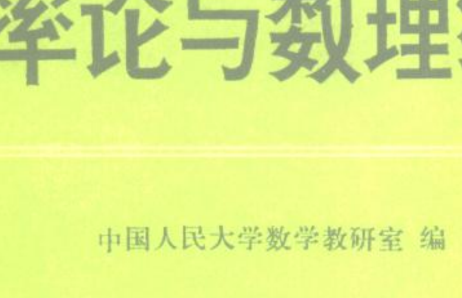
高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

中国人民大学数学教研室 编



中国人民大學出版社

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

中国人民大学数学教研室编

中国人民大学出版社

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

中国人民大学数学教研室编

•

中国人民大学出版社出版

（北京西郊海淀路39号）

民族印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

•

开本：850×1168毫米32开　　印张：9

1985年12月第1版　1985年12月第1次印刷

字数：215,000　册数：1--100 000

统一书号：13011·30　定价：[redacted]

1.80元

前　　言

《经济应用数学基础》是受教育部委托编写的高等财经院校试用教材，全书共分五册。

第三册《概率论与数理统计》介绍了初等概率论与数理统计的基本知识以及马尔可夫链的简单概念。这本书可作为高等院校财经专业的试用教材，也可作为财经工作者自学用书。

本书在编写过程中得到了兄弟院校的指导与帮助，谨在此表示感谢，由于我们水平不高，教学经验不足，书中一定有不少缺点和错误，请广大读者提出批评指正。

编　　者

1985.4.

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

概率论与数理统计是一门研究随机现象量的规律性的数学学科。是近代数学的重要组成部分。

为了研究随机现象，就要对客观事物进行观察，观察的过程叫试验。概率论里所讨论的试验具有下列特点：

（1）在相同的条件下试验可以重复进行；

（2）每次试验的结果具有多种可能性，但是试验之前可以明确试验的所有可能结果；

（3）在每次试验前不能准确地预言该次试验将出现哪种结果。

（一）随机事件的概念

在概率论中，我们把试验的结果称为事件。

每次试验中，可能发生也可能不发生的，而在大量试验中具有某种规律性的事件称为随机事件（或偶然事件），简称事件。通常用大写拉丁字母A、B、C等表示。在随机事件中，有的可以看成是由某些事件复合而成的，而有些事件则不能分解为其它事件的组合。这种不能分解成其它事件组合的最简单的随机事件称为基本事件。例如，掷一颗骰子的试验中，观察其出现的点数，“1点”、“2点”、…、“6点”都是基本事件。“奇数点”也是随机事件，但它不是基本事件，它是由“1点”“3点”“5点”这三个基本事件组成的，只要这三个基本事件中的一个

发生，“奇数点”这个事件就发生。

每次试验中一定发生的事件称为必然事件，用符号Ω表示。每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用符号Φ表示。例如，在上面提到的掷骰子试验中，“点数小于7”是必然事件。“点数不小于7”是不可能事件。

应该指出：必然事件与不可能事件有着紧密的联系，如果每次试验中，某一结果必然发生（如“点数小于7”），那么这个结果的反面（即“点数不小于7”）就一定不发生；不论必然事件、不可能事件，还是随机事件，都是相对于一定的试验条件而言的，如果试验的条件变了，事件的性质也会发生变化。例如，在掷骰子的试验中，掷一颗骰子时，“点数小于7”是必然事件，掷两颗骰子时，“点数之和小于7”是随机事件，而掷十颗骰子时，“点数之和小于7”就是不可能事件了。概率论所研究的都是随机事件，为讨论问题方便，将必然事件Ω及不可能事件Φ也当作随机事件，而作为它的两个极端情况。

（二）事件的集合与图示

研究事件间的关系和运算，应用点集的概念和图示方法比较容易理解，也比较直观。

对于试验的每一个基本事件，用只包含一个元素ω的单点集合$\{\omega\}$表示；由若干个基本事件复合而成的事件，用包含若干个相应元素的集合表示；由所有基本事件对应的全部元素组成的集合，称为样本空间。由于任何一次试验的结果必然出现全部基本事件之一，这样，样本空间作为一个事件是必然事件，仍以Ω表示。样本空间中的每一个元素称为样本点。因而，可以把随机事件定义为样本点的某个集合。称某事件发生，就是当且仅当该集合所包含的某一个样本点在试验中出现。不可能事件就是空集Φ。必然事件就是样本空间Ω。这样一来，集合论的知识可以完全用来解释事件间的关系和运算。

为了直观，我们还经常用图形表示事件。一般地，用平面上某一方（或矩）形表示必然事件，该区域内的一个子区域表示事件。

（三）事件间的关系及其运算

（1）事件的包含。如果事件A发生必然导致事件B发生，即A中的每一个样本点都包含在B中，称为事件B包含事件A，或称事件A含于事件B。记作

$$B\supset A \quad 或 \quad A\subset B$$

$B\supset A$的一个等价说法是：如果B不发生必然导致A也不会发生。显然，对任一事件A，有：

$$\Phi\subset A\subset\Omega$$

（2）事件的相等。如果事件A包含事件B，事件B也包含事件A，称事件A与B相等（或等价）。即A与B所含的样本点完全相同。记作

$$A=B$$

（3）事件的并（和）。两个事件A、B中至少有一个发生，是一个事件，即"A或B"，称为事件A与B的并（和）。它是由事件A和B所有样本点构成的集合。记作

$$A+B \quad 或 \quad A\cup B$$

（4）事件的交（积）。两个事件A与B同时发生，是一个事件，即"A且B"，称为事件A与B的交。它是由事件A与B的所有公共样本点构成的集合。记作

$$AB \quad 或 \quad A\cap B$$

（5）事件的差。事件A发生而事件B不发生，是一个事件，称为事件A与事件B的差。它是由属于A但不属于B的那些样本点构成的集合。记作

$$A-B$$

（6）互不相容事件。如果事件A与B不能同时发生，即

$AB=\Phi$，称事件A与B互不相容（或称互斥）。互不相容事件A与B没有公共的样本点。显然，基本事件间是互不相容的。

（7）对立事件。事件“非A”称为A的对立事件（或逆事件）。它是由样本空间中所有不属于A的那些样本点组成的集合。记作

$$\overline{A}$$

显然 $A\overline{A}=\Phi$，且 $A+\overline{A}=\Omega$。 $\overline{A}=\Omega-A$， $\overline{\overline{A}}=A$。

（8）完备事件组。若事件A_1，…，A_n为两两互斥，且 $A_1+\cdots+A_n=\Omega$，称A_1，…，A_n构成一个完备事件组。

我们用下面的图形表示各事件的关系及运算

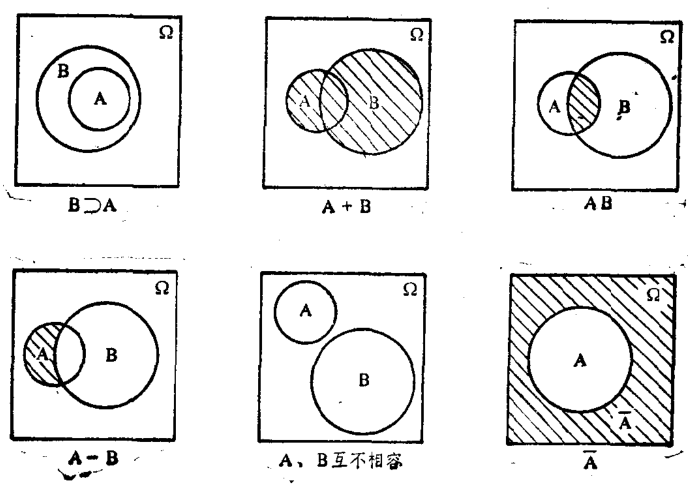


图 1-1

例1. 掷一颗骰子的试验，观察出现的点数：事件A表示“奇数点”；B表示“点数小于5”；C表示“小于5的偶数点”。用集合的列举法表示下列事件：Ω，A，B，C，$A+B$，$A-B$，AB，AC，$C-A$，$\overline{A}+B$。

解：$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$A=\{1, 3, 5\}$；

$B=\{1, 2, 3, 4\}$；

$C=\{2, 4\}$；

$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$；

$A-B=\{5\}$；

$AB=\{1, 3\}$；

$AC=\Phi$；

$C-A=\{2, 4\}$；

$\overline{A}+B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$。

例2．事件A_k表示第k次取到合格品（$k=1, 2, 3$）试用符号表示下列事件：三次都取到了合格品；三次中至少有一次取到合格品；三次中恰有两次取到合格品；三次中最多有一次取到合格品。

解：三次全取到合格品：$A_1A_2A_3$

三次中至少有一次取到合格品：$A_1+A_2+A_3$

三次中恰有两次取到合格品：

$A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$

三次中至多有一次取到合格品：$\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

例3．事件A_k表示某射手第k次（$k=1, 2, 3$）击中目标，试用文字叙述下列事件：A_1+A_2；$A_1+A_2+A_3$；$A_1A_2A_3$；$\overline{A_2}$；A_3-A_2；$A_3\overline{A_2}$；$\overline{A_1+A_2}$；$\overline{A_1}\,\overline{A_2}$；$\overline{A_2}+\overline{A_3}$；$\overline{A_2A_3}$；$A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3$

解：A_1+A_2：前两次中至少有一次击中目标；

$A_1+A_2+A_3$：三次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2A_3$：三次射击都击中了目标；

$\overline{A_2}$：第二次射击未射中目标；

$A_3-A_2=A_3\overline{A_2}$：第三次击中目标而第二次未击中目标；

$\overline{A_1+A_2}=\overline{A}_1\overline{A}_2$：前两次射击均未击中目标；

$\overline{A}_2+\overline{A}_3=\overline{A_2A_3}$：后两次射击中至少有一次未击中目标；

$A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A}_1A_2A_3$：三次射击中至少有两次击中目标

例4. 如果x表示一个沿数轴随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系。

$A=\{x:\ x\leqslant 20\}$　　$B=\{x:\ x>3\}$

$C=\{x:\ x<9\}$　　$D=\{x:\ x<-5\}$

$E=\{x:\ x\geqslant 9\}$

解：

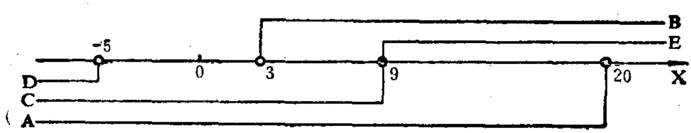


图 1-2

由上图可见，$A\supset C\supset D$，$B\supset E$；

D与B，D与E互不相容；

C与E为对立事件；

B与C，B与A，E与A相容。

§1.2 概　　率

概率论研究的是随机现象量的规律性。因此仅仅知道试验中可能出现哪些事件是不够的，还必须对事件发生的情况进行量的描述。首先是事件发生的可能性大小的问题。

（一）概率的统计定义

前面提到随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在

大量重复试验中，它的发生具有统计规律性。我们应从大量试验出发来研究它。先看下面的试验：

掷硬币十次“正面”出现六次，它与试验总次数之比为0.6；掷骰子100次，“1点”出现20次，与试验总次数之比为0.2。

可见，仅从事件出现的次数，不能确切地描述它出现的可能性大小。还应考虑它出现的次数在试验总次数中所占的百分比。

设事件A在n次重复试验中发生了m次，则 m/n 称为事件A发生的频率。它满足不等式：$0\leqslant m/n\leqslant 1$。如果A是必然事件，有$m=n$，则$m/n=1$；如果$A$是不可能事件，有$m=0$，则$m/n=0$。故必然事件的频率为1，不可能事件的频率是0。回到掷硬币的试验，我们把前人的一些试验记录列成下表：

表 1-1

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 m/n
Demorgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

由上表看出，出现正面的频率接近0.5，并且抛掷次数越多，频率越接近0.5。经验告诉我们，多次重复同一试验时，随机现象呈现出一定的量的规律。具体地说，就是试验次数n很大时，事件A的频率具有一种稳定性，它的数值徘徊在某个确定的常数附近。而且一般说来，试验次数越多，事件A的频率就越接近那个确定的常数。这种在多次重复试验中，事件频率稳定性的统计规律，便是概率这一概念的经验基础。而所谓某事件发生的可能性大小，就是这个“频率的稳定值”。

定义1.1 在不变的条件下，重复进行n次试验，事件A发生

的频率m/n稳定地在某一常数p附近摆动，且一般说来，n越大，摆动幅度越小，则称常数p为事件A的概率，记作$P(A)$。

数值p（即$P(A)$）就是在一次试验中对事件A发生的可能性大小的数量描述。例如，用0.5来描述掷一枚匀称的硬币"正面"出现的可能性。

如上所述，频率的稳定性是概率的经验基础，但并不是说概率决定于试验。一个事件发生的概率完全决定于事件本身的结构，是先于试验而客观存在的。

概率的统计定义只是一种描述，它指出了事件的概率是客观存在的，但并不能用这个定义计算$P(A)$。实际上，我们是采取一次大量试验的频率或一系列频率的平均值作为$P(A)$的近似值的。例如，从我们对北京妇产医院产房六年出生婴儿的调查中（见表 1-2），可以看到生男孩的频率是稳定的，故可以取0.518作为生男孩概率的近似值。

表 1-2

出生年份	新生儿总数 n	新生儿分类数		频率(%)	
		男孩数 m_1	女孩数 m_2	男孩	女孩
1972	5544	2883	2661	52.00	48.00
1974	4063	2087	1976	51.37	48.63
1975	3913	2039	1874	52.11	47.89
1977	3670	1883	1787	51.31	48.69
1978	4250	2177	2073	51.22	48.78
1979	4055	2138	1917	52.73	47.27
六年总计	25495	13207	12288	51.80	48.20

（二）概率的古典定义

直接确定某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的，

仅在某些情况下，才可以直接计算事件的概率。请看下面两个试验：

（1）一盒灯泡一百个，要抽取一个检查灯泡的质量（使用寿命），任意取一个，则一百个灯泡被抽取的机会相同。

（2）抛掷一枚匀称的硬币，可能出现正面与反面两种结果，显然这两种结果出现的可能性是相同的。

这两个试验的共同特点是：

（1）每次试验，只有有限种可能的试验结果，或者说组成试验的基本事件（样本点）总数为有限个。

（2）每次试验中，各基本事件（样本点）出现的可能性是相同的。

在概率论中，把具有上述两个特点的试验叫做古典型试验，它的数学模型称为古典概型。对于古典概型可以按定义1.2的方法直接计算事件的概率。

定义1.2　若试验结果一共由n个基本事件A_1，A_2，…，A_n组成，这些事件的出现具有相等的可能性，而事件A由其中某m个基本事件所组成，则事件A的概率是：

$$P(A)=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n} \quad (1.1)$$

这里A_1，…A_n构成一个等概完备事件组。

从概率的两个定义出发，可以得到：

（1）任何事件A的概率不大于1，不小于零，即：

$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

（2）必然事件的概率等于1，即：$P(\Omega)=1$

（3）不可能事件的概率等于零，即：$P(\Phi)=0$

（三）计算概率的例题

例1．袋内装有五个白球，三个黑球。从中任取两个球，求

取出的两个球都是白球的概率。

解：试验的基本事件总数 $n=C_{5+3}^{2}$，组成所求事件A（取到两个白球）的基本事件数 $m=C_{5}^{2}$，由公式（1.1）有：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{5}^{2}}{C_{8}^{2}}=\frac{5}{14}=0.357$$

例2. 一批产品共200个，有6个废品，求（1）这批产品的废品率；（2）任取三个恰有一个是废品的概率；（3）任取三个全非废品的概率。

解：设$P(A)$、$P(A_1)$、$P(A_0)$分别表示（1）、（2）、（3）中所求的概率，根据公式（1.1），有：

（1） $P(A)=\dfrac{6}{200}=0.03$

（2） $P(A_1)=\dfrac{C_{6}^{1}C_{194}^{2}}{C_{200}^{3}}=0.0855$

（3） $P(A_0)=\dfrac{C_{194}^{3}}{C_{200}^{3}}=0.9122$

例3. 两封信随机地向四个邮筒投寄，求第二个邮筒恰好投入一封信的概率。

解：设事件A表示第二个邮筒只投入一封信。两封信随机地投入四个邮筒，共有$4^2=16$种可能投法。而组成事件A的不同投法只有 $C_{2}^{1}C_{3}^{1}=6$种。由公式（1.1）有

$$P(A)=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}=\frac{C_{2}^{1}C_{3}^{1}}{4^{2}}=\frac{3}{8}$$