性表示.

定理 1.2 说明:在平面上任意一个向量都可以由平面上两个不共线向量唯一的线性表示.

下面定理将说明在空间中任意一个向量都可以由空间中三个

不共面的向量唯一的线性表示.

定理 1.3 在空间中取定三个不共面的向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$,那么对空间中任一向量 α 都存在唯一的有序实数组 (x,y,z),使

$$\alpha = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 \tag{1.3}$$

证 任取一点 O,以 O 为起点作向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$,记以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为方向的有向直线分别为 ox,oy,oz,作向量 $\overrightarrow{OP}=\alpha$. 过 P 点作平行于 ε_3 的直线,它交 xOy 平面于 Q 点,再过 Q 点作平行于 ε_2 的直线,它交 ox 于 M 点,由向量加法的定义,便有

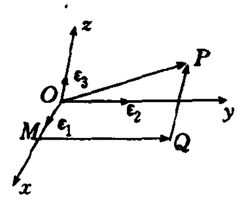


图 1.7

$$\alpha = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$$

由于 $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{QP}$ 分别与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 平行,利用定理 1.1,即得

$$\overrightarrow{OM} = x\varepsilon_1,\overrightarrow{MQ} = y\varepsilon_2,\overrightarrow{QP} = z\varepsilon_3$$

于是 $\alpha = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$.

下面证明上述线性表示式的唯一性,即数组 (x,y,z) 是由向量 α 唯一确定的. 否则,若向量 α 有两种不同的表示

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3, \quad \alpha = x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + z_2\varepsilon_3$$

两式相减有

$$(x_2 - x_1)\varepsilon_1 + (y_2 - y_1)\varepsilon_2 + (z_2 - z_1)\varepsilon_3 = \theta$$

不妨假定 $z_1 \neq z_2$,那么由上式得

$$\varepsilon_3 = \frac{x_2 - x_1}{z_1 - z_2}\varepsilon_1 + \frac{y_2 - y_1}{z_1 - z_2}\varepsilon_2$$

由定理 1.2 知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 共面,这与假设发生矛盾. 由此得到 α 有唯一的表示. □

下面在此定理的基础上,我们建立空间仿射坐标系.

定义 1 在空间中取定一点 O 以及三个有次序的不共面的向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 构成空间中的一个**仿射坐标系**,记为 $\{O;\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$,其中 O 点称为**坐标原点**,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 称为**坐标向量**或**基**,过原